*The Dibner Library
of the History of
Science and Technology*

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES

HERALD OF SCIENCE NO. 116

IN GROlier EXHIB. 1894

**BURNDY
LIBRARY**

Chartered in 1941

GIFT OF
BERN DIBNER

T E N T A M E N

JUVENTUTEM STUDIOSAM

IN ELEMENTA MATHESIOS PURAE, ELEMENTARIS AC
SUBLIMIORIS, METHODO INTUITIVA, EVIDENTIA-
QUE HUIC PROPRIA, INTRODUCENDI.

CUM APPENDICE TRIPLICI.

Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiaeque
Publ. Ordinario.

T o m u s P r i m u s.

Maros Vásárhelyini. 1832.

Typis Collegii Reformatorum per JOSEPHUM, et
SIMEONEM KALI de felső Vist.

Imprimatur.

**M. Vásárhelyini Die
12 Octobris 1829.**

**Paulus Horváth m.p.
Abbas, Parochus et Censor
Librorum.**

$A (=) B$	-	-	-	quilibet valor cujus
$\mp, -$	-	-	-	positivum, negativum
$- A$	-	-	-	$\mp B$ si A denotet ut dici solet, $+ A$
$\triangleright$ et $\triangleleft$	-	-	-	aliud quam per $\triangleright$
Litteras <i>latinas</i> graecasve	-	-	-	ubique (nisi aliud)
Litteras <i>germanicas</i>	-	-	-	(nisi aliud monitum inter a et b est.

$\wedge$	-	-	-	angulus quem lineae
$a b$	-	-	-	angulus, quem lineae
$a \cdot b$ vel ab	-	-	-	factum e factoribus
$\frac{a}{b}$ vel $a : b$	-	-	-	quotus ex a per b
$\sqrt[m]{ab} \cdot \sqrt[n]{c}$	-	-	-	radix gradus m e
$\sqrt[m]{ab} \sqrt[n]{c}$	-	-	-	radix gradus m e
$\sqrt{4}$	-	-	-	2; inde quid per 4
$\sqrt{-1}$	-	-	-	quantitas pure ima-
$(A)x$	-	-	-	functio certa ipsius
$(F)(x, y, \dots)$	-	-	-	functio quantitatum
$(A)(x+i)$	-	-	-	functio $(A)x$ substi-
$\dot{x}$	-	-	-	$\frac{x}{n}$ si x variabilis
$\dot{y}, \dot{z}$	-	-	-	incrementa simultanea
$d(A)x$	-	-	-	differentiale ipsius purum (p.194), par-
$J(A)x$ vel $(A')x$	-	-	-	coefficientis differen-
$d^n(A)x$	-	-	-	tialis (p.195). differentiale n-tum.
$J^n(A)x, (A)^n x$	-	-	-	coefficientis diff. n-ta nta (p.195)
dy^2	-	-	-	$dy \cdot dy$; ita Jy^2 de-
$\sin x^m, \log a^m$	-	-	-	sinus x , log a , ele-
$(A)^2 x$	-	-	-	$(A)[(A)x]$, unde
$(A)x^m$	-	-	-	$[(A)x]^m$.
$(A)(x^m)$	-	-	-	functio per (A) de-
$\int^2(u)x$	-	-	-	integrato integralis
$\wedge$	-	-	-	angulus.
$A \perp B$	-	-	-	A perpendicularis B
$A \parallel B$	-	-	-	A parallelum ipsi B

EXPLICATIO SIGNORUM.

Haec quibus * praepositum est, una cum elementis calculi differentialis a pag. (180) usque ad (342) a Tyrone prima vice legente omitti possunt: imo ad erratorum finem annotatum erit, quae ei legenda sint.

$\doteq, \equiv, \stackrel{\sim}{=}, \stackrel{\sim}{\equiv}, (=), \doteq, \equiv$	aequalitatis varias species denotant: nempe per
$A \doteq B$ denotatur	A absolute aequale ipsi B (p.19).
$A \equiv B$	A quoad contentum aequale ipsi B (p.21).
$A = B$	$A' = B'$, si A', B' denotent quantitates A, B , postquam reductae fuerint (p.21).
$A * B \doteq a * b$	complexum ipsorum A et B ita poni posse, ut A cum a et B cum b coincident (p.444)
$A \stackrel{\sim}{=} B$	A geometricè aequale ipsi B (etsi congruere nequirent) (p.454).
$T \stackrel{\sim}{=} t$	$\frac{t}{T} \sim 1$ (p.188), ubi T et t aequipollentia dicuntur.
$x \sim a$	x tendit ad limitem a . (p.29)
$A \stackrel{\sim}{=} B$ vel $B \stackrel{\sim}{=} A$	expressionis A dictae, valor quivis alicui valori expressionis B aequalis (p.107).
$A (=) B$	quolibet valor cujuslibet expressionum A et B aequalis alicui alterius valori.
$\mp, \dashv$	positivum, negativum (p.22).
$-A$	$\mp B$ si A denotet $-B$, et $-B$ si A denotet $\mp B$; adeoque oppositum ipsius A , ut dici solet, $+A$ vero ipsum A denotat.
$>$ et $<$	aliud quam per $>$ et $<$ (p.31).
Litteras latinas graecasse	ubique (nisi aliud monitum fuerit) quantitates denotantur, et per
Litteras germanicas	(nisi aliud monitum fuerit) linearum certa puncta, ita ut ab denotet lineam quae inter a et b est.
$\angle a b$	angulus quem linea a cum linea b facit.
$\angle a c b$	angulus, quem linea ac cum linea cb facit.
$a.b$ vel ab	factum e factoribus a et b .
$\frac{a}{b}$ vel $a:b$	quotus ex a per b diviso.
$\sqrt[m]{ab} \cdot \sqrt[n]{c}$	radix gradus m e facto ex a et b , per radicem gradus n ex c , multiplicata.
$\sqrt[m]{ab} \sqrt[n]{c}$	radix gradus m e facto ex ab et radice gradus n ex c .
$\sqrt[4]{}$	2; inde quid per $\sqrt{P}$ intelligatur patet (p.108).
$\sqrt{-1}$	quantitas pure imaginaria $= \sqrt{-1}$ (p.105).
$(A)x$	functio certa ipsius x (p.178).
$(F)(x, y, \dots)$	functio quantitarum $x, y, \dots$
$(A)(x+i)$	functio $(A)x$ substituto $x+i$ ipsi x .
$\dot{x}$	$\frac{x}{n}$ si x variabilis absoluta sit, (p.184)
$\dot{y}, \dot{z}$	incrementa simultanea variabilium y, z pro mto $\dot{x}$ (p.193).
$d(A)x$	differentiale ipsius $(A)x$; verum (p.190), strictius (p.191), generalius (p.269), purum (p.194), parziale (p.195).
$d(A)x$ vel $(A)x$	coefficientis differentialis (heic derivata dicta), (p.191), derivata pura (p.194), partialis (p.195).
$d^n(A)x$	differentiale ntum. (p.195)
$d^n(A)x, (A)x$	coefficientis diff. nus; ita si y functionem denotet, y^2 coef. diff. 2us est; derivata nta (p.195)
dy^2	$dy \cdot dy$; ita dy^2 denotat $dy \cdot dy$.
$\sin x^m, \log a^m$	sinus x , log a , elevatus ad m .
$(A)^2 x$	$(A)[(A)x]$, unde quid $\sin^2 x$, $\log^2 x$, et $(A)^m x$ denotent, patet.
$(A)x^m$	$[(A)x]^m$.
$(A)(x^m)$	functio per (A) denotata ipsius x^m .
$\int^2 (u)x$	integrale integralis ipsius $(u)x$, unde quid $\int^1$ vel $\int$ et $\int^m$ denotent patet.
$\angle$	angulus.
$A \perp B$	A perpendicularis ad B .
$A \parallel B$	A parallelum ipsi B .
$\triangle$	triangulum.
$\square$	quadratum.
$\sim ab$	linea ab utrinque ∞ ta.
$\sim a b$	ex a incipiendo ∞ ta, in plana illa in qua b est.
$\sim a b$	e b incipiendo in plaga illa in qua a est, ∞ ta.
$\sim P$	P (ex gr. planum) totum ∞ tum (juxta def. p. 449).
∞	quantitas omni dabili major, qualis omnino datur, ut spatium infinitum, recta utrinque infinita &c; sed quantitas omni dabili minor non datur (p.69).

Vocabula sequentia, locis annotatis explicantur. Pars indivellibilis, portio (p.17), pure imaginarium (p.105) logarithmus et potentia elementaris (p.43), sensu sublimiori (p.168), functio absoluta, et variabilis absoluta (p.181), aequipollentia (p.188), quantitas concreta (p.97), forma, sectio (p.443) &c..

A R B O R
ARITHMETICAE GEOMETRIAEQUE
Corradicata coronisque confluentibus.

E repraesentationibus externis internisque, via abstractionis pervenitur ad loca primaria omnium, quae in mundo externo sunt, et quae in externo internoque fiunt; SPATIUM et TEMPUS; quae partim seorsim, partim conjunctim considerantur: abstrahendo nimirum e mundo externo corpus omne, e loco quem occupare videtur, et quaerendo quid reliquum, quidve ultra sit, oritur *intuitus spatii puri*, atque ex eodem in diversis locis, vel diversis in eodem loco, aut diversis repraesentationibus in eodem repraesentante, nascitur *intuitus temporis*. (p.442)

Ex A et tali Non A quod ex A est, fit conceptus *partis*; et *continui*, si quid partes commune habeant. A comparando cum B oritur *aequalitas (absoluta et respectiva)*. Ex aequalitate et parte *quantitas (absoluta et respectiva)*. (p. 17, 19, 20)

Quantitas cum quantitate parit homogeneitatem, et *majoritatem minoritatemque*. Et hinc reflectendo ad tempus atque spatium; quum in priori, quantitatis majoris excessus illico pateat, in spatio vero saepe aliter se res habeat: de omnibus quantitativis ad formam simplicem prioris reducendis cogitatur. (p. 21.)

Atque talis *quantitas*, nempe ad formam TEMPORIS reducta, OBJECTUM ARITHMETICAE est. (p. 22.)

I. *Quantitas cum qualitate (nempe certa determinatione)* parit $\pm$ vum et $-$ vum; (mox imaginaria quoque). (p. 22. et 103)

II. *Quantitatum P et Q certa cum determinatione positarum, resultatum certa sub conditione acceptum*, parit summam S; et ex S et P quaerendo socium ipsius P, oritur *differentia ipsius P ab S*. (p. 25.)

III. *Differentia eadem ipsius S ab S'*, atque porro ipsius S' ab S'' et ita porro; parit P, S', S'', S''' --- *seriem arithmeticam*. (p. 26. et 105)

Atque si series ejusmodi U a o incipiat, et differentia cujusvis termini a sequente sit $=u$; oritur *numerus* quoad u; et serie tali V item a o incipiente, cujus termini cujusvis a sequente differentia $=o$ sit; si o ipsius V cum o ipsius U simul ponatur, ac quilibet terminus sive in U sive in V sequens, simul ponatur cum eo qui in altera sequitur: oritur *nomen numericum* idem terminorum simultaneorum, in U quoad u, in V quoad v. (p. 27.)

IV. *Quaestiones* hinc variae exortae: ex gr. praeter alias; num B numerus sit quoad A? si non; num tale u detur, quoad quod, tam A quam B numeri sint? et si detur, cujusnam nominis numerus sit A, et cujus sit B? Hinc *mensuratio* ipsius B per A, ubi A *mensura*, et B *mensum* ipsius A dicitur; atque hic oritur etiam idea *incommensurabilitatis* (adhuc subiective tantum possibilis); atque hinc u semper minus cogitando, *limitis* idea. Venientibus talibus a et b autem, ut ad quaestionem, qualem mensum sit b ipsius a, eadem responsio sit, quam ad eam, qualem mensum sit B ipsius A; oritur *proportio*. Tum mensurando quoad A non solum B sed C quoque, oritur *fractio*; atque hinc passus fit omnes quantitates homogeneas quoad idem A mensurare; A *unitatem* appellando; qua minus, *fractio vera* dicitur, et numerus quoad A integer audit. (p. 28. --- 31, 34.)

V. Hinc reflectendo ad IV, si ibidem A unitas sit quaerere b, ex a et B, dicitur *multiplicare a per B*, et b *factum* quoad unitatem A e factoribus a et B audit. (p. 33.)

Hinc ex b tanquam facto supposito, et uno e factoribus a et B, quaerere factorem socium ejus dicitur *dividere b per illum*, cujus socius quaeritur, et hic *quotus* audit. (p. 33.)

Atque prouti unitas (in IV.) $\pm$ vel $-$ accipitur; oriuntur *realia* quoad $+1$, et *realia* quoad -1 . (p. 35.)

VI. Si *factores aequales* esse contigerit, *multiplicatio cum divisione* parit *potentiam, radicem, logarithmum*, (*elementares*). (p. 42.)

Atque *quantitas* item cum certa determinatione (uti in I); realitate ejus, multiplicationi quoad -1 innixa, parit *imaginarium*, et conceptum multiplicationis latiore. (p. 105.)

Imo potentia logarithmusque (*elementares*), per binomii elevationem ad tales series deducunt, quae conceptum *potentiae logarithmici* altiore pariunt, ubi et *imaginaria in exponentem* ascendunt. (p. 168.)

VII. Ex omnibus his quasi in oceanum confluentibus: oritur, per quarumvis quantitatum quibusvis operationibus affectarum, qualemvis compositionem, conceptus ita dictae FUNCTIONIS. Ubi item (ut in IV) variae oriuntur quaestiones: e quibus CORONA arboris Arithmeticae exsurgit. (p. 178). Nempe

A.) Pro certa functionis conditione (*qualitateve*), certa functionem constituentia, quae, quanta, qualiave sint, quaerere.

B.) Pro certa certorum functionem constituentium conditione (*qualitateve*); quaeri qualitas functionis valoresque possunt; (imo etiam simul certa functionis conditio poni potest).

Ex gr. Ex A.) Si conditio ea sit, ut functionis valor o sit; quaeri *valor variabilium* potest, (*problemata aequationum*), aut *valor coefficientium*: potest etiam conditio, esse, ut functionis valor *maximus vel minimus* sit, et pro hoc variabilis quaeri. (p. 179, 315, 342, 440.)

Ita aliae conditiones esse possunt; imo variabilis vicem, genus certarum functionum subire potest (ut in *calculo variationum* dicto). (p. 180 et 329.)

Potest vero conditio ea quoque esse, ut quantitates certae quarum genus dicatur x, nulla alia operatione affectae, nonnisi sub certa conditione ordinentur: et resultata quaerantur. (*Analysis combinatoria*) (p. 179 et 138, atque Tom II.)

In B.) quoque variae conditiones esse possunt: ex gr. ut variabili nonnisi integer substituatur; imo ut etiam functio certa qualitate gaudeat, (ut in *theoria numerorum*). (p. 180)

Si ipsi x substituatur $x+i$, oritur *Probl. Taylorianum*. (p. 183 et 289.)

Si vero ipsi x substituatur $m\dot{x}$ (pro $\dot{x}$ denotante $\frac{x}{n}$), atque ipsi m substituantur integri ab 1 incipiendo; et valores functionis exorti post se invicem ponantur: oriuntur *series* (ipso x imo ipso n quoque sive 1 sive aliud denotante); estque pro certo valore ipsius x (ex gr. $x=1$), aut n quoque constans, et ipsi m numeri omnes ab 1 incipiendo etiam ultra n substituuntur; aut n (quamvis semper finitum determinatum, sed post quamvis seriem productam novum valorem accipiens) ∞ , atque ipsi m semper numeri ab 1 usque ad n substituuntur. (p. 184 --- et 439)

Si in casu posteriore terminus quilibet cum sequente comparetur: prodit *series incrementorum*; et si duarum functionum F et f ejusdem x, unius F valor notus sit; atque termini generales T et t, serierum incrementorum ex utraque functione deductarum aequipolleant (id est $\frac{t}{T} \sim 1$ si $n \sim \infty$); prodit et alterius functionis f valor. Reperire t (in forma simplicissima) docet *calculus differentialis*, et ex t functionem f quaerit *calculus integralis*. (p. 184, --- 269 --- 341)

C.) Denique quaelibet horum subqualivis conditione componi: et sub aliqua conditione resultatam, aut pro resultado illa per quae id fieri queat, quaeri possunt. Et de *mutua via* sub eodem tempore, conceptum *mutuae causae* formando; oritur *Mechanica pura*.

His praemissis SPATIUM purum, OBJECTUM GEOMETRIAE est, applicatis ubi necesse est, veritatibus in Arithmetica deductis: ut arbor utraque fraterna corradicata, altera alteri opem ferente, coronis inter lucidas Spatii Temporisque connubii aeterni orbitas, in abyso coelorum confluat. (p. 22, 442).

I. E spatio puro: nascitur prius *superficies, linea, punctum, forma, et sectio*. (p. 443).

II. *Reditu in mundum externum*, cum reflexione ad corpus idem in diversis locis: oritur *Axioma congruentiae*, et *constructio mobilis geometrici, motusque geometricus* (conjunctio, in idea non in concreto, spatii et temporis). (p. 444.)

III. *Reditus in spatium purum, cum mobili geometrico. Motus sine quiete*, (*Operatio motus 1ma*); *Motus cum quiete*; *cum quiete unius puncti* (*Operatio motus 2da*); *cum quiete 2 punctorum* (*Operatio motus 3tia*). (p. 447, 448.)

IV. Spatii filia primogenita *punctum* est, dein *sphaera* quasi media inter duo extrema (inextensum et quaquaversum ∞ tum). Sphaerae per operationem 3tiam filia circulus est; et ex his; adhibitis reliquis operationibus quoque, generatur *recta*, atque e recta et circulo *planum*. (449 et 455 et 468 ---)

V. *Rectis ex eodem puncto p ad omnia puncta cujuspiam F*,

1. Omnibus per idem (sive 1 sive aliud, dummodo non o sit) *multiplicatis: complexus extremitatum* parit *similitudinem*, et *homologa*; atque *contrarie aequalia*, et conceptum generalem *aequalitatis geometricae*. (p. 451 ---)

2. *Rectarum dictarum ipsarum autem complexus* fit (sensu generali) *pyramis*; et forma ad p apicata parit conceptum *anguli* generalem. (p. 451 et 457.)

3. Hinc forma *excluso angulo* fit *fluens*; et haec *exclusis recta planoque* fit *curva*, *admissis vero recta planoque* parit conceptum generalem *tangentis*, et *perpendicularitatis*. (p. 458, 459.)

4. Remoto (in V) p in ∞ , oritur *angulus o*, vel *prima non sectio*; et e *rectarum dictarum*, si finitae et aequales reddantur; *complexu* fit *prisma* (sensu generali, et tum adhuc generaliori). Et si F recta sit, et rectae dictae aequales ad angulum aequalem ponantur in plano; exinde oritur *parallelismi* conceptus generalis. (p. 459 --- 461.)

VI. *Motus geometricus simplex* (id est ut in quovis tempore una tantum trium operationum (in III. dictarum), et quaevis numero certo, etsi non eodem, eveniat): *recta planoque* heic jam ex IV suppositis. (p. 464)

Cum duabus prioribus operationibus, et semper certo praeterea *rectarum* numero adhibito, *descendendo in planum* (omnibus eo restrictis); fit *Planimetria*; ubi prius *de lineis* (neglecta area), earumque *sectione* (o aut aliqua); tum *de arcibus* agitur. *Constructionis geometricae sensu stricto ambitus*.

Admissa operatione 3tia quoque, nec restringendo ad planum, redeundo in spatium universum; fit *Solidometria*, *constructione geometrica sensu lato accepta*. (p. 464.)

Notandum autem in motu dicto simplici, operationem quamvis seorsim peragi, nec ulla alia lege restringi, nisi quod mobile e dato loco in datum, perveniat. Unde duae priores operationes, sola restrictione ad planum accedente, reducuntur; Imo ad *motum puncti a rectam ab secum ferentis*, usquequo a in p perveniat. 2da. ad *rectae ab motum circa a in plano*, donec in certam rectam datam, cujus una extremitas a est, perveniat.

VII. MOTUS GEOMETRICUS COMPOSITUS; nempe ubi plures operationes (trium dictarum primitivarum conjunguntur) in eodem tempore; lege quoque qua durante motu viae simultaneae per singulas operationes factae a se invicem dependeant, data: e quo CORONA arboris Geometriae exrescit. Suntque hae operationes conjunctae. (p. 465 ---)

A.) Aut numero finito; et quidem.

1. Aut duae tantum; ex gr. si recta ab in plano P circa a mota, interea punctum p ita moveatur in ab, ut via y ejus sit $= (f)u$ (denotante u viam puncti b); et quaeratur via puncti p. (p. 465.)

Aut ab quiescat, et p in ab motum, $\perp$ rem B ad ab, secum ferat, atque interea ita moveatur punctum p' in B, ut via y ejus sit $= (F)x$ (denotante x viam puncti p); et quaeratur via puncti p'. Prodeunt hoc modo talia quoque, quorum etsi non omne, quodvis punctum tamen (nempe pro dato quovis x simultaneum y) geometrico (sensu stricto) construi potest.

2. Aut tribus conjunctis: ex gr. si punctum p describat in plani P recta ab viam x, secum ferendo planum p $\perp$ re ad P e recta B $\perp$ ri ad ab, atque interea p' in B motum rectam C ex p ad B $\perp$ rem, in p secum ferat; et punctum p'' in C viam z describat; sitque puncti p in B via $y=(a)x$, et $z=(b)y$; et quaeratur via puncti p'' in spatio.

Aut planum P circa rectam fixam A plani P moveatur, via certi ejus puncti, u dicta; atque interea p describat in A viam x, secum ferens in P $\perp$ rem B ad A, atque simul describat p' in B viam y; sitque $z=(k)u$, et $y=(h)x$; et quaeratur via puncti p'. (p. 466.)

Ita plures quoque operationes (numero certo) conjungi possunt.

B.) Aut *innumerabiles* ejusmodi operationes conjunguntur: ex gr. si recta A in plano P sit, et recta B $\perp$ A, atque planum Q secet planum P in B, et rectam A in b; ac moveatur b in A, planum Q secum ferens; atque interea certa lege a via puncti b dependente, moveantur certa puncta generaliter p dicta (innumerabilia quoque, prouti per legem determinantur) in $\perp$ ribus ad rectam B in Q erectis: et quaeratur complexus ipsorum p in omnibus temporis punctis expertibus usque ad motus finem. (p. 467)

ORDO quo GEOMETRIA tractabitur:

PRIMO in PLANO.

A.) Tractantur illa, quorum omnia puncta geometricè (sensu stricto) construi possunt; (quae idcirco in planum cadunt).

B.) Tum illa, quorum non omnia sed quodvis punctum geometricè (sensu stricto) construi potest: multa horum talia sunt, quorum omnia puncta (sensu lato) geometricè construi possunt.

C.) Sunt quorum non quodvis punctum geometricè (sensu stricto) construi potest: at horum quaedam talia sunt, quorum quodvis punctum construi geometricè (sensu lato) potest, et alia, quorum quodvis punctum nec ita construi potest.

Considerantur vero prius in A dicta; et quidem

I. (neglectis areis), formae oriundae per illorum sectionem, o aut aliquam; et quidem hanc prius cum angulo, tum sine angulo.

A.) Cum angulo; et quidem.

1mo. Ex una recta; cum una, dein cum duabus, tum cum 3 rectis: (aut pro nullo pari parallelo, aut pro uno pari parallelo per alterum parallelum, aut per alterum par non parallelum, secto; tum e pluribus rectis.

2do. E recta cum circulo: prius una recta, tum pluribus, et quidem se aut non, aut nonnisi in uno puncto eodem secantibus; et hoc aut in peripheriam, aut intra aut extra eam cadente. Denique considerantur rectae plures, quarum quaevis per 2 proximas tantum secta sit; et quidem aut quavis sectione in peripheriam cadente, aut peripheriam quavis rectarum tangente.

3ti. Considerantur formae e circulis duobus, tum pluribus se mutuo cum angulo secantibus.

B.) Tum formae e rectis circulisque utvis sine angulo compositis.

II. Postea considerantur areae eorum quae prodierunt: atque eae quoad aequalitatem terminatam ubi fieri potest, aut interminatam (si prius fieri nequeat) (p. 21) comparantur; ad formam temporis reductae computantur, transmutantur, adduntur, subtrahuntur, &c.

III. Tum eorum quae prodierunt (tantum possibilitate demonstrata), ea quae possunt, geometricè (sensu stricto) constructa exhibentur.

IV. Atque demum, e datis sufficientibus eorum quae prodierunt, certa concernentia computantur (applicata Arithmetica): quo pertinet etiam Trigonometria plana.

Tum considerantur in B atque demum in C dicta; ipsa, et eorum utcumque compositorum sectiones: applicando motum e duobus compositum in arbore expositum, subsidio theoriae functionum (ex Arithmetica).

SECUNDO: Redeundo e plano in abyssum spatii:

A.) Tractantur prius ea, quorum omnia puncta sensu lato geometricè construi possunt.

B.) Quorum non omne sed quodvis punctum geometricè sensu lato construi potest.

C.) Quorum nec sensu lato geometricè punctum quodvis construi potest.

Prius in A dicta tractantur considerando formas oriundas

I. Per illorum sectionem o, aut aliquam, et quidem hanc cum vel sine angulo:

1mo. Rectae cum plano et planis, deinde cum sphaera.

2do. Plani

a.) cum uno plano, et dein cum pluribus: ubi pluribus (saltem tribus) nonnisi punctum commune parit angulum solidum vocatum; unde formae e pluribus planis compositae, sectae quoque per plana parallela, considerantur.

β.) cum sphaera: plano uno, aut pluribus secta nempe sphaera; si omnia per centrum eant, parit Trigonometriam sphaericam; si vero superficiem simplicem efficiant, et apices angulorum solidorum omnes in superficiem sphaerae cadant, aut quodvis planorum tangat sphaeram, oriuntur (si spatium claudant) corpora, inter quae sunt (perfecte aut certo sensu) regularia.

3tio. Sphaerae cum sphaera (una aut pluribus).

II. E rectarum ex omnibus punctis formae cuiuspiam F, ad idem aliquod punctum p ductarum complexu; oritur Pyramis, Conus, &c; et si p abeat in ∞ , ac rectae finitae aequales reddantur, (aut aliter dicendo, rectae eidem adeoque inter se parallelae et aequales sint), oritur prisma, Cylinder &c.

III. E sectionibus quarumvis harum formarum compositarum (ex gr. plani et coni &c).

Atque demum in B et C dicta tractantur, per motus quosvis sive in formis generatis, sive aliter compositos, applicata functionum theoria ex Arithmetica.

Index.

3 *rectis* : (aut pro *nullo pari parallelo*, aut
rum par non parallelum, secto; tum e plu-

s, et quidem se aut *non*, aut *nonnisi in uno*
ra aut *extra* eam cadente. Denique conside-
secta sit; et quidem aut *quavis sectione in*
te.

ibus se mutuo *cum angulo* secantibus.

compositis.

e quoad aequalitatem terminatam ubi fieri
 parantur; ad formam temporis reductae com-

), ea quae possunt, geometricae (sensu stri-

certa concernentia computantur (applicata

et eorum utcunque compositorum sectiones :
 , subsidio theoriae functionum (ex Arithme-

to geometricae construi possunt.

sensu lato construi potest.

construi potest.

1 *sine angulo* :

bus (saltem tribus) nonnisi punctum commu-
 e pluribus planis compositae, sectae quoque

pe *sphaera*; si omnia per centrum eant, pa-
 em simplicem efficiant, et apices angulorum
 aut quodvis planorum tangat sphaeram, ori-
 unt (perfecte aut certo sensu) *regularia*.

Vix rudimentis primorum elementorum superficialiter imbutus, proprio nutu, sine ullo alio fine, nonnisi interna veritatis siti ductus, fontem ipsum quaerendo; fundamenta tentaminis hujus, imberbis adhuc juvenis posueram: quod, cum ita vacare a negotiis, ut res ista postularet, frustra amplius sperem, quaecunque sit, edere decrevi; ut aut acutiora ingenia, in otiis quae mihi defuere, perfectius quid praestent, aut alii eodem igne fatuo per tenebras illusi, viam tritam haud deserant, operamque, pretium ejus non facturi, alio locent.

Certe, tantum abest, ut auctor fieri unquam voluerim; ut sine discipulorum gratissimorum impulsu haud quidquam edidissem.

Primaria tantum fundamenta heic ita tradere propositum est; ut Tyrones, quibus abyssum levibus pennis trajicere, merisque imaginibus, nullo originali gaudentibus, in auras vix respirabiles tolli haud datum est, pede firmiore progressi, evehantur ad sublimiora.

Ingratam dixeris operam; cum celsa ingenia, supra vallium ambages, per apices alpium gradiantur: at certe nodi ubique gordii adsunt, gigantum gladios requirentes — Neque pro iis scriptum hoc est: sed pluribus saltem ejusdem mecum indolis futuris; quibus si vires tempusque, quae mihi, donec quadamtenus conquiescere potui, impendenda fuere, servaturus sim, operam haud perdidici. —

Monitos quippe (meo exemplo) juvenes velim: ne laborem sex millium annorum aggressi, proprio Marte, jam olim inventis quaerendis vitam deterant; discant prius grati, quae priores docuere; et provisam re aedificent: si quid autem scripserint, videant, oraculum conscientiae interrogando, ne quid peste communi, quae et spiritus a terrestribus vinculis liberos coelo dejecit, correpti edant; nisi quid in emolumentum scientiae, saltem culturae communis proferant; et nil quidem admirantes, (non

ut ipsi admirandis similes videantur, sed quod effectus quivis causae par sit), vires majores modeste agnoscendo, suis acquiescant. Ac certe in tanta scriptorum turba, non scribere fit rarius; adeo ut fere is monumentum mereatur, qui legere scribereque sciens, sine ratione praegnante scriptor non fit: de re agitur; quidquid boni fuerit, serie infinitae terminus antecedens est; honos autem nomenque auctoris unicus manet, quo innominato, prodeunt arbores herbae floresque, cum hymnis simplicibus, quibus amplum naturae templum resonat. — Atque demum, et veri nominis scriptores, (etsi malignitati, quae libros solum teredinebus posteris relictura, auctores ipsos corrodit, superstites esse queant), si terra duret, ut soles in via lactea in nebulam confluent; nec quidquam in mundo externo est, (sive systematis orbium, sive lucerna unius vespere fuerit), quod non aliquando intereat; et non nisi conscientiae vere bonae purus jugisque fons, Deo teste gaudens, illi coaevus est.

Equidem, licet generis humani gratitudine dignum censeam, qui finem quem mihi proposui, feliciter assecutus fuerit; cum grana tantum arenae ad pyramides magis aliorum gloriae attulerim: si non *Senecae* dicto me ipsum consoler, *Suspice viros etsi deciderint, magna conantes*: hoc saltem laboris pretium petam; ut voluisse quoque puro veritatis amore dulce sit; et errores, quos partim per omissionem, partim per commissionem, a homine occupato, vita millefariam divisa, direptaque, (valetudine infirma, raroque inter nubila perpetua apparente coelo), et penuria librorum mathematicorum recentioris aevi (ut p. 425 testatur), evitare vix possibile erat, benigne emendentur. Certe quo magis res perficietur, et quo magis superer: eo lubentius succumbam. Denique tantum valeat, quantum valet — et Tu LECTOR CANDIDE vale!

I N D E X

RERUM IN TOMO PRIMO CONTENTARUM.

Conspectus arboris utriusque breviter est sequens:

Fundus communis exponitur usque ad (pag.22) quo etiam (p. 442) pertinet.

I. RADICEM *arboris Arithmeticae* constituit conceptuum primariorum genesis, prouti quilibet e prioribus orti se invicem excipiunt (p.22 usque p. 43, §. 35).

TRUNCUM constituunt *primaria*, quae e conceptibus dictis per axiomata sequuntur: utpote resultata operationum, quot, qualiave sint, si cum commensurabilibus, incommensurabilibus, cum fractionibus, potentiis, logarithmisque suscipiantur; quo etiam operatio elevationis (ex gr. binomii) pertinet; unde *potentiae logarithmiquae sublimioris* conceptus oritur. Continentur haec in (§. 35 a p. 43; usque p. 178. in hoc tomo).

CORONAM *arboris* constituunt quaestiones, quae e conceptu FUNCTIONIS, ex omnibus praecedentibus confluentibus, prodeunte oriuntur (a p. 178 usque 442. in hoc tomo).

II. Ita RADICEM *arboris Geometriae* efficiunt; specialior spatii intuitus, et conceptuum primariorum genesis, atque *sphaerae, rectae, planique generatio*; horumque combinationes primariae. (a p. 442 usque ad finem tomi).

TRUNCUM faciunt, e *motu simplici* oriunda; *Planimetria* et *Solidometria*.

CORONAM efficit MOTUS COMPOSITUS.

III. Demum (coronis jam antea confluentibus); actiore spatii cum tempore unione, de *ntupla* via sub eodem tempore, *ntuplae* caussae conceptum formando: oritur *Mechanica pura*.

Notandum autem est: 1mo quod dum tale aliquid quod in omni tempore est, dicitur *possibile*; ex gr. dum dicitur 4^{ta}m proportionalem, aut potentiam exponentis *q*, aut formam aliquam in spatio, *possibilia* esse: ea *re ipsa dari* intelligendum sit. Aliud est, si de eventu, qui in aliquo tantum tempore est, dicatur: e complexu enim omnium, quae sunt, unicum in quovis temporis puncto experte resultatum est. At si ex *a, b - -* reipsa existentibus, (certo modo tali suppositis, ut abstrahendo a reliquis, nulla contradictio sit), eveniat *B*; tum *B* *respective* quoad *a, b - -* *possibile* dici potest; etsi e complexu omnium quae sunt (ita uti sunt), nunquam prodeat. *Absolute possibile*, idest si *a, b - -*, complexum omnium quae sunt, eo modo quo sunt, denotet; *reipsa etiam fit aliquando*.

2do. Dum (p. 62) *possibilitas mensurationis* per *A* ipsius *B* asseritur: demonstratur quidem (*ibidem*) dari talia *u, u' - -* et *n, n' - -*, *m, m' - -*; ut pro $\frac{A}{n} = u$, $\frac{A}{n'} = u'$ &c, et $n' = 2n$, $n'' = 2n'$

&c (nempe $u' = \frac{n''}{2}$, $u'' = \frac{n'}{2}$ &c); in casu commensurabilitatis, (substituendo ipsi *n* integros ab 1 se invicem excipientes) prodeat aliquando tale *n*, ut $A = nu$, $B = mu$ sit; secus autem pro dictis *n, n' - -* sit $A = nu$, $B = mu + (\omega < u)$, et $A = n'u'$, $B = m'u' + (\omega' < u')$ &c - - -; at si reipsa exhibenda *u, u' - -* et numeranda in *B* fuerint; supponi divisio ipsius *A* per quemvis integrum *n* debet; quod, si *A* quantitas ad rectam reducta sit, Geometria sine tentatione praestat, uti et 4^{ta}m proportionalem exacte

exhibet, posteaquam Arithmetica pro quantitatibus, etsi nonnisi in concreto expositae essent, dari haec demonstret, quamvis non semper exhibere valeat. Aliud est, si quantitates jam mensuratae supponantur, atque ita expressae proponantur: et aliud, si nonnisi in concreto datis lineis; ex gr. linea b per lineam a dividenda esset (p. 33), et quaeratur B tale mensum unitatis, quale mensum b ipsius a est; aut b dividendum per lineam B esset, quaerendo a , nempe cuius tale mensum est b , quam B est datae unitatis; Arithmetica dari in hoc quoque casu resultatum probat, sed illud nonnisi peracta antea mensuratione exhibere potest, exacte in casu commensurabilitatis, secus vero cum errore dato quovis minore.

SPECIALITER vero continentur in tomo hoc primo sequentia.

IN INTRODUCTIONE.

1. *Prospectus cognitionum humanarum. Propositio, ejusque formae, definitio, theorema, axioma, demonstratio, vocabula et veritates ultimae, scientia, systema.*

Historia, philosophia, mathesis, physica (externa, interna), psychologia (pura, empyrica), aesthetica, scientia moralis (pura, applicata), Officium, jus, jura, Theologia (a pag. 1 usque 6).

*Axiomata (p. 6. et 7, ubi ex IV deducitur modus apogogice concludendi). Logica ad mathe-
sim requisita: nempe praeter prius dicta, genus, species, subdivisionesque (p. 8 et 9.); aliquod fundamentale (p. 10, § C); tum propositiones quae ex una sequuntur (p. 11, Imo); dein conceptus aequivalentes quid et quando sint (p. 11; 2do); atque (p. 12, 13) e duabus propositionibus quando et qualis fiat conclusio? (relatis omnibus casibus possibilibus, et (p. 14, 15) per axiomata demonstratis); sorites (p. 15); conclusio de n ad $n+1$ (p. 16, § F), fundamentum limitis (p. 15 § E).*

IN CONSPECTU ARITHMETICAE GENERALI.

I. RADIX *e* fundamento commun.

Complexus, pars, totum, pars indivellibilis, nempe si complexus omnis ejus, quod praeterea est, in concreto sisti nequeat, nisi ea quoque adsit); *portio* (p. 17).

* *Indivellibile partis, indivellibile totius est. Pars partis indivellibilis, indivellibile totius est. Portio portionis, portio totius est. Si p portio ipsius T sit; et reliquum ipsius T portio ipsius T est.* (p. 18, 19.).

Nihilum mathematicum, et expers, punctum temporis, continuum (p. 19).

Aequalitas (absoluta, respectiva); quantitas (absoluta, respectiva) aequalitas respectiva quoad contentum (p. 20, 21),

Quantitas cum quantitate : unde *majus, minus, demtio*; hinc *reductio ad formam temporis* (p. 24). *Notio Arithmeticae* (p. 22) (ubi tractat per errorem omissum est). Hinc

Quantitas cum qualitate, parit $\mp$, $-$ et, $+$, $-$ (p. 22 --- 24). Hinc

Additio, (quantitas complexa), ex additione subtractio (p. 25). Hinc

Series arithmetica, numerus; variae quaestiones (p. 27, 28). Hinc

Mensuratio, incommensurabilitas (p. 28), *limes* : *quantitas variabilis* (p. 29). Hinc

Fractio (p. 29), tum *Unitas* (p. 30), (Annotatio de multiplicatione linearum (ibidem), *fractio vera, numerus integer; distinctio inter* $>$ et $\triangleright$, et quaedam hoc concernentia (p. 31). Ex his

Multiplicationis, ex hac divisionis conceptus (p. 33), (extensus pag 106).

Et *proportionis geometricae conceptus* (p. 43, aut p. 65).

In multiplicatione signa $\mp$, $-$ (pariter in proportionem (p. 34).

Signa $+$, $-$ in multiplicatione et divisione (p. 35).

Specialia multiplicationis schemata (p. 36 - - -); ubi (p. 37 et 38) de $\frac{o}{o}$ et $\frac{1}{\infty}$ praevia annotatio

est; et (pag. 38 pro (a) legi (a)x debet.

An semper detur factum, quotus? et aliae quaestiones (p. 39); ubi linea 2da a calce pro, ex 1, legendum ex §. 32, 1.

Quid si factores permutentur prius homogenei, tum heterogenei; *conceptus celeritatis*, et expositio conceptus quantitatum analogarum (p. 39 - - - 41).

Duo divisionis schemata (p. 42).

Per plures factores aequales, *multiplicationis cum divisione, filiae; potentia, radix, logarithmus* (sensu elementari) (p. 42, 43; ubi p. 42 linea 7 a calce pro *aequalia*, legi *aequales* debet.

II. TRUNCUM arboris constituit §. 35, p. 43 incipiens, usque ad p. 178 §. 36.

É resultatis aequalibus, ad eorum aequalitatem unde prodierunt, non concluditur (p. 43).

Reductio quantitatum ad formam temporis, rectaeve; (imo quarundem ad circulum). * *Quantitas finita (absolute, respective)* (p. 44).

Constat, continetur (p. 45).

Addita, etsi $\boxplus$, $\boxminus$ adfuerint quocunque ordine, *summam eandem praebent* (ibidem usque ad (p. 47), ubi V p. 45, per errorem, et (Fig. 7) p. 46 omisum est).

Datur *limes* (ibidem VI).

* Tempus quodvis continuum *gaudet dimidio* (p. 48) et si dimidii semper dimidium accipiatur, dabili quovis tempore minus prodit (p. 48, 49)

* Si u multiplicetur per factum e factoribus numero n , quorum quivis $= 2$; factum numerus quoad u erit. (p. 49. IX).

* Temporis continui Q quod inter 2 puncta est, *quaevis portio certo numero accepta, superat ipsum Q* (p. 50).

* Tempus tale (ut prius) *per quemvis integrum dividi potest* (p. 50); omniaque dicta ad rectam applicari possunt (p. 51).

Pro n integro, et α, β $\times$ vis, est $n(\alpha + \beta) = n\alpha + n\beta$ (p. 51).

Ita: $\frac{\alpha + \beta}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n}$; applicatio ad $\alpha - \beta$ (p. 52).

* Si e tempore T (vel recta) possit u numero n accipi, ita ut $\omega = 0$ vel $< u$ supersit; ex eodem T , $(n+1)u$ accipi nequeunt (p. 52).

* Quaevis quantitas ad unicum reduci potest (p. 53).

* Si $A \equiv B$, est etiam $A = B$, id est $A' \doteq B$ (per A' , B' , reducta A , et B intelligendo); et conversa. (p. 53).

* Si A constet ex $a, b \dots$; est $A' = a' + b' \dots$ (etsi interminata sit reductio) (p. 54, 55).

Resultatum additionis, subtractionisque quantitatum reductarum, unicum. Imo etsi $C \equiv Q$, et $a \equiv c$, uti sunt considerentur; undevis dematur a ex C et c ex Q ; residua erunt $\equiv$ lia (p. 55).

Quantitatibus item ita ut sunt, sine reductione consideratis; et $\equiv$ litate terminata intellecta: Imo. Si $A \equiv B \equiv C$; est etiam $A \equiv (C$, ubi ex errore B scriptum pro C est) (p. 56) 2do. Si $P \doteq Q$, et $p \doteq q$; ac p (portio ipsius P) ex P , et q (portio ipsius Q) ex Q , undevis dematur: erunt illa quae ex P et Q remanent, aequalitate terminata aequalia (p. 57 usque 59)

Ut *resultatum multiplicationis divisionisque unicum* esse probetur: prius de fractionibus (mensuratione supposita expressis); et prius pro casu commensurabilitatis (a pag 59 usque 62): nempe Imo. *fractio, forma quoti exprimi potest* (p. 59). 2do Si per integrum multiplicetur numerator, valor toties augetur, si denominator, valor toties minuitur; si uterque (per eundem) multiplicetur, valor manet. 3tio. Regula hinc ad denominato-

rem eundem reducendi, (vide etiam p. 396); (nota, unde quae fractionum sit major dignosci queat). 4to *multiplicatio fractionum*; unde *fractio fractionis*, et modus quo fractio, unius rei in fractionem rei alius mutari queat. 5to *Divisio fractionum*. 6to fractio et pro casu terminorum non integrorum, quotus est. 7mo. *reductio ad datum numeratorem*, vel *denominatorem*. 8vo. Etsi per fractionem eandem multiplicentur termini fractionis, valor idem manet.

Possibilitas mensurationis (p. 62, XXI).

Datur 4ta proportionalis (p. 64. XXII.)

Proportionis alia definitio (p. 65). *In proportione 2 priora, et 2 posteriora sunt simul commensurabilia vel simul incommensurabilia* (p. 66).

Proportionalis 4ta unica est (p. 66)

Definitio proportionis Euclidea, ejusque cum dictis aequivalentia (p. 11 et p. 67).

Quaedam de limitibus praevis necessaria (a p. 68 usque 70).

1mo. Si $\omega \sim 0$; et $k\omega \sim 0$; imo e quotvis factoribus, quorum aliquis ~ 0 , factum ~ 0 . *Quantitas omnidabili minor non existit* (p. 69).

2do. Si $\omega, \lambda \sim 0$; et $\omega \pm \lambda \sim 0$, (nisi $\omega \pm \lambda = 0$) sit. 3tio Si $x \sim a$, et $y \sim b$; tum $x \pm y \sim a \pm b$; et summa quotvis quantitatum ad limitem tendentium, tendit ad summam limitum.

4to. Si $x - y \sim 0$, et $x \sim a$, $y \sim b$; tunc $a = b$.

5to. Si $p > x > q$, et $p - q \sim 0$; tum etiam $p - x \sim 0$, et $x - q \sim 0$.

6to. Si $n \sim \infty$; tum $\frac{n \pm 1}{n} \sim 1$ Ita 7mo.

$\frac{n}{n \pm 1} \sim 1$.

8vo. Si a constans sit, et $s \sim \infty$, atque $\frac{r+1}{s} \cdot a > x > \frac{ra}{s}$; tum $x - \frac{ra}{s} \sim 0$.

De *resultato multiplicationis* { atque certo sensu *divisionis*) unico (a pag. 70 usque 75).

9no. *Ordo factorum* (etsi omnes incommensurabiles fuerint, utcunque *discerpta factorum imagine*) non mutat factum.

10mo. Factor b cum nullo *fatore* $a+c$ (pro c non o) factum illi quod cum a efficit, $=$ le *pro-ducit*, (literae in duabus primis lineis ita sunt corrigendae).

11mo. Si $x \sim a$, et $y \sim b$; tum $xy \sim ab$; et *limes facti* e quovis ejusmodi factoribus, est *factum limitum*.

12mo. A *divisum* per B , dat *quotum unicum* q ; et $\frac{A}{q} = B$, atque $A = Bq$, et $\frac{A}{B} \cdot B = A$, item $\frac{A}{q} = A \cdot \frac{1}{q}$.

13tio. Si $mu =$ vel $\sim B$, et $nu = A$, atque $mv =$ vel $\sim D$, et $nv = C$; tum $A:B=C:D$, adeoque *proportio ita designari potest*. Atque si $B:A=Q$ sit; B per AQ , et D per CQ exprimi poterit. *Conversim quoque*, si $A:B=C:D$, aut $B=AQ$ et $D=CQ$; *proportio est* (p. 75, 76).

14to. Si $x \sim a$, $y \sim b$, et nec y nec $b=0$; tum quodvis ipsorum $\frac{x}{y}$, $\frac{x}{b}$, $\frac{a}{y} \sim \frac{a}{b}$ (p. 77).

In praec. o e valoribus divisoris excludebatur: quidsi divisor ~ 0 ? (p. 79).

Quidsi tam dividendus quam divisor ~ 0 ? quaedam de quoto simul variatorum praevis, (a pag 80 usque 82).

1mo. Si $\frac{u}{u'} \sim 1$; tum pro utvis magno N datur $u - u' < \frac{u'}{N}$.

2do. Si $\frac{u}{u'} \sim 1$; tum etiam $\frac{u'}{u} \sim 1$.

3tio. Sit ω' pro dato quovis N potest $< \frac{u}{N}$

fieri, ac $\frac{u}{u'} \sim 1$; tunc etiam $\frac{u + \omega'}{u'} \sim 1$.

4to. Imo etiam $\frac{u'}{u + \omega'} \sim$, et $\frac{u' + \lambda}{u + \omega'} \sim 1$, si

$\lambda < \frac{u'}{N}$ fieri potest.

5to. Si $\frac{u}{u'} \sim 1$, ac $\frac{v}{v'} \sim 1$; etiam

$\frac{u + v}{u' + v'} \sim 1$.

6to. Si $\frac{u}{u'} \sim 1$, ac $\frac{v}{v'} \sim 1$; etiam

$\frac{uv}{u'v'} \sim 1$.

7mo. Si $\frac{u}{u'} \sim 1$, ac $\frac{u'}{v} \sim 1$; etiam

$\frac{u}{v} \sim 1$.

Quotus formae $\frac{a\beta\gamma}{abc}$ utcunque discerpi valore incolumi potest (p. 82, 83).

De potentiis et operationibus earum primariis (a pag. 84 usque 94); additis (p. 105. - 107 et 128, 129).

Quod potentia possibilis sit; sive commensurabilis sit exponens q sive non, et sive $\mp$ sive $-$ fuerit.

1mo. Si q integer $\mp$ et > 1 sit. 2do. Si $q = 1$.

3tio Si $q = 0$.

4to. Si q integer $-$; deinde non integer, prius $\mp$, tum $-$, sed quantitas commensurabilis fuerit (p. 84, 85); ubi p. 84, XXIX linea 5 pro 3—1

legi 3—2, et p. 85 linea 1 pro 2—1 legi 3—2 debet.

5to. Sed quaeritur (ad praec.) num detur tale A, ut $aa=AAA$? (p. 85).

6to. *Majus ad idem elevatum, et idem ad majus elevatum fit majus* (p. 86, 87); et pro exponentis valore eodem, potentia eadem est; unde potentiae ad exponentes denominatoris communis reduci possunt (p. 87).

7mo. Si q incommensurabilis, et prius tam q quam a $\mp$ fuerit (p. 87). Casus, si $a=1$; si $a<1$ (p. 88). Si $q=-$ fuerit (p. 88 et 39); unde potentia e divisore in dividendum poni, exponents in oppositum mutato potest (p. 89).

8vo. Quodvis N sive $>$ sive < 1 fuerit; $\sqrt[m]{N} \sim 1$, si $m \sim \infty$ (p. 89).

9no. $a^q \cdot a^Q = a^{q+Q}$ (p. 89). Et $a^q : a^Q = a^{q-Q}$ (p. 90).

10mo. Si $a^n = B^m$; non solum $a^{\frac{n}{m}} = B$, sed etiam $B^{\frac{m}{n}} = a = B^{\frac{1}{q}}$ (pro $q = \frac{n}{m}$). Et si $\frac{n}{m} \sim q$, et $a^q = B$, est etiam $B^{\frac{1}{q}} = a$; atque si $B^{\frac{1}{q}} = a$, est etiam $a^q = B$; et sive $\sqrt[q]{B}$, sive $B^{\frac{1}{q}}$ scribatur, perinde est (p. 90).

11mo. $(\sqrt[m]{B})^n = \sqrt[m]{(B^n)}$; et 12mo. $(\frac{b}{c})^q = \frac{b^q}{c^q}$ (p. 91).

13mo. $(a^q)^p = a^{pq}$ (p. 91, et 92; ubi pro $(a^q)^q$ legendum $(a^q)^p$ est.

Hinc $\sqrt[k]{a^q} = a^{\frac{q}{k}}$ (p. 92).

14to. Si $a < 1$, aut exponens uterque (aut unus tantum) $=$ fuerit; (p. 92 et 93).

Si $\frac{\alpha}{\beta} = q$, et $a^\alpha = b^\beta$; est $a^q = b$; et si

$a^{\frac{\alpha}{\beta}} = b$, est $a^\alpha = b^\beta$ (p. 98).

15to. $(abc\dots)^q = a^q \cdot b^q \cdot c^q \dots$. Et $\sqrt[k]{abc\dots} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b} \cdot \sqrt[k]{c} \dots$

16to. Si $\frac{n}{m} \sim q$, consideratur potentia pro a $\times$ vo et $=$ vo, prouti m par aut impar accipitur. Origo imaginarii (p. 94).

De compendiis operationum per logarithmos (pag. 95, 96).

De expressionis valore; mutata unitate, et de expressionibus quoad diversas unitates factis, ad eandem reducendis; (quum omnia dicta hucusque certae determinatae unitati $\times$ vae innixa sint) (pag. 96 usque 105). *Exempla aequationis sectionum conicarum* (p. 101 usque 103); ubi nomina primaria sectiones conicas concernentia (p. 101, 102) definiuntur; et pag. 103 *inter asymptotam et y, hyperbolam*, et q , legi debet. *Quantitas concreta, et abstracta* (p. 97).

De imaginariis, atque (his admissis) calculo radicalium, (a pag. 105 usque 118; cui addendum p. 128, 129, 9no 10mo 11mo et 12mo.).

Hucusque Unitas $\times$ ponebatur: sed prouti superius quantitas cum quantitate (nempe certa cum determinatione) produxit $\times$ vum et $=$ vum; ita si quantitatem a , ut radicem e quovis B spectare libeat; oriuntur *pure imaginaria*, quorum realitas multiplicationi quoad -1 innixa est (p. 105).

Regulae admissis imaginariis, atque conceptus multiplicationis extensus (p. 106).

Expressionum aequalitas varia (p. 107).

Porro significatio [signi] $\sqrt[n]{}$; tum 1mo $\sqrt[n]{-4} = \sqrt[n]{4} \cdot \sqrt[n]{-1}$; atque $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (p. 108).

2do. Radix pure imaginaria exprimitur (pro $P \neq 0$) per $\sqrt[n]{-P} = \sqrt[n]{P} \cdot \sqrt[n]{-1}$; atque $\sqrt[n]{-1}$ (pro a, b , realibus quoad $+1$) potest per $a + b\sqrt[n]{-1}$ exprimi (p. 108 usque 110, prima tantum Trigonometriae elementa requirens). Nempe p. 109 radices n ti gradus tam ipsius $+1$ quam ipsius -1 exhibentur omnes, numero n . Et (pag. 110) exemplis illustratur.

Hinc (item p. 110) si $\sqrt[n]{P}$ sit p , erit $\sqrt[n]{-P} = p(a + b\sqrt[n]{-1})$; (ubi error ita corrigendus est).

$$\sqrt[n]{-P} \cdot \sqrt[n]{Q} (=) \sqrt[n]{-PQ} \text{ (pag. 111, 112).}$$

$\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{C} \dots = \sqrt[n]{ABC}$ (etsi imaginaria adfuerint).

At si id tantum constet, quod $x = \sqrt[n]{P}$, et $y = \sqrt[n]{Q}$; ex eo $xy = \sqrt[n]{PQ}$ tantum sequitur.

3tio. Si $\sqrt[n]{a} = x$; est $x = \sqrt[n]{a}$ sed non $(=) \sqrt[n]{a^n}$ atque si $x = \sqrt[n]{a}$, est $x = \sqrt[n]{\sqrt[n]{a^n}} = \sqrt[n]{a^n}$; et hinc $\sqrt[2.5]{-1} = \sqrt[5]{\sqrt{-1}} = \sqrt[5]{-1}$, atque $(-1)^{\frac{1}{2}} = \text{sed non } (=) (-1)^{\frac{2}{4}}$ (pag. 112, 113).

De elevatione imaginariorum. [(a pag. 113 usque 118).

4to. Quaestio ad $\sqrt[n]{-1}$ redit. Est vero $2n$, aut potentia ipsius 2 integra, aut factum e tali, et

numero impari; $\sqrt[p]{-1}$ nonnisi ad $m \cdot 2^p$ elevatum (pro m integro) dat reale, etquidem $+1$ pro m pari, et -1 pro m impari. (p. 113).

5to. Etiam si $p, q, r \dots$ potentiae integrae ipsius 2 fuerint; $\sqrt[p]{-1} \cdot \sqrt[q]{-1} \cdot \sqrt[r]{-1} \dots$ nullum reale dat. (p. 114).

6to. Radices exponentis 2^n ipsius -1 , eadem sed via a pag. 108 diversa, item sub formam $a + b\sqrt{-1}$ venientes, exhibentur (p. 115 --- 118).

7mo. *Pure imaginaria a realibus, nonnisi determinatione (uti $\oplus$ et $\ominus$) differunt; nec scientia, quae praecisione evidentiaeque gloriatur, meris imaginibus nullo originali gaudentibus contenta esse potest.* (p. 118) *Et aequae visibiles sunt, etsi imaginarium in exponentem ascendat* (p. 168). *Exemplum quo in Geometria visibilia fiunt imaginaria, exhibetur* (p. 177, 7mo).

De regulis additionis, subtractionis, multiplicationis, divisionisque, quantitatum complexarum (etsi imaginaria adfuerint). (a p. 118 usque 130).

Regula additionis traditur pag. 118. Quod hoc pacto (*ubi ex errore pactor scriptum est*) summa quaesita prodeat; demonstratur prius de realibus pag. 119, tum etsi imaginaria adfuerint pag. 120, 121.

Subtractio demonstratur pag. 122. Quod oppositum subtrahendi ita dicto minuendo addendum sit, demonstratum est (pag. 26).

Multiplicatio demonstratur (p. 122 --- 126).

Divisio demonstratur (p. 126.).

Exempla quaedam.

7mo. $(a+b)(a+b)$, et $(a-b)(a-b)$; dein $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$; $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$; $[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$, (pag. 127). Et ibidem 8vo. demonstratur summam qualiumvis realium et pure

imaginariorum, per qualemvis ejusmodi summam divisam, dare quotum.

$$9^{\text{no.}} \quad \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2} \right)^3, \text{ seu } \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \alpha \right]^3$$

(pag. 128), ubi α radicem ex -3 denotat sensu (p.108).

$$10^{\text{mo.}} \quad \text{Si } a\sqrt[p]{P^n} + \frac{1}{b\sqrt[q]{Q^m}} \text{ multiplicandum sit}$$

$$\text{per } b\sqrt[q]{Q^m} - \frac{1}{a\sqrt[p]{P^n}}; \text{ erit factum } ab\sqrt[pq]{P^{nq}Q^{mp}}$$

$$= \left[\frac{1}{ab\sqrt[pq]{P^{nq}Q^{mp}}} = (ab)^{-1} P^{\frac{-nq}{pq}} \cdot Q^{\frac{-mp}{pq}} \right]; \text{ (pag.}$$

128, ubi error ita corrigendus est). Unde etiam

$$\text{regula liquet; nempe } a\sqrt[p]{P^n} \cdot b\sqrt[q]{Q^m} = ab\sqrt[pq]{P^{nq}Q^{mp}}.$$

11mo. Modus factorem signo $\sqrt{}$ praepositum introducendi, aut illum qui signo subest, educendi (pag. 129).

$$12^{\text{mo.}} \quad A\sqrt[p]{P^n} : B\sqrt[q]{Q^m} = \frac{A}{B} \sqrt[pq]{P^{nq}Q^{mp}} \text{ (ibidem)}$$

13tio. Divisio ipsius $x^n - 1$ per $x - 1$, et 14to. ipsius 1 per $1 - x$. Et

15to. Hinc *summa seriei geometricae*, et casus ubi formula summae fit $\frac{0}{0}$; tum limes sum-

mae, si exponens < 1 sit, nec non complementum quoti in exemplo posteriore (pag. 131 et 132).

16to. *Seriei Arithmeticae terminus generalis et summa*. Exgr. numerorum imparium summa usque ad n inclusive, est n^2 (pag 132).

18vo. Si $(a+b)$ per se multiplicatum item per $a+b$ multiplicetur, atque hoc continuetur, donec $(a+b)^n$ fiat: quaeritur productum (p. 134).

Transformatto ipsius $(a+b)^n$ in $(1+\frac{b}{a})^n \cdot a^n$.

Et simili modo tollitur quivis factor e quovis termino binomii ad exponentem elevati (p. 134).

Demonstratio binomii pro n integro 4^{vo} (p. 135 --- 137). *Alia demonstratio* (qua etiam numerus combinationum exhibetur) (pag. 137. --- 140).

Demonstratio formulae binomialis pro exponente qualivis, (adhucdum excluso imaginario), a pag. 141 usque 150. Prius lex qua terminorum signa pro $+x$ et $-x$ cum $+e$ et $-e$ combinatis prodeunt, exponitur; tum *exponente coefficientis* ab *exponente seriei* distincto, demonstratur seriem ejusmodi, pro $x < 1$, ad limitem tendere, atque limitem esse $(1+x)^e$.

6^{to}. Si $x > 1$; tum $(1+x)^e$ ita exprimi nequit (p. 151 et 152). Pag. 152 in linea suprema post 1 signum $-$ loco $-$ esse debet; atque videatur inferius pag. 300; ita pro $x = \pm 1$ videatur (pag. 303 et 304).

7^{mo}. Aliquid *de seriebus infinitis*, quarum *incrementa terminorum* ~ 0 , cum exemplis quibusdam (p. 152, 153).

8^{vo}. Si $\frac{n}{m} \sim q$; de $(a+b)^q$ quoque valet formula binomialis.

9^{no}. *Etsi binomium imaginarium contineat*, valet (p. 156).

10^{mo}. Si *exponens binomii vera fractio* $\frac{n}{n+1}$ sit, formula coefficientis pti (p. 157).

De Logarithmi expressione per seriem, et potentiae logarithmiquae conceptu sublimiori, atque quantitatis imaginariae ascensu in exponentem (a p. 157 usque 178).

Si in $(1+x)^n$, ponatur $x = \frac{1}{m}$, atque $n \sim \infty$;

tum $\frac{n}{m+1} \sim 0$. At

1mo. Si etiam $m \sim \infty$, et ab n certo modo dependeat; ex gr. sit $m=n$; tum $(1+\frac{1}{n})^n$ gaudet certo limite, in posterum e dicto, *basi logarithmorum*, qui *naturales* vocantur. Etsi $(1+\frac{1}{n})^n$ ad q elevetur, series quae prodit, $\sim e^q$ (p. 158, 159).

2do. Etiam e quantitate reperitur logarithmus (p. 159 --- 160).

3tio *Modulus systematis logarithmici* reperitur. (p. 162).

Si vero *duae bases* fuerint B et C, et log N quoad B sit b , ac log N quoad C sit c ; est $\frac{b}{c}$

$$= \frac{\log C}{\log B}$$

Log 0 = $-\infty$ (pag. 163).

Porro si in serie ipsum e^{cb} (per praec.) exprimente, substituatur $\alpha+\beta$ aut $\alpha-\beta$, aut $\alpha\beta$, vel $\frac{\alpha}{\beta}$,

prius pro α, β realibus; (p. 163), tum etsi imaginaria contineant (p. 164 --- 167); animadvertitur, has series analogis subesse operationibus, ac si exponentes ipsius e reales essent; generaturque *conceptus potentiae logarithmique* (*sensu sublimiori*) (pag. 167, 168):

Logarithmus realis hoc sensu, *quantitati* $-vae$ *haud competit* (p. 169), *sed elementaris competit* (p. 170).

Datur pro quibusvis realibus A, B; tale; x , ut $x = \log(A+B\sqrt{-1})$. (pag. 170 --- 173).

Ubi etiam *series sinum et cosinum arcus* *ntupli exprimens exhibetur*. Et si $K(\cos \alpha\sqrt{-1} + \sin \alpha) = A+B\sqrt{-1} = e^{\alpha\sqrt{-1}+k}$ (pro A, B, K, k , et α realibus); tum $K^2 = A^2 + B^2$ (p. 172 et 173).

Logarithmi imaginarii, quantitatis —vae innumerabiles (p. 173).

Pro quovis K $\times$ *vo datur tale k, ut* $e^k = K$ (p. 174 ubi pro Fig. 17 legi Fig. 17 * debet).

Exempla. 1mo. Logarithmi ipsius 1 innumerabiles, inter quos solus zerus est, realis.

2do. $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$, et $\pi\sqrt{-1}$ est unus logarithmorum naturalium ipsius -1 .

3tio. Valor ipsius $e^{\sqrt{-1}}$.

4to. $\sqrt{-1} = e^{a\sqrt{-1}}$, et $a\sqrt{-1} = \log nat \sqrt{-1}$.

5to. Valor ipsius $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ (pag. 176).

6to. Quid per $\cos a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$, et

$\sin a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ intelligatur (176, 177, 456)

7mo. *Applicatio certa imaginariorum ad Geometriam* (p. 177).

8vo. $\log -2 - \log -3$, certo sensu $= \log \frac{-2}{-3}$

$= \log \frac{2}{3}$ (ibidem).

III. CORONA arboris Arithmeticae incipit a §. 36. p. 178, et desinit in hoc tomo pag. 442.

Functio, variabilis, constans (p. 178). Rami in quos corona dividitur p. 179, 180).

Dein 1mo. *Functionis divisio*, (p. 180, 181) in *algebraicam, transcendentem, absolutam*; 2do. *designatio functionum* (p. 181 --- 183), (sed in hoc opere, nonnisi ea occurrunt, quae in *Explicatione signorum* reperiuntur).

3tio. Si in $(A)x$ substituatur $x+i$, et quaeratur valor functionis $(A)(x+i)$ (*Probl. Taylorianum*); et porro comparetur augmentum functionis cum augmento simultaneo ipsius x ; pervenitur ad *rationem ultimam augmentorum evanescentium*.

juxta NEWTONUM; nempe si $\frac{(A)(x+i)}{i} \sim (A)'x$,

dum $x \sim 0$, (adeoque priusquam $=0$ fieret). Insignis limes iste est, e quo et calculus differentialis deduci potest, (p. 183). Sed

4to. Evidentius simpliciusque fit: si (p. 184) ipsi x (p. 184, *ubi linea suprema, x pro i legi debet*), substituatur prius 0, dein $\dot{x}$, id est $\frac{x}{n}$, tum

$2\dot{x}$, $3\dot{x}$ &c, atque valoribus prodeuntibus post se invicem positis. quilibet cum sequente comparetur (quoad incrementum); et incrementa ista novam seriem formant: seriei hujus summa in aperto erit; atque si

5to, Alia series occurrat, e qua eodem modo pro iisdem x et n deductae simili modo seriei, termini t et T eidem $m\dot{x}$ (pro quovis eodem m) respondentes, aut sint aequales, aut $\frac{t}{T} \sim 1$, pro $n \sim \infty$; facile patet, summam utriusque esse aequalem, et si unius functionum valor notus sit, et valorem alterius innotescere. (p. 184 --- 186).

6to. Etsi serierum e duabus functionibus derivatarum termini, certae parti ipsius x (sed quae ~ 0) respondentes non aequipolleant (p. 187 -- 189, et 269); valet in praec. dictum.

7mo. Datur pro utvis magno N integer n idem pro omnibus m , ut $(u)m\dot{x} - (a)m\dot{x} < \frac{(a)m\dot{x}}{N}$ (p. 188, 189).

8vo. *Integrale, differentiale* (p. 189 et 269). *Limites integrælis, differentiale verum seu elementum, functio summatrix, differentiale strictius, vel strictum*, per d praepositum denotatum, ut *coeff. differentialis seu derivata* per d (p. 190, 191).

10mo. Si functio absoluta, cujus valor quaeritur, non in concreto, sed nonnisi per functionis

limitem detur: hunc dari demonstrandum est, (ut sit pag. 230); utcumque sit, saepe differentiale functionis $(A)x$ quaeritur, per duas functiones tales $(U)x$ et $(U)'x$, ut $(U)m\dot{x} - (U)(m-1)\dot{x} < (A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x} < (U)'m\dot{x} - (U)'(m-1)\dot{x}$, et $\frac{(U)m\dot{x} - (U)(m-1)\dot{x}}{(U)'m\dot{x} - (U)'(m-1)\dot{x}} \sim 1$; si jam $\frac{(U)m\dot{x} - (U)(m-1)\dot{x}}{(B)m\dot{x} - (B)(m-1)\dot{x}}$ quoque ~ 1 , et simul $\frac{(u)m\dot{x}}{(U)m\dot{x} - (U)(m-1)\dot{x}} \sim 1$, atque $(u)m\dot{x}$ gaudet forma differentialis stricti: habebitur differentiale ipsorum $(A)x$ et $(B)x$ commune (p. 191).

11mo. Differentialia aequipollentia, functionibus aequalibus, et functiones aequales differentialibus aequipollentibus gaudent. Idem de derivatis; atque nec integralia differentialium aequipollentium praeter constantem differre possunt (p. 191, 192).

12mo. Variabiles plures $x, y, z, \dots$; et pro variabili absoluta x denotationes $y_*m\dot{x}, z_*m\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ (p. 192, 193); differentiale, derivata, functionis plurium variabilium (p. 194).

13tio. Differentialia et derivatae quoad variables diversas accepta (p. 194).

14to. *Differentialia purum, derivata pura*, $\int \dot{z}(\alpha)z$ seu $\int (\alpha)z$ (quoad z) est $= (\alpha)z \dots$ &c. (p. 194, 195).

15to. Differentialia et derivata partialis. Derivata *nta*, differentiale *ntum* (p. 195).

17mo. Quotvis fuerint variabiles u, v , ab eadem absoluta x (saltem simultanea positione) dependentes; quarum differentialia sint $(b)x, (c)x$: quoad quasvis variabilium $u, v \dots$ accipiantur differentialia $(b)'x$ ipsius u , $(c)'x$ ipsius v , &c. seriei incrementorum summa eadem prodit. Ita $(b)x.(c)x$,

et $(b)'x \cdot (c)'x$, pro terminis generalibus accepta summam eandem dant; pariter $(b)x + (c)x$, et $(b)'x + (c)'x$. Unde etiam differentiale seriei convergentis $(B)x + (C)x \dots$ est summa differentialium functionum singularum. Derivataque summae seriei quoad eandem variabilem accepta, est summa derivatarum singularum, item quoad eandem variabilem acceptarum (p. 195, 196).

In quovis termino generali seriei incrementorum dictae, cuivis quantitati substitui ei aequipollens potest, si nonnisi summa spectetur. Atque hinc pro reperiendo integrali, licebit differentiali aliud aequipollens differentiale purum, quod integrari queat, substitui. Idem de derivata (p. 197).

18vo. *Exempla* faciliora pro Tyronibus (primis elementis imbutis) *applicationis theoriae ad Geometriam et Mechanicam* (a pag. 197 usque 242); ubi §. 37, pro exemplis supposita demonstrantur, et quaedam inde deducuntur, imo *quoad curvas etiam primaria* exponuntur.

1mo (usque 5to). Supponuntur (§. 37 demonstrata), exponunturque certarum functionum absolutarum simpliciorum differentialia derivataeque, adeoque et horum integralia (praeter constantem) (pag. 197 --- 203).

5to. Si duae series incrementorum (ejusmodi ut dictum est) fuerint, et unius summa A , terminus generalis $(a)m\dot{x}$, alterius summa B , terminus generalis $(b)m\dot{x}$ fuerit; atque $\frac{(b)m\dot{x}}{(a)m\dot{x}} \sim \beta$; tum $A = \frac{B}{\beta}$ (p. 198).

6to. Ex $d \log u \equiv \frac{\dot{u}}{u}$, est $u d \log u \equiv \dot{u} \equiv du$; per quod functio, etsi logarithmus in exponente sit, differentiari potest; atque [hinc $\int a^{ax} = \frac{1}{a \log a} \int a^{ax} \log a$ &c (199), ubi linea sequ. $\int a^{ax} \log a$ legi debet.

7mo. p.199 Si *derivata*, fuerit summa terminorum numero certo, ad exponentem $\mp$ vum (*integrum*, per errorem, omissum), adeoque potentia haec constet e certo umero terminorum, qui singuli integrari possint; erit summa integralium terminis singulis respondentium, integrale derivatae datae. Si vero derivata fuerit series convergens ∞ ta formae

$Ax^a \mp Bx^b \dots$ exponente ab aliquo incipiendo unitatem superante et semper crescente; summa integralium terminorum singulorum, integrale totius derivatae, et pariter series convergens erit.

Litterae puncto insignitae, eadem sine puncto, signo d praeposito, imo et quodvis aliud, quoad quamvis variabilium expressum, ei aequipollens, substitui potest; quo pacto derivatae saepe *purae* (*salvo integrali*) reddi possunt. (p. 200) nempe si $z \equiv vi$, est $\int p$ (quoad z) $= \int pv$ (quoad u)

Eadem pag. 200, *derivata areae* in plano, *derivata lineae in plano*, *soliditatis per revolutionem lineae* dictae generatae, referuntur. *Derivata lineae* in genere est (p.268).

Pag. 201. *Derivata distantiae centri gravitatis* a certo plano quoad abscissam x ; atque pag. eadem, et 216 --, (etiam p.226 referuntur differentia- lia motum rectilineum concernentia, denotationibus pag. 193 adhibitis).

P. 204. VIII. 1mo. $\int \dot{v}$ sive $\int 1$ (quoad v) $= v$.

2do. Casus differentialis $-vi$, atque ubi valor ipsius $(A)x$ plane pro $x=0$ quaeritur.

3tio. De casu, ubi $(A)0 = \infty$.

4to. De casu ubi differentiale (nempe terminus seriei generalis) pro $x=a$, id est terminus seriei ptus, 0 vel ∞ fit; (puncta discreta inferius pag. 269 ---).

P. 205. IX. 1mo. Si ordinata $y=ax^p$; area $= \int y$ (quoad x) $= \frac{a \cdot p+1}{p+1}$ (nisi $p=-1$).

2do. Area inter hyperbolam æquilateram, et q (p. 103), atque ordinatam y et asymptotam. Soliditas per revolutionem circa asymptotam orta $=\pi$. Exemplum pro diversis functionibus summatricibus eidem differentiali respondentibus, quae tamen cum constantibus concernentibus eadem integralia praebent. (p. 205 et 206); ubi linea 3^{ia} a calce pro ab legi af debet.

P. 207. (usque 209) Areae dictae hyperbolicae sunt logarithmi naturales abscissarum e centro acceptarum: ubi (p. 207, 4^{to}) demonstratur, derivatam (quoad z) ipsius $\log.\text{nat } z$ esse $\frac{1}{z}$, (imo p. 210, etsi z non ipsa variabilis absoluta, sed qualisvis ejus functio fuerit). Modus constantem in simili casu quaerendi. De logarithmis abscissarum x varum (p. 209 et 210).

P. 211, 5^{to}, Soliditas paraboloidis, ellipsoidis, hyperboloidis.

6^{to}. Si u et v derivatae quoad eandem variabilem sint, et $\frac{u''}{v} = k$, est $\int u = k \int v$. Applicatio.

P. 212. 7^{mo}. E derivata arcus circuli quoad tangentem (p. 309 deducta) series Leibnitiana peripheriam exprimens. (vide etiam p. 303).

P. 213. Longitudo arcus circuli per integrationem formulae (p. 200).

P. 214. *Catenaria*, ejusque rectificatio.

P. 214. Exemplum integrationis, derivatae superficiei per revolutionem lineae circa axem ortae.

Exempla Mechanica (a pag. 215 usque 242).

P. 215 et 216. *Conceptus vis momentaneae, et constanter agentis*.

P. 217 usque 219. Demonstrantur differentialia (p. 201).

P. 219. . . 223. Exclusa prius medii resistantia, et vis w prius ab s tum a t dependens. *Motus difformiter acceleratus* ex gr. per gravitatem.

P. 221. Formula praecc. velocitatem etiam ultra centrum exhibet.

P. 222. Altitudo competens celeritati minimae, qua globus de superficiei terrae verticaliter explodendus esset, ut nunquam redeat, radio terrae aequatur.

P. 222 et 223. Si vis w functio temporis fuerit.

P. 223 usque 229. Si vis w functio velocitatis v fuerit. *Prisma resistantiae*, exponens *resistantiae*. Tempus, celeritas, spatium in medio uniformiter denso. Applicatio ad corpora labentia.

P. 229. usque 234. Conceptus *centri gravitatis geometrici*. Functionemque (ut dictum p. 191) est) per limitem datam, valore absoluto gaudere, et ejus differentiale (p. 201) esse demonstratur.

P. 234 usque 237. *Exempla*: centrum grav. segmenti parabolae, paraboloidis sphaerae, arcus circuli, segmenti circuli, superficiei sphaericae pro certa abscissa.

P. 237. *Superficies per revolutionem circa axem generata* = *lineae*, cujus revolutione generata est, per distantiam centri grav. ab axe multiplicatae. *Soliditas* = *areae*, per peripheriam centro grav. areae descriptam multiplicatae.

P. 238 usque 241. *Centrum oscillationis*, et *centrum percussionis*.

P. 242 usque 268. Demonstrantur *formulae differentiales* (p. 197 . . . suppositae (praeter ea, quae pag. 207 . . . 217 . . . 229 . . . demonstrantur).

I. Si $u = (A)x$, est $d(u^k)$ quoad $u) = k u^{k-1} \dot{u}$, &c. Datur vero pro quovis N tale n idem pro omnibus, ut requiritur (p. 244 . . .).

II. $duv = u dv + v du$, pro $u = (A)x$ et $v = (B)x$; $d(\frac{u}{v})$ autem $= \frac{v du - u dv}{v^2}$ &c.

III. Si arcus x circuli sit variabilis absoluta: *differentialia*, *sinus*, *cosinus*, *tangentis* (p. 250 usque 253); quoad sinum versum (vide p. 327)

Derivata functionis trigonometricae, unius quoad aliam (p. 253), (ubi pro sc^2 legi — sc^2 debet). Ibidem et p. 254 differentiale arcus quoad functiones trigonometricas deducitur.

P. 254 usque 263. IV. Si pro abscissa x , arcus ipsi x repondens s , et corda c sit; fit

$\frac{s}{c} \sim 1$, si $n \sim \infty$. Curva, (concava, convexa), *tangens*, *subtangens*, *normalis*, *subnormalis*. Curva gaudet tangente in quovis puncto; tangens cum ordinata non coincidens secatur ordinatas omnes &c. . .

P. 260 usque 264. *Limes summae cordarum*, (qui per longitudinem arcus intelligitur), utcumque sumantur cordae; idem est. *Differentiale*, et *derivata arcus*.

P. 264. *Differentiale areae*, et p. 265. *differentiale soliditatis per revolutionem generatorum*; item *differentiale superficiei talis pro curva concava*, et (p. 266) *pro convexa* &c. . .

P. 268. *Lineae cujusvis* (etsi non in planum cadat) *differentiale*, et *derivata*.

P. 269. Dum expressio differentialis pro certo $m \dot{x}$ (p. 205) fit 0 aut ∞ vel $\frac{0}{0}$; puncta certa discreta, singularia ob certas qualitates dicta.

P. 272 usque 285 Exemplis haec illustrantur. *Expressio tangentis*, *subtangentis*, *normalis*, *subnormalis*, *punctum flexus*, *cuspidis* 1mi, 2di ge-

neris. punctum multipulum, isolatum. Asymptota (p. 283 usque 286).

P. 286. VII. De $\frac{o}{o}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

P. 288. *De ordinatis ex uno puncto tanquam centro (vel polo) euntibus: spiralis Archimedeae et logarithmica*, (abscissa *u* in peripheria accepta).

P. 289 Theorema Taylorianum: 1mo de casu, quo ope theorematism binomialis demonstrari potest, 2do. Generaliter juxta Lagrange (a p. 291 usque 294); additis complementi finibus, intra quos contineri debet, *apud quemlibet terminum subsistere libuerit*. Prius pro una variabili, (p. 311 pro pluribus).

P. 294 usque 311 applicationes variae: *Complementum generale formulae binomialis* (p. 295). Ibidem 4to de *facto e factoribus*, quorum numerus $\sim \infty$, (ut in formula binomiali).

5to. Applicatio ad $(1+x)^e$, pro $x = \pm 1$, et exponente $= 0$ et > 1 , (p. 299); pro $x > 1$ (p. 300)

6to. *Formulae ipsius* $(1+1)^e$, pro $e < 1$, complementum ~ 0 (301). 7mo (pag. 302) si e fuerit $=$ et > 1 , *complem.* $\sim \infty$; at ~ 0 semper, excepto si $e =$ et non < 1 sit (p. 303); nimirum 8vo si $e = -1$, series nullius valoris est.

9no. Hinc (ex pag. 212) *illustratio seriei Leibnitianae* ex $(1+z)^{-1}$ pro $z = 1$ deductae.

10mo. Pro $(1-1)^e$ valet (p. 304 usque 307). Pag. 307. animadvertitur, $(1-1)^{-m}$ exhibere *seriem arithmeticam ordinis* $(m-1)$ ti (p. 133).

11mo. Adhuc unum exemplum pro *facto e factoribus innumerabilibus*.

12mo. *Demonstratio criterii convergentiae Olivieriani*.

14to. p. 311 usque 314. *Taylorianum ad plures variables applicatum.*

P. 315. X. Applicatio Tayloriani ad *maximum minimumve. Exempla* (p. 316 usque 318).

P. 319. XI. usque 329. Applicatio Tayloriani ad *radium curvaturae*; e quo conceptus *evolutae, evolventisque* nascitur. *Linea l lineam L tactus ordine pto tangere* quando dicitur? (p. 319) *Applicatio ad rectam, circulum &c. Radius osculi; exempla* (p. 325 usque 327) *radii osculi, sectionis conicae, cycloidis. Evoluta cycloidis cycloidi evolventi aequalis est* (p. 328). *Cur filum in tangente cycloidis tensum Hugenus applicavit* (p. 329)

P. 329. XII. usque 342. *Principia et applicatio calculi variationum. Theoria, duplici modo* (p. 330 usque 333, et 340). *Exempla: longitudo minima datam aream claudens* (p. 333); *Brachystochrona* (p. 337).

P. 342. §. 38. *Ramorum coronae arboris unum constituunt aequationes* (determinatae, indeterminatae). *Radix aequationis unde dicitur?* (p. 342). *Non quaevis petito satisfacere debet* (p. 343). *Ordinatio aequationis, et reductio ad formam rationalem* (p. 344, 345). *Resolutio generalis aequationis ordinatae, 1gradus 1mi, 2di, 3tii, 4ti,* (p. 346 usque 350).

P. 351. *Quomodo resolutio aequationis $x^{11} - 1 = 0$ cum constructione geometrica polygoni regularis 17 laterum cohaereat?*

Exempla (p. 351 usque 359), plerumque scitu necessaria.

Exemplum etiam pro conjunctione impossibili (p. 357 ubi inferius pro p. 358 legi 356 debe!).

P. 359. §. 39. *Transformationes aequationum.*

P. 361 usque 363. *Si aequatio n gradus, una radice* (etsi imaginaria) *gaudeat: radicibus nume-*

n , (nec pluribus) gaudet. Idem modo communi (p. 363).

P. 364 et 365. E praecedente, lex coefficientium in aequatione.

P. 366. Si radix aequationis (ordinatae et ad coefficientes integros reductae) commensurabilis sit; numerus integer est: unde modus inquirendi, num radix talis detur, et quae sit.

P. 367 usque 373. Si radices omnes reales sint; tot signorum mutationes sunt, quot radices $\pm$ vae, et tot successiones signorum aequalium, quot $-$ vae.

P. 374 usque 379. Modus radices aequationum altiorum reales, (si dentur), etsi incommensurabiles sint, per approximationem quaerendi (methodo Newtoniana, aut Lagrangeiana).

P. 379 usque 381. Si plures fuerint incognitae, et totidem aequationes gradus lmi.

P. 381 usque 392. Demonstratio regulae ingeniosae a Bezout ab inductione datae

P. 392 et p. 416 usque 421. Aequatio indeterminata gradus lmi, per fractiones continuas.

Si A et A' inter se primi fuerint; tum $\frac{A}{A'}$

minimis terminis exprimitur; atque si $\frac{A}{A'} = \frac{\alpha}{\alpha'}$

et $Ak = \alpha$; tum et $A'k = \alpha'$, et k integer est. (p. 393). Si $N = ab \dots$, et $N, a, b \dots$ singuli perse primi sint; tum N alia factorum imagine exprimi nequit (p. 394). Hinc si primorum a, b quilibet seorsim metitur numerum N ; eundem N et productum e quibuslibet eorundem primorum metitur; et conversim integrum N integer P non nisi ita metitur; si P factoribus primis ita exprimi queat, ut imaginis, qua N , factoribus primis exprimitur, partem constituat. (p. 395). Quivis numerus primus sub formam $6n \pm 1$ venit, sed non

quavis numerus hujus formae primus est. E dictis *divisor communis maximus* quotvis integrorum; necnon *minimus eorum*, quem *datorum quavis metitur*: posterius ad *denominatorem communem minimum quaerendum* applicatur (p. 396); prius *alia methodo* etiam fieri potest (p. 397).

P. 398 *Fractio continua vulgaris. Approximantium expressio. Differentiae approximantis cujusvis a sequente.* (p. 400)

P. 401 usque 404. *Differentiae approximantium a primitiva semper decrescunt*, et quaevis *approximans terminis minimis expressa est* &c.

P. 405 usque 407 *Fractio continua formae generalioris*; atque hujus *evolutio in seriem. Series Brounkeri cum Leibnitiana* conveniens.

P. 408 usque 411. *Applicatio fractionum continuarum ad resolutionem aequationis quadratae. Regula fractionem approximantem quamvis pro valore radice quantovis propius exprimendi. Exempla* (p. 411 et 412).

P. 412 usque 414 *Resolutio aequationis quadratae per* $x = \sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a} \dots$

P. 414.
$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a} \dots \sim \sqrt[n]{a^{n-1}}$$

P. 416 usque 421. *Resolutio aequationis indeterminatae per priora*: additis aliquot exemplis, inter quae est, quod si *peripheria per quemvis priorum a, b ... dividi* (constructione geometrica) possit; etiam per factum e quibusvis eorum dividi potest, si nullus eorum, praeter 2, pluries quam semel occurrat).

Si numerus gradus aequationis impar fuerit, aut pro numero gradus pari, terminus ultimus — fuerit; aequatio radice saltem una reali gaudet, (p. 422 usque 424, ubi ad finem lineae 6tae pro ω legi eo debet).

P. 425 usque 436. *Demonstratio GAUSSiana, dari radicem aequationis.*

P. 437 usque 441 *Primaria de seriebus; de coefficientibus pro functionis valore $= 0$; et modus functionem fractam in alias formae requisitae discernendi.*

GENERALIS CONSPECTUS GEOMETRIAE a pag. 442 ad finem tomi I mi].

Spatii conceptus e mundo externo per abstractionem (p. 442): punctum spatiale, punctum temporis (p. 19). Ubivis in spatio datur punctum spatiale; et omnia puncta spatialia sunt aequalia. Superficies, linea, forma, sectio (p. 443).

P. 444. *Reditus in mundum externum, corpus idem considerando in diversis locis: constructio mobilis geometrici; atque cum hoc reditus in spatium purum; axioma congruentiae. Motus geometricus.*

P. 445 et 446. *Conceptus motum geometricum respicientes. Variarum quaestiones: atque hinc (a p. 446 usque 448) tres operationes primitivae,*

P. 448. *Nova quaestione exorta, fit conceptus per, A unicum ipsius B, denotatus; exemplis illustratur.*

P. 449. *Passu ad omne, oritur conceptus rectae, planique; additis analogis quibusdam definitionibus.*

P. 451 *Suppositis prius recta planoque: e pluribus rectis ex eodem puncto, oritur pyramis (sensu lato); et accedente multiplicatione, conceptus similium, et homologorum. Ibidem voces plaga, regio, internum explicantur.*

P. 452. *Aliae definitiones similium. E prima definitione contrarie aequalia, geometricae aequalia; Exempla (a p. 452 usque 455).*

P. 455 usque 457. *E, pluribus rectis punctum idem p commune habentibus, via unius circa p donec*

redeat; aut in plano facta, aut non: si prius, oritur *circulus*, et conceptus concernentes, (*definitiones functionum trigon.*). E posteriori oritur *forma apicata*, et hinc conceptus generalis *anguli*, qui certo respectu quantitas fit.

P. 458 et 459. Forma sine angulo, dicitur *fluens*, et si haec etiam *quantitas* (nempe absoluta) sit, dicitur *uniformis*. *Fluens* sine recta planove, dictus *curva*. *Fluens* cum recta planove, parit *tangentem*, et haec *perpendicularitatem*.

P. 459 usque 462. *Rectarum pyramidem generantium puncto communi remoto in ∞* , oritur *prisma*, (sensu lato). Atque hinc *aequifluens*, *lineae primario aequiesitas*, et conceptus *generalis parallellismi* (*directi et inversi*).

P. 462. *Descensus in planum: figura*; rectilineae species quaedam, quo pertinet (pag. 9). Quid per *geometrica constructione perficere*, intelligatur (p. 463) sensu tacito Euclidis.

P. 463. *Constructio geometrica, sensu stricto*, et *lato*: nempe inferius demonstrando, inter quaevis 2 puncta esse rectam; si quid, sine conjunctione operationum primivitarum, certo numero duarum priorum (omnibus ad planum restrictis) perficiatur, *geometrice* (*sensu stricto*) *construi* dicitur; si vero non restringatur ad planum, (*admissa operatione 3tia quoque, quod, per errorem omissum, addi debet*), *geometrice* (*sensu lato*) *construi* dicitur (p. 464).

P. 464. In plano quae tractantur? (Annotatio de trigonometria sphaerica) (p. 465).

P. 465. Reditu in abyssum spatii; quae tractantur prius?

Ibidem §. 12 usque 468. *Conjunctio operationum*.

P. 468. Formae quomodo fiunt quantitates *respectivae*, et *reductae*. Ibidem usque 476. *Generatio certae lineae, quam rectam esse* (p. 578) *demonstratur*.

P. 476 usque 479; *Inter quaevis 2 puncta spa-*

tii datur linea ejusmodi: exit continuata e quavis sphaera; congruentibus 2 punctis necessario congruunt (et continuatae); neque a puncto ad punctum una recta plures dantur. Est quoque recta, quantitas absoluta, et potest in se porro moveri.

P. 479 usque 482. *Plani generatio.* Si recta duo puncta in plano habeat, tota incidit. Per quaecumque tria puncta datur planum, nec plura dantur, (si 3 illa puncta non in recta sint). Planum per quamvis rectam in ea situm in duas plagas aequales dividitur.

P. 482. *Formae angulares duarum rectarum congruunt, si arcus e verticibus radiis aequalibus descripti aequales sint; et summa angulorum e puncto rectae (in eadem plani plaga), est dimidiae peripheriae (id est 2 rectis) aequalis; et conversim, duae rectae sunt in eadem, si summa angulorum e puncto utrique communi in eadem plani plaga sit $= 2$ rectis; sunt quoque hinc omnes formae anguli recti aequales.* Descripto (apice angulorum pro centro accepto) circulo; in omnibus dictis, nisi ita esset, pars $=$ toti fieret.

P. 482. *Planum est quantitas (nempe absoluta).*

Ibidem usque 487. *Sectiones rectarum planorumque inter se, atque planorum cum sphaera.* Recta cum recta (aut plano), nonnisi punctum, planum vero cum plano, aut nihil, aut rectam, commune habet. Recta per planum transit in spatii plagam alteram. Si planum P cum plano Q punctum commune habeat; sectio recta est; transitque P per Q in plagam alteram. Ad rectam, planumve datur e quovis puncto eorum ad ea $\perp$ ris., (et e quovis puncto etiam extra illa datur ad ea $\perp$ ris. Si recta ad duas plani rectas $\perp$ ris fuerit, erit ad omnes in eodem plano per punctum sectionis ductas, adeoque ad planum ipsum $\perp$ ris (p. 483).

Planum p est $\perp$ re ad planum P, si $\perp$ ris ad P in p cadat. (p. 484). Anguli verticales tam rectarum, quam planorum aequales sunt (ibidem); idem

tamen et modo communi evidens est, si formarum angularium aequalitas pro arcubus aequalibus demonstretur (482).

P. 485. *Circulus maximus in sphaera; angulus circulorum maximorum fit quantitas respectiva. Arcus circulorum maximorum, ad arcum ab circuli maximi L_{res} , in extremitate quadrantum (polo dicta) concurrunt.*

Si plana P et Q se invicem ad angulum rectum secant in recta ab; e quovis puncto p ipsius P ad ab demissa L_{ris} , est L ad Q; atque e quovis puncto ipsius ab erecta ad Q L_{ris} , in P cadit.

P. 486. *Si duo plana P et p se invicem secant, sint ad 3tium Q L_{ria} : sectio priorum est L_{ris} ad Q.*

Angulus rectae cum plano, fit quantitas respectiva (p. 480); atque est minimus omnium (nisi rectus sit), quos recta eadem, cum recta quacunque plani per punctum sectionis ducta facit.

Ibidem usque ad finem, de planis rectisque se invicem non secantibus. Axioma Euclidean tria complectitur, quorum quodvis sufficit. (p. 487 et 488).

P. 488 usque 490. *Brevis disquisitio de theoria parallelarum: et Appendicis idea.*

P. 490 usque ad finem *tentamina eam demonstrandi olim facta.*

Appendix. Geometriam ab ea independentem absolutam exhibens.

Errata.

E R R A T A.

Pag. 1: in *Introductione*; ubi desideria aeterna, nempe *veritatis*, et *amoris* fraterni reciproci in eodem *Patre* uniti exponuntur; id est quae nulli tempori finito, nec ulli existentiae formae propria sunt, et notam Auctoris communis eandem referentes, nonnisi claritate potentiave differunt: vocabulum *bracchiis* per errorem omissum est.

Praeterea nec *beatitudo* definita est: sit igitur fas aliquot verba ex olim editis addere.

Quis est, qui reflectens, se infinitae caussae superiori subjectum esse non sentiat, eoque per se infirmus non refugiat? Certe si *nil admirari* rectum sit, in quantum effectus quilibet e sua causa promanat; *omne admirari* rectius est: quocunque enim sensus internos externosve porrigamus, sive cogitare nos, bonumque omnium velle simus conscii, sive ad voluntatis nutum moveatur corpus (unum aut millia simul), sive flos nocte apertus gemmam aurorae ferat; admiranda omnia, ad summe et denique solam admirandam, supremam omnium caussam inconceptibilem provocant, nobis infinite superiorem, attamen intus extusque ubique proximam.

Indicium beatitudinis esset; gratitudo ex omnium et singulorum gaudio suae existentiae resultans, caussam hanc communem dulci desiderio quaerens: quanquam et illi, cui inter ruinas templi quondam pulchrius nitente sole exstructi, nullum terrestre gaudium germinat, aut cujus idealibus aethereis disparentibus, quasi de coelo dejecti, et ex arida paradiso respicientis labentes lacrimae nullas amicas inveniunt; in moestissimas tenebras descendant candidi angelorum chori, de-

sertumque aeterna resonet laetitia — nec Deus infinitus ullibi magis appareat, quam ad pectoris vulneribus immeritis gementis solitudinem derelictam explendam—imo infinitus quidem ubique praesens, proximus ad lectum morientis sentiatur — Certe veluti terra, si oculis pro videndo sole destituta, sensu polleret, calorem attractionemque ejus persentisceret; simili modo sensus animae intimus de Deo testificatur, et omnes mundi ex immenso abyssu micantes annunt; ac suprema manu sacrosanctissima pectoribus imis inscripta, dummodo lux alma faveat, nec falsa spuriaque, generi humano inimica, mortales oculos obcoecet, ultro leguntur; lectaque e procellis temporaneis, ad aeternitatis tranquillitatem elevant.

Absoluta beatitudo vero (quae omnium et singulorum est), consisteret *objective* in eo, ut sub quovis tempore, et in quavis existentiae forma, omnes et singuli simul, ut infantes aeternitatis, ejusque certi haeredes, incrementum quam maximum capiamus; id est quo clariora fortioraque redamus, expleamusque in quantum fieri potest, aeterna desideria, temporaneis quoque satisfaciendo, in quantum priora requirunt (saltem permittunt).

Subjectiva autem est, dulcis omnium necessitas *objectivam* dictam semper volendi, sensusque coelestis, dum in almo veritatis die, gelidae individualitatis glacie undique soluta, omnibusque amore reciproco in brachiis infinitis Patris communis unitis, reflexione luminis calorisque divini ex omni in omne.

∞^{∞} , pulchritudo originalis absoluta aeternaque patefiet; adeo ut *pulchritudinis* hujus absolutae *desiderium* quoque aeternis adnumerari possit, (ut numero sacro trina sint), quamquam saepe tempore aeternitatem mentiente, splendida imago evanesceat, telam foedam post se relinquat.

ERRORES praeter eos qui operis ipsius sunt, partim *corectori*, partim *typographis* attribui possunt. *Ortographici* facile corriguntur: ut p. 11 esse pro ese p. 4 concinentibus pro concinnentibus, atque ex-

struitur pro extruitur, p. 337 Brachystochrona, pro Brachistochrona, p. 447 sphaera pro spaera, p. 443 indivellibilis pro indivillibilis, p. 411 scribere pro scribere, p. 106 expressionum pro expressiouum, p. 240 *isochronum* pro isochrorum. p. 273 nempe pro nem.

Maculae typographicae in plurimis locis, et quibusdam exemplaribus quoque, per se facile corriguntur: at sunt quaedam, quae propter artis heic defectum, in quibusdam exemplaribus non satis aut plane non expressa sunt; ex gr. pag 7. linea ultima, nonnisi a et resulta-; p. 150. $(1+x)^e$, p. 160 linea 6. $(1-2a)$, p. 170 linea 6 a calce, $B_1 \sqrt{-1}$, p. 324 linea 5 a calce, prima litera y est, at non in omnibus prodiit, p. 199, l. 10 pro l α lege $\log \alpha$.

Praeterea expressiones quoque in plurimis locis interruptae in sequentibus lineis continuantur: quod tam molestum est, quam claritati obest, sed aliter hic fieri non potuit. Ex gr. p. 108, 110 111, 112, 116, 117, 135, 137, 153, 157, 171, 172 &c.

In *indice* correctae sunt errata sequentia.

Pag. 22: (Vide Indicis p. IV). P. 39, 42, 45 et 46 (*I.* p. V).

Pag. 56 (*I.* VI). Pag. 73 (*I.* VIII. 10mo). Pag. 84 (*I.* IX).

Pag. 85 et 92 (*I.* X). Pag. 103 (*I.* XI).

Pag. 110. (*I.* XII ubi maculae typographicae delendae sunt)

Pag. 118 (*I.* XIII). Pag. 128 (*I.* XIV). Pag. 199 (*I.* XX).

Pag. 206 (*I.* XXII). Pag. 424 (*I.* XXVIII). Pag. 464 (*I.* XXX). Praeter haec

P. 24 Tab. I. Fig. 1. deleatur. Pro Fig. 3 quae ad p. 25 § 14 pertineret, illustrare etiam figurae 5 et 6 additioni inservientes possunt. Ceteroquin figuris omnibus adscriptae paginae sunt.

P. 38 linea 7, pro (a) lege $(a)x$.

P. 46 adde (Fig 7).

P. 56 linea 9 pro Fig. 3 legatur Fig. 2,

P. 61 reductarum pro reductorum.

- P. 89 linea 6 a calce, pro nm lege n^m .
- P. 95 linea 4, pro basi Q lege a .
- P. 110 linea 6 a calce, pro $\sqrt[m]{-P(=)}$ lege $\sqrt[m]{-P(=)}$.
- P. 111 ad lineae 16 finem, pro $=$ lege $(=)$.
- P. 150 linea 8 a calce, pro ex lege ex .
- P. 152 linea suprema, pro $(1-$ lege $(1-$
- P. 174 linea 8 lege Fig. 17 *
- P. 183 linea 3, pro $(A)x^3$ lege $(A)x^3$.
- P. 184 linea suprema, pro i lege x .
- P. 191 linea 3, post dicitur, adde per $d(A)x$ denotatum.
- P. 199 l. 2. a 7mo post † vum adde integrum.
- P. 201 linea 3 post x , pone parenthesim, linea 5 ante per, dele.
- P. 207 linea 6 a calce, pro ex lege ex .
- P. 211 linea 8 a calce, pro est , lege sit .
- P. 215 linea 9 ante X pone 10mo.
- P. 230 linea 5 a 1mo, lege, ultra c , nec intra vel in b .
- P. 253 linea 10 a calce, pro cs^2 lege $-cs^2$.
- P. 270 linea 12 a calce, lege $-2(b-x)\dot{x}$.
- P. 280 linea 4 a calce, pro x^4 lege x^4 .
- P. 309 linea 8, pro J^ν lege J^ν .
- P. 316 linea 1 a calce, pro Fig 49 legatur Fig 49 *
- P. 317 linea 4 a calce, pro Fig 50 legatur Fig. 50*
- P. 357 pro citata p. 358 legatur p. 356.
- P. 359 linea 11 adde, nempe $S=CT$ (p. 40) fit $=T$ pro $C=1$.
- P. 369 linea 12, pro $x^{\mu-\nu} + 2$ lege $x^{\mu-\nu+2}$.
- P. 424 linea 12 a calce, pro Fig. 54 legatur Fig. 55.
- P. 466 linea 2 adde, si punctum motum b fuerit.
- P. 479 linea 8 a calce, lege dimidietas adb .

In *arbore* linea 15 a calce (ad laevam); adde: ubi tamen sive functionem constituentia, sive functionis qualitas quantitasve quaeri possunt.

Reliquos errores haud animadversos, Lector ipse, rem ipsam semper prosequutus, e contextu benigne emendare rogatur. Notanda tamen sunt:

1mo. P.105 *Cartesio* nimium tribuitur: nescio quomodo mihi tanquam certe *Genio* ejus conveniens inhaeserat, quod nuper eum revolvens, haud reperi; quanquam sequentibus verbis pulchris praefationem suae *Geometriae* claudat: *spero posteris mihi gratiam habitum iri, non solum pro iis, quae hic explicui, sed etiam pro iis, quae consulto omisi, quo ipsis voluptatem illa inveniendi relinquerem.*

Montucla refert *Wallisium* prius exponentem integrum — vum introduxisse; sed opera ejus hic non habentur: quicumque introduxerit, et *fractos, imaginariaque* primus; adsunt, et (ut *numeratione*) grati iis utimur.

2do. P.57 demonstrationi aequalitatis parallelogrammorum Euclideae evidentiam parit; quamquam id etiam (per p. 55) fiat.

Interim ubique ubi fieri potest aequalitas terminata ostendenda: quod in parallelogrammis, Δ lis, et prismatibus rectilineis, altitudinibus basibusque aequalibus gaudentibus, (et pluribus aliis) facile fit. Priora ex inspectione Fig.17.III patent; idemque ad prismata (pro rectis parallelis plana parallela ponendo) facile applicatur. Nempe si $ea' \parallel AB$, et fuerint Δ la ABa et ABa' ; fiat $AE = EB$, et $EellaB$, et $Ee' \parallel Ba'$; positisque ΔAER in aeR , et Aef , in $a'ef$; parallelogramma $EBae$ et $EBa'e'$ secentur parallelis, in priori ad EE per aB ad distantias BE , in altero ad BE per Ee' ad distantias EE ; si BE non contineatur certies in Ba , patet esse $gh \parallel EB$. Eritque $A \doteq A$, $B + B' \doteq b + b'$, $C + C' \doteq c + c'$, $D + D' = d + d'$, $E + E' = e + e'$, $F = f + f'$. Unde partes omnes sibi invicem respondentes assignari patet; tam pro Δ lis ABa et ABa' , quam pro parallelogrammis $EBae$ et $EBa'e'$, tam altitudinibus aequalibus, quam basibus aequalibus gaudentibus.

PRO TYRONIBUS PRIMA VICE LEGENTIBUS
NOTANDA SEQUENTIA.

Praetereant a pagina 10 usque 16. Postea vero usque ad pag. 62 XXI nonnisi ea omitti possunt, quibus * praepositum est. Abinde usque pag. 74 12mo. sufficet indicem percurrere; ad pag. 62. XXI autem legant etiam Indicis pag. II et III. Porro a pag. 74, 12mo legant usque p. 77; 14to; et abinde usque p. 84, XXIX sufficet indicem percurrere. Abinde usque pag. 140 nonnisi ea quibus * praepositum est omitti possunt, quamvis ea quae difficiliora videntur, initiens tam hic quam alibi prima vice percurrere poterit.

Abhinc initiens prima vice usque pag. 342 §. 38 omnia praeter p. 178 et 179 omittat.

A p. 342 autem legatur usque 347; 8. et abhinc omittendo usque p. 351, legantur exempla usque p. 359; et abinde usque p. 379 § 40 omittendo, legatur usque p. 383, et abinde usque p. 392 §. 41 omittendo, legatur usque p. 422 §. 43. reliquis usque p. 442. omissis.

A pag. 442 autem omnia legantur, praeter rectae planique generationem, ac theoriā parallelarum concernentia; quae percurrere sufficet.

Arborem vero, indicemque saepius cum attentione perlegant.

Secunda vice legentes autem, primis Geometriae Trigonometriaeque et Mechanicae elementis imbuti omnia perlegant, fundamento altius superstructuri.

Interim sequentia adhuc in gratiam Tyronum addere libet.

Primo. Post pag. 76. Quum proportio geometrica per $a:ae=b:be$ exprimi possit: patet *factum extremorum esse facto mediorum aequale*, nempe $abe=aeb$.

Conversim quoque si A, B, C, D talia fuerint, ut $AD=BC$; est $A:B=C:D$. Nam dividendo per

BD, erit $\frac{AD}{BD} = \frac{BC}{BD}$; adeoque $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, seu $A:B =$

$C:D$. Unde haec, nota proportionis geometricae fit: ex gr. 2, 3, 4, 5 non sunt in proportione; nam 2.5 non $= 3.4$, et si proportio esset, $2.5 = 3.4$ esse deberet.

Hinc etiam e quibusvis duobus factis aequalibus proportio institui potest. Ex gr. ex $cx = (a$ id est $1.a)$ fit $c:1 = a;x$; nam $cx = a.1$.

Imo etiam quaevis tria in proportione data fuerint, quartus reperitur, dividendo factum dati paris per illum cuius socius quaeritur; per par intelligendo par extremorum, aut par mediorum; nempe e duobus paribus unum datum est, et quantitas tertia est, quae suo pari caret. Ex gr. Si $A:B = C:D$, et A, B, D data fuerint, erit $AD = BC$; adeoque $\frac{AD}{B} = \frac{BC}{B} = C$. Ita reliqui casus patent.

Quum vero si $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, sive $AD = BC$

fuerit, (per quorum quodvis unum, ponitur alterum); tum A, B, C, D in proportione sint: per hoc ex una plures, atque e pluribus novae promanant.

I. Ex una, $a:ae = b:be$: erit permutando terminos prius internos, fit, $a:b = ae:be$, permutando vero externos est $be:ae = b:a$.

Ita aliquod extremorum et simul aliquod internorum per idem multiplicando, aut per idem dividendo, proportio erit. Nempe si $a:ae = b:be$, est $ap:ae = bp:be$, et $a:aeq = b:beq$ imo $ap:aeq = bp:beq$. Ita $\frac{a}{p} : \frac{ae}{q} = \frac{b}{p} : \frac{be}{q}$

Ita componendo ex $a:ae = b:be$, sequitur $\pm a \pm ae : \pm ae = \pm b \pm be : be$, et $\pm a \pm ae : \pm a = \pm b \pm be : \pm b$; notando, quod in his duabus lineis ae et be eodem signo, ita etiam a et b eodem signo (sive diverso a priore sive non) accipiantur.

II. *E pluribus quotquot fuerint, sequitur esse etiam factum terminorum primorum ad factum 2dorum, uti factum 3tiorum ad factum 4torum.* Nempe si

$$\text{Imo. } a:aq = b:bq \text{ et}$$

$$c:cr = d:dr, \text{ est}$$

$ac:aqcr = bd:bqdr$. Unde semper ad una plures concludere licet; quaecumque proportio enim e pluribus hoc pacto prodierit, per

$P:Pm = p:pm$ exprimi potest, cui accedente alia $z:zn = x:xn$: erit

$$Pz:Pmzn = px:pmxn$$

Si vero $A:B = C:D = E:F \dots$; erit

$A+C+E\dots:B+D+F\dots = A:B$. Nam B per Aq , D per Cq , et F per Eq exprimi potest; adeoque

$$B+D+F = (A+C+E)q, \text{ et } \frac{A+C+E\dots}{B+D+F\dots} = \frac{1}{q} =$$

$\frac{A}{B}$. Solet hoc ita enunciari: *summa antecedentium*

est ad summam consequentium, ut quilibet antecedens ad suum consequentem; nempe exgr. Si A, B, C, D in proportione fuerint, dicebatur A antecedens, B vero consequens rationis A ad B, ita C antecedens, D consequens rationis C ad D.

In omnibus casibus relatis autem, patet proportionem esse; sive per quotos ex antecedentibus per suos consequentes ubique aequales, sive per facta extremorum factis mediis aequalia.

2do. Si vero duae proportionales fuerint, et tam a quam b, utriusque terminum aliquem constituat; atque reliquorum duorum terminorum in una ad laevam alterius termini cadens dicatur c, et alter ab hoc ad dextram cadens d dicatur, in altera autem ad laevam cadens f, et alter d dicatur; quaeritur, c, d, f, g quando et quo ordine sint in proportione? et quando non?

Aut efficiunt a et b in utraque proportione, per aliquod (nempe extremorum vel mediis), aut non: si non; aut in neutra efficiunt, aut in una tantum.

Si in utraque efficient; erit $c:f=g:d$, quod *perturbatim* dicitur. Si in neutra efficient; tum a aut in utraque ad laevam a b , aut in utraque ad dextram, aut in una ad laevam, in altera ad dextram cadit: in duobus casibus prioribus est $c:d=f:g$, quod *ordinatim* vocatur; in casu posteriori vero est $c:d=g:f$.

At si in una tantum efficiant par; tum nonnisi pro certo valore ipsius a vel b proportio est.

Etenim si a, b in utraque par efficiant: tum et c, d et f, g par efficient; fietque $ab=cd=fg$; adeoque $c:f=g:d$.

Si vero a, b in neutra effecerint par; stet prius a in utraque ante b ; tum si a aliquod extremorum fuerit, quum ante b sit, nonnisi primo loco stare potest, et tum b ad finem esse nequit, (quia a et b par extremorum efficerent); adeoque b aliquod mediorum, ac d terminus 4tus, et $ad=bc$ erit. Si vero a aliquod mediorum sit, b necessario ad finem erit; quia a ante b stat, et si b loco 3tio esset, a et b par efficerent; itaque loco primo c est, et alterum mediorum d est; adeoque $bc=ad$ ut prius. Pariter in proportionem alteram fit $ag=bf$; atque hinc $a=\frac{bc}{d}=\frac{bf}{g}$, et dividendo per b fit $c:d=f:g$.

Si b stet ante a in utraque: in demonstratione proxima ubique b pro a et a pro b ponendo, fiet $ac=bd$ et $bg=af$; et hinc $a=\frac{bd}{c}=\frac{bg}{f}$; atque hinc $df=eg$; consequens et tum $c:d=f:g$.

At si in una (ex gr. in qua c est) a ante b , et in altera post b stet: (e praec.) patet fore, $ad=bc$ in priore, et $af=bg$ in altera; atque hinc $a=\frac{bc}{d}=\frac{bg}{f}$, adeoque $\frac{c}{d}=\frac{g}{f}$, id est $c:d=g:f$, non ordinatim $c:d=f:g$.

Si vero a et b in una (ex gr. in qua c est), efficiant par, et in altera non: tum fiet $ab=cd$, et in altera factor socius ipsius a nonnisi f aut g esse poterit; erit igitur aut $af=bg$, aut $ag=fb$. Combinetur jam $ab=cd$ cum casu utroque: ex $ab=cd$ et $af=bg$, fit $a=\frac{cd}{b}=\frac{bg}{f}$, atque hinc $cd=\frac{bbg}{f}$; e quo bb nonnisi ita deleri potest, ut tantum litterae c, d, f, g maneant, si $b=1$, aut $c=b$, aut $f=b$, aut $d=b$. Pariter ex $ab=cd$ et $ag=fb$, fit $a=\frac{cd}{b}=\frac{fb}{g}$, adeoque $cd=\frac{fbb}{g}$; ubi pariter bb tolli nequit, nisi $b=1$, vel c aut d vel g fuerit $=b$.

3tio. Ita si fuerint proportionēs, quae ipsae, et termini earum (per XXXIX) ita ordinari queant, ut cuiusvis terminus 2dus sit sequentis 1mus (excepta prop. ultima): tum primae terminus 1mus est ad ultimae 2dum, uti factum ē terminis 3tiis ad factum ē terminis 4tis. Nam ex gr. si

$$A : B = h : i$$

$$B : C = k : l$$

$$C : D = m : n ; \text{ (per p. XL) est}$$

$ABC : BCD = hkm : iln$; seu (per p. XXXIX) $A : D = hkm : iln$, quae *regula catenaria* vocatur, et applicatur ad varias monetas mensurasque: si ex gr. A, B, C, D variae mensurae fuerint, et quaeratur ratio ipsius A ad D , datis $A : B, B : C, C : D$.

III. Praeter haec aliquid adhuc de *compositione* (et antehac usitato *numero*) *rationum* (cujus vicem hodie *exponens potentiae* subit), addendum est.

Imo. Plurimae quantitates ab aliis certo modo dependent: dependentiae varii modi innumerabiles cogitari possunt: at hic nonnisi ejusmodi dependentia quantitatis z ab alia u considerata, ut dum ex u fit ku , ex z fiat aut kz aut $\frac{z}{k}$; dicitur z ab u in casu primo *directe*, in casu posteriore *inverse* *dependere*.

Sit x quantitas rei alicujus, pro rerum certarum quantitatibus $a, b, c \dots$, et dependeat x ab omnibus iis directe; fiatque $na = A$ ex a (manentibus ceteris), fiet nx ex x ; et postea mutetur b in $mb = B$ (item manentibus ceteris), fiet mnx ex nx ; tum mutetur c in $pc = C$, fiet $pmnx$ ex mnx ; est vero $n = \frac{A}{a}$, $m = \frac{B}{b}$, $p = \frac{C}{c}$, adeoque $pmnx =$

$\frac{ABCx}{abc}$; atque idem pro 4to prodit, si ad abc ,

ABC et x , 4ta proportionalis quaeratur. Quotvis fuerint autem $a, b \dots$, idem continuari patet.

Si vero x ab aliquo ipsorum $a, b \dots$, ex gr. a b inverse dependeret; tum ex x fieret $\frac{pnx}{m} = \frac{AbCx}{aBc}$.

Solet autem hoc ita enunciari; quod quantitates generis x , sint *in ratione composita*, e rationibus ipsorum $a, b \dots$, *directis* in casu primo, in posteriore vero e rationibus ipsorum a, c *directis*, et *inversa* ratione ipsorum b , (per literas quantitatum literis nominis ejusdem denotatarum genera intelligendo). Unde et aliae ejusmodi denominationes intelliguntur. Ex gr. in motu uniformi sunt spatia in ratione composita e rationibus directis temporum et celeritatum, celeritates autem sunt in ratione composita, e directa spatiorum et inversa temporum. Ita quo major pecunia ad lucrum elocata, et quo majus tempus elocationis, eo majus lucrum est; ut si elocatae pecuniae fuerint P et p , et tempora T et t ; fiet lucrum prioris ad lucrum posterioris (pro iisdem conditionibus), uti PT ad pt .

Quum ejusmodi problema (ut antea) proponitur; quaerendo quidnam ex x fiat, mutatis a in A , b in B , et c in C ; nonnisi *data*, modo sequente describenda sunt: nomen generale rerum a, A , ad laevam ponatur, et post hoc eadem linea horizontali scribantur a, A ; sub hanc lineam in sequente nomen generale ipsorum b, B scribatur pariter ad laevam; et post hoc scribantur b, B sub a, A ; et i-

ta porro in deorsum sequente linea horizontali, sequentis literae nomini generali postponentur literae ipsae, prius minuscula, tum altera; donec nonnisi x supersit; et tum ponatur x ad dextram loco 3tio; atque quaeratur, quomodo x a literis singulis dependeat, prius ab a , tum a b & c , et si ab aliqua inverse dependeat, literae nominis ejusdem loca permutent, reliquis manentibus. Atque demum quivis terminorum columnae primae, simul cum aliquo terminorum columnae 2dae, aut cum termino 3tio nempe cum x , per idem dividi potest, si per id numeri minores remaneant; atque hoc continuetur, donec numeri amplius minui nequeant: et tum proportionalis 4ta quaesita prodibit, si id quod loco 3tio remansit, multiplicatum per factum in columna 2da remanentium, per factum e columna 1ma remanentium dividatur. Ratio facile patet, cum proportionalis 4ta sit ex.gr. in casu primo $= \frac{ABCx}{abc}$, in altero sit $= \frac{AbCx}{aBc}$, ubi superius inferiusque per idem dividendo valor idem manet.

Vocatur autem regula ista, si juxta denominationem praecedentem, literarum, e quibus incognita quaeritur, fuerit numerus μ , *regula de μ* ; nempe *regula de tri*, si praeter x nonnisi duae ex.gr. a et A fuerint, *de quinque* si et b , B adfuerint &c.

2do. Sed etiam quum in proportionem, etsi tantum duo termini, et summa reliquorum data fuerit, (per p. XXXIX) reperiatur 4tus: sit artificii hujus cum compositione rationum combinati exemplo, *regula societatis*.

Si nempe duorum pecuniae simul lucrandi causa elocatae, fuerint P et p , et tempora T et t , lucrumque commune ($+$ aut $-$) fuerit λ ; erit L lucrum prioris ad l lucrum posterioris, in ratione composita directa pecuniarum et temporum, adeoque $L:l = Pt:pt$; atque hinc $PT \pm pt : PT = (L \pm l = \lambda) : L$; et quotvis fuerint, summa productorum ejusmodi, erit ad cujusvis factum, uti lucrum universum ad lucrum illius.

Nam si de quibusvis n ejusmodi factis valeat regula, valebit et de $(n+1)$ factis. Sit enim ex $(n+1)$ productis, quodvis aliquod F ; exemto hoc manebunt facta numero n , quorum, summa sit S , et quodvis aliquod sit f , sitque k lucrum ipsum f (nempe pecuniam, quae unus factor ipsius f est) concerneus, atque lucrum ipsum F concernens sit x ; et lucrum totius S sit R ; erit

$$S:f=R:k$$

et $f:F=k:x$ atque hinc

$$\frac{Sf:fF=Rk:kx}{S+F:F=R+x:x} \text{ seu } S:F=R:x, \text{ atque hinc}$$

3^{tie}. Quid autem per *numerum rationum*, (unde nomen logarithmi venit) intelligatur, e sequente patet. Sint μ et ν integri, prius Xvi .

Ratio $q^\mu:1$, dicebatur $\frac{\mu}{\nu}$ -tuplicata rationis

$q^\nu:1$; nempe $q^\nu:1$ componitur e numero ν rationum $q:1$, ex gr. pro $\nu=2$, componitur $q^2:1$ ex $q:1$ et $q:1$; fiet enim multiplicando antecedentes et consequentes, $q^2:1$; atque $q^\mu:1$ componitur e numero μ ejusmodi rationum. Exprimuntur

autem hoc brevius clariusque hodie per $(q^\nu)^\frac{\mu}{\nu} = q^\mu$, ubi q^ν pro basi accipitur. Ex gr. si basis logarithmorum sit $10=q^\nu$, et ν denotet 10 millones, erit q = radici decies millionesimi gradus ex 10,

et radix ista nempe $10^\frac{1}{\nu}$, elevata ad μ , erit =

$10^\frac{\mu}{\nu}$, quod idem est, ac si ex 10 ad μ elevato, radix gradus ν extraheretur; et $\frac{\mu}{\nu}$ est quoad 10 loga-

rithmus ipsius $10^\frac{\mu}{\nu}$; quod olim dicebatur, quod

ratio ipsius $10^\frac{\mu}{\nu}$ ad 1 sit $\frac{\mu}{\nu}$ -tuplicata rationis 10 ad 1.

Imo posita serie geometrica --- $qq, q, (\frac{q}{q} = 1), \frac{1}{q}, \frac{1}{qq}, \dots$, et inferius supposita serie arithmetica --- $1, 2, 0, -1, -2, \dots$; non solum ratio $qq:1$ dicebatur duplicata rationis $q:1$, sed etiam ratio $\frac{1}{qq}:1$ dicta est (-1) tuplicata rationis $q:1$; nempe $\frac{1}{qq}:1$ componitur e duabus rationibus $q:1$ inversis, nimirum ex $1:q$ et $1:q$; est enimvero $\frac{1}{qq}:1 = 1:qq$.

* Interim adhuc aliquid de logarithmis *Neperi* (*Scoti Baronis Merchistonii*, ex antiqua et insigni prosapia oriundi), addere in gratiam Tyronum paulo ulterius provectorum libet.

Calculus trigonometricum sublevare ejus propositum fuit: sinum totum (nempe radium) ponit $= 10\ 000\ 000$, quod sit $= n$; atque inde descendit in serie geometrica, cui subscribit seriem aequidifferentium, ita ut cuivis termino K seriei superioris respondeat terminus k exprimens numerum rationis K ad n (saltem cum errore exiguo), ratione ipsius $n-1$ ad n pro basi posita, (*etsi basis apud Neperum nullibi nominetur*); ut nimirum moderno loquendi usu sit $\frac{K}{n} = (\frac{n-1}{n})^k$ (cum errore exiguo); et k fit logarithmus ipsius $\frac{K}{n}$ quoad basim $\frac{n-1}{n}$.

Atque hinc est, quod quamvis nullibi videatur *Neper* de logarithmis qui *naturales* vocantur, cogitasse; tamen per $-10\ 000\ 000$ id est $-n$ multiplicatus logarithmus naturalis, in prioribus notis cum logarithmo *Neperiano* conveniat. Nimirum

(*e* basim logarithmosum naturalium denotante),
 sit $\frac{K}{n} = e^x$; quum (p. 157) sit $(1 + \frac{1}{n})^n \sim e$
 (dum $n \sim \infty$); erit etiam pro n satis magno,
 cum errore exiguo $[(1 + \frac{1}{n})^n]^x = \frac{K}{n} =$
 $(1 + \frac{1}{n})^{nx} = (1 - \frac{1}{n})^{-nx} = (\frac{n-1}{n})^k = \frac{K}{n}$; a-
 deoque $-nx = k$. Consequ. x (id est lognat $\frac{K}{n}$) per
 $-n$ multiplicatus cum logarithmo Neperiano ejus-
 dem $\frac{K}{n}$ convenit (cum errore exiguo).

Facile etiam patet logarithmum Neperianum
 fractionis verae $\frac{K}{n}$ vum, et quantitatis unitate ma-
 joris $\frac{n-1}{n}$ esse: nempe $\frac{n-1}{n}$ est < 1 , adeoque
 ad $\frac{K}{n}$ elevari debet, ut unitate majus, et ad
 $\frac{K}{n}$ vum, ut fractio vera prodeat,

Adhibuit autem *Neper* motus ideam, uti *New-*
ton ad calculum fluxionum: nempe in duarum re-
 ctarum una *A*, puncto certa lege moto, seriem geo-
 metricam, (quod facile, et clarius, quam a *Nepe-*
ro exponitur, fieri potest); in altera *B*, motu uni-
 formi seriem aequidifferentium produxit, termi-
 nosque posterioris terminis prioris pro iisdem tem-
 poribus aequalibus respondentes, horum *artifica-*
les dixit (hoc nomine pro logarithmo usus).

Sinum totum divisit per $n = 10\ 000\ 000$, et
 tot ejusmodi partium *artificialem* dixit o , pro quo
 nullus adhuc motus evenit in linea *B*; nempe

$\log(\frac{n}{n} = 1) = o$; postea quaerendo ingenti labo-
 re inter 1 et $\frac{1}{2}$, 1 et $\frac{1}{10}$ &c proportionales me-
 dias, atque inter quasvis, item novas, pervenit ad

seriem continue proportionalium geometricam, cujus terminus primus ab $\frac{n}{n}$ decrescendo, cum errore exiguo $\frac{n-1}{n}$ erat, et hujus *artificialem* (motu in B) posuit 1; atque ita porro (omnino cum errore aliquo) ipsi $(\frac{n-1}{n})^2$ respondet *artificialis* 2, et ipsi $\frac{1}{2}$ respondet *artificialis* 6931 469; nempe ratio $\frac{1}{2}n:n$ componitur ex tot rationibus ipsi $\frac{n-1}{n}:1$ aequalibus (cum errore exiguo).

Tantae molis erat (adminiculis hodiernis adhuc deficientibus) systema logarithmorum (praeclarum seculi 17mi inventum) condere; quanquam *Neperus* quoque numerorum primorum logarithmis per multo labore quaesitas proportionales medias reperiitis, compositorum logarithmos omnino per additionem computaverit.

De usu tabularum et certis applicationibus in tomo sequente dicetur: at de logarithmis *Gavssianis*, etiam aliquid dicendum foret, siquidem ad nos pervenissent: ex omnibus summi viri operibus desideratis, nonnisi (p.351 et 425) citata, et *Theoria motus corporum coelestium* adsunt; primae lineae *theoriae imaginariorum* quoque sero pervenerunt, quum jam theoria quae in hoc tomo habetur, talis qualem concipere poteram, impressa erat.

IV. *Coronidis* instar (quoad p.27) addatur *numeratio*, cujus proxima origo quidem *arabica* est, sed a scriptoribus Arabicis quoque *Indis* attribuitur: non de signis 0, 1 . . ., sed de lege ingeniosa quaeritur, qua per 10 signa quivis integri *I* et *i*, imo et $\frac{1}{10^i}$ describi possunt. Utcunque vocatus Auctor et sine nomine viget, vigebitque in omnibus calculis.

Romanorum et facere et pati sortia fuit: sed mirum est, *Grajorum* quibus Musa ingenium dederat, methodum tam complicatam, imperfectamque fuisse; nempe qui 37 signis, ab 1 incipiendo continuative, nonnisi usque ad 99 999 999 (decadice intelligendo) scribere poterant; quamvis eorum modo quoque levi additamento, quivis numerus describi potuisset; nempe 1, 2 --- 9, per literas α, β --, ita 10, 20 ---, 90, 100, 200 ---, 900, 1000, 2000 ---, 9000, per literas, et quum non sufficerent, accentis suppositis, aliaque signa denotabant; atque demum 10 000 nempe *myrias* per M denotabatur; regula vero haec erat, quod post M eorum quae signa particularia denotabant summa, ante M vero (ad laevam) factum in M accipiebatur summae eorum, quae signa particularia ante M denotabant; ex gr. $\beta M \alpha$ denotabat 20001; at per MM denotari 10000. $10000 = 100\ 000\ 000$, ac post MM adhuc id quod $MM-1$ M^2-1 denotabat, scribi potuisset.

Potuissent quoque et hoc modo, posita lege sequente, numerum quemvis describere, et omnia peragere: nempe ubi plura M se invicem excipiunt, productum eorum intelligatur, et quaevis imago sive ab initio usque ad proximum M, sive inter 2 proxima M fuerit, ut factor proximi M ad dextram reputetur; alioquin autem summa omnium intelligatur. Multa ob defectum cifrarum breviter exprimuntur; ex gr. $MMM \alpha MM \beta M \alpha = \text{billioni} + 100 \text{ millionibus} + 20\ 001$, $= M^3 + M^2 + 2M + 1$.

Simplex et elegans *lex Indica* est sequens: 1mo. Detur numero cuivis a o incipiendo signum proprium, usque quo libuerit; atque 2do. ponatur aliquorsum comma in lineam horizontalem: et 3tio quodvis signorum dictorum ponatur ante comma ad laevam, denotet id, illud cuius signum est; at 4to si numerus signorum datorum simul cum o fuerit n , quaecunque eorum aequalia se invicem in linea dicta excipiant, valor illius quod ad laevam est, sit valoris illius quod ad dextram est n uplus; valoremque eum quodvis retineat tsi

in quemvis alium locum aliud signum ponatur; denique 5to. tota imago denotet summam omnium eorum, quae per signa particularia, valores a locis (ut saepe et in mundo fit) sortita, denotantur.

Patet hinc --- 111, 111 --- denotare --- $n^2 + n + 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ ---; nempe in 1, 1 denotatur 1 per notam ante comma, et simul n ies plus, quam in loco sequente, ita in 11, denotat nota prior n ies plus, quam 1; ita valor ipsius 2, 2, adeoque ipsius 1, 2 &c patet. Est etiam manifesto 1, 111 --- series ∞ ta, cujus summa (p. 131) $\sim \frac{n}{n-1}$.

Quod hoc pacto numerus quivis a 0 incipiendo, post quemvis ulterius sequens, exprimi possit, patet sic. Denotetur $n-1$ per m ; si in loco ultimo ad dextram ante comma sit signum particulare k , aut zerum aut integrum ipso m minorem denotans; poterit in locum ipsius k , signum numerum uno majorem denotans poni; si vero m fuerit in eo loco, tum ad laevam eundo, aut aliquamdiu signa m se invicem excipient, aut post prius m quod ante comma est, statim aliud sequetur ad laevam; sit k signum illud quod prima vice non excipit signum m , et si nullum tale sit, reputetur 0 pro k . Accedente 1 ad m , fiet n , quod cum ad laevam praecedente m , denotante $m.n$, facit n^2 , adeoque id quod 1 loco ad laevam sequente denotat, et hoc si et ibi m fuerit, denotans $m.n^2$ efficit cum eo $(n-1+1)n^2=n^3$; et ita porro donec ad k deventum fuerit, et tum augebitur k uno, denotabiturque praeter valorem ipsius k , etiam potentia nova ipsius n quae prodiit, relictis cifris in locis omnibus ad dextram.

Quod etiam ad legem numerationis Graecorum (quae tam facile extendi potuisset), applicari manifestum est; dummodo pro potentiis ipsius 10 potentiae ipsius M ponantur: subibit nempe ipsius $n-1$ vicem $M-1$, etsi plura loca occupet; ex gr. pro $y=M-1$, ex yM^3yM^2yMy , (per quod $yM^3 + yM^2 +$

$yM\ddagger y$ intelligendum), accedente 1 fiet αM^2 , id est M^4 .

Patet etiam, ipsum 1 postpositis quotvis cifris esse $> eo$, quod in locum cujusvis cifrae, m posito, per ista m denotatur; atque quivis numerus non $> m$ ponatur in locum ipsius 1, ad numeros abinde uno crescentes, denotandos, imagines praecedentes eodem ordine quo antea prodierunt, sequi.

In nostra numeratione n decem est; sed n quidcunque denotare potest, nempe integrum quemvis (imo et ad fractus extendi posset). Elegans est *Leibnitii* ingeniosa similitudo in *Xeniis* ad Principem missis, a *Dyadica* (numeratione nonnisi per 2 signa nempe 1 et 0) petita: quod nimirum sic Deus unus ex nihilo infinitum composuerit; ac veluti imagines dyadicae imperito confusae videntur, clarae peritis; ita confusio mundi mortalibus apparens, spiritibus superioribus sapientissimus ordo est.

Certe dyadica ista, nisi ad numeros majores exprimendos, plures notas requireret, se quoad omnes operationes valde commendaret: nempe nullius tabulae Pythagoricae egeremus, et operationes omnes perfaciles essent, si prius duae tantum, tum summa harum cum 3^{ta} linea, et semper nova summa sequenti lineae adderetur, ut omnis molestia evitetur (in additione plurium linearum).

Si vero n ex gr. viginti esset; tum omnino ingentes numeri breviter describerentur; tanto fortius, si $n=37$ esset, (nempe 37 signa ut apud Graecos assumerentur): at pro $n=20$, tabulam Pythagoricam pauci addiscerent, quum pro hodiernis 36 productis, 171 addiscenda essent. Notandum, tabulam per diagonalem in duas partes aequales dispesci.

In decadica vero qua utimur, 10 dicitur *decem*, 10^2 autem *centum*, et 10^3 dicitur *mille*, et 10^6 nempe $10^3 \cdot 10^3$ id est millies mille dicitur *millio*, patetque 1 cum 6^v cifris, *millionis* utam potentiam denotare.

Si comma ad dextram plane ad finem sit, omitti (uti + in initio) solet, parsimoniae gratia: si vero comma non ad finem fuerit, expressio *fractio*.

decimalis dici solet. Est nempe aequalis fractioni communi, cujus numerator est ipsa imago decadi-
ca commate ad finem posito, aut deleto, denomi-
nator autem est 1 tot cifris postpositis, quot no-
tae post comma erant, quae etiam *notae decima-*
les audiunt. Nam ex gr. $63,51 = \frac{63}{1} + \frac{5}{10} + \frac{1}{100}$
 $= \frac{6300}{100} + \frac{50}{100} + \frac{1}{100} = \frac{6351}{100} = 63 + \frac{51}{100}$

Conversim quoque quaevis fractio, cujus nu-
merator integer, et denominator est 1 cum cifra-
rum numero N; est numeratori, factis in eo nume-
ro N notis decimalibus aequalis: nam hoc tali fra-
ctioni aequalis est.

Patet etiam, fractionis decimalis valorem non
mutari, quotcunque cifrae ad dextram postponan-
tur: nam numero notarum decimalium aucto, tot
cifrae accedent numeratori quam denominatori, a-
deoque per idem multiplicabuntur.

Si vero comma mutet locum, promotum ad
dextram, vel laevam, locorum numero μ : in casu
priori multiplicabitur valor, in posteriore divide-
tur, per 10^μ . Nam si comma ad dextram mi-
gret μ locis, totidem notis decimalibus pauciores
manebunt, adeoque in denominatore post 1 tot
nempe μ cifris pauciores erunt, manente nume-
ratore; itaque valor 10^μ ies major evadet. Si autem
comma ad laevam μ locis migret, totidem notis de-
cimalibus plures erunt, adeoque denominatori ac-
cedent μ cifrae; quapropter valor 10^μ ies minor e-
rit. Ex gr. ex $2=2$, $=0002$, pro $\mu=3$ fiet $0,002=$
 $\frac{2}{1000}$, et ex $2,3$ fiet 2 locis promotu commate $230,=$
 $2,3 \cdot 100 = \frac{23}{10} \cdot 100 = 230$.

Operationes, et reliqua, tomo 2do relinquuntur.

ERRORES TOMI PRIMI (praeter eos, qui in
ejus indice, erratisque correcti sunt).

- P. 36. linea 1. a calce, adde: atvero etsi div^{or}
(1 loco 3tio stet, quotus loco 2do pro die s
major dividendo erit, si non nisi exproa-
tio quoad unitatem in censum veniat (Tom.
II. p. 368).
- P. 42. linea 4 a calce, dummodo $N \equiv M$ non
sit, juxta (Tom. II. p. 370) deleri potest.
- P. 56. XIX linea 4 pro $A \equiv B$ lege $A \equiv C$.
- P. 91. 12mo linea penultima pro $\frac{b}{b}$ lege $\frac{b}{c}$
- P. 127. 8vo in facto anteponendum est $a +$
- P. 128. 9no in multiplicatore 2do pro a^2 lege a
- P. 133. 17o. linea 2da adde secus dicitur ordinis 1
- P. 168. linea 7, pro $+2, -1$, lege $+2, -2$.
Idemque simplicius (omissis r, i et $1''$)
necnon imaginaria, et proportionis conce-
ptum extensum, aliaque vido Tom. II. p. 357.
- P. 176. ad finem ante conseq, pro
 $e^{al} - 1$ lege $e^{2al} - 1$
- P. 382. linea 5 a calce post eadem, ad-
de: et signa $+$, $-$ eadem sint in numera-
tore quae in denominatore.
- P. 599. linea 2 a calce pro $\frac{I}{I}$ lege $\frac{L}{L}$
- P. 416. linea 7 a calce, dele (pro casu, si o
non $= 1$)
- P. 446. linea 2 a calce, post sectio, adde. sin-
gulis tribus communis.
- P. 454. 5to post parallelogrammi, adde: nisi
quadratum fuerit; et ad finem adde: no-
tandum autem est, inter omnes superficies,

solum planum esse, cujus quaelibet facies alteri obversa, hanc tegere queat; atque (in systemate Euclideo) planum solum cum sphaera in eo convenire, quod utrumque circa quodvis sui punctum in se moveri queat. (Tom II. p. 238), et solum discrimen esse, quod sphaerae quodvis punctum ab eodem certo aequidistet.

P. 486. 12 line., 4 post et rectis, adde; crescentibus; et linea 13 lege ad $\triangleright ab$; et linea 5 a calce, post concipiantur. adde; descripta.

Notandum etiam est: quosdam conceptus in tomo primo traditos, ad finem tomi 2di clarius simpliciusque expressos esse; quod cum ex indice ommissum sit, breviter referre pro iis saltem, qui nonnisi primum tomum habebunt; haud supervacuum erit.

I. Cuilibet quantitati tribuatur unitas + va vel — va (quoad operationes statim dicendas); et illi de qua expresse non dicitur, ei negativam tribui, + va unitas attributa sit. Unitate + va praeditae illae erunt, quae *realia* vocantur, et — va praeditae erunt eae, quae *pure imaginariae* dicuntur; quae nomina consveta et hic retinentur, atque duae hae determinationes, *determinationes realitatis* dicantur. Realia et pure imaginaria, determinatione sive + sive — affecta, dicantur *quantitates purae*.

II. *Definitio proportionis* (inter plures Tomi I. datas) ibidem (p. 65) est sequens: A, B, C, D in proportionem esse dicuntur (abstrahendo ab omni determinatione) si pro quovis tali n (nomine numerico), ut $A = nu$, $C = nv$ sit; nec B ipsum u pluries, quam D ipsum v , neque D ipsum v pluries, quam B ipsum u contineat. Si jam conceptus hic ad casum $A = \pm 1$

restringatur; atque accedat: quod tam respectu determinationum $\oplus$, $\ominus$, quam respectu determinationum realitatis; dum A et B determinationis ejusdem sunt, et C ac D sint ejusdem; si vero A et B determ. diversae fuerint, et C ac D diversae sint: tum dicitur D factum ex C per B (quod ± 1) multiplicato; operatio autem dicitur multiplicatio (uti etiam divisio inde oriunda) respectiva quoad ± 1 .

Quo pacto 8 schemata oriuntur ex $\oplus$, $\ominus$, et totidem e duabus realitatis determinationibus: e quibus schematibus patet, quod etiam termini extremi determ. ejusdem siut, si medii determ. ejusdem fuerint; imo ex iisdem patet, tam in multiplicatione quam in divisione, si quoad ± 1 peragatur, $\oplus$ et $\oplus$, necnon $\ominus$ et $\ominus$, dare $\oplus$, at $\oplus$ et $\ominus$ dare $\ominus$; et rem inverse quoad -1 esse; (unde prona ad signa $+$, $-$ conclusio est); determinationes item quoad realitatem aequales, dare reale, diversas autem dare pure imaginarium.

III. Prouti quantitates determinationibus $\oplus$, $\ominus$ affectae connectuntur, atque ita tractantur: ultro venit, et determinationibus quoad realitatem affectas connectere, atque talem legem statuere; ut omnes operationes (absque mentione facta quoad ± 1 vel -1) absolute per agantur: eaque fit sequens

1mo. Ut si alteruter duorum factorum unitate $\oplus$ va gaudeat, factor unitate $\oplus$ va gaudens ponatur pro multiplicatore; et si uterque unitate $\ominus$ va gaudeat, tunc sit multiplicator unitate negativa gaudens.

2do. Si A et a quantitates unitate $\oplus$ va, et B ac b unitate $\ominus$ va gaudeant: dicatur $A+B$ per $a+b$ absolute multiplicari; si tam A quam B , tam per a quam per b respective juxta.

legem priorem multiplicentur; atque si in his factis summa realium sit S , summa pure imaginariorum sit s , dicatur $S \mp s$ (id est S cum s , connexum sed non commixtum) factum (sensu absoluto).

Atque hinc divisionis absolutae conceptus patet: nempe si $P.Q = F$, dicitur Q quotus ex F diviso per P .

Extenditur etiam multiplicatio absoluta (juxta Tom. I. p. 38); a qua hinc etiam divisio absoluta.

Hinc si quotus ex α per β diviso sit $=$ quotus ex γ per δ (divisionem abs. intelligendo): dicuntur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (sensu generalissimo) in proportionem esse: notando quod in casu ubi α per β quoad $+1$, et γ per δ quoad ∓ 1 dividi juxta regulam deberet; expresse contra regulam quoad idem ± 1 dividenda sint.

IV. Quantitates sub formam $a \mp b \sqrt{-1}$ venientes dicantur mixtae, dum nec a nec $b = 0$ est: dabitque tam in multiplicatione quam divisione, purum per purum, purum; purum per mixtum, sive mixtum per purum, dabit mixtum; mixtum per mixtum autem dat in certo casu purum, in alio mixtum.

V. Patet autem (uti in schematibus multiplicationibus divisionisque) in proportionem quoque: quod si duo priores determ. ejusdem fuerint (sive quoad $+$, $-$, sive quoad realitatem; et duo posteriores ejusdem sint; si non, non; et pariter si extremi ejusdem fuerint, et medii ejusdem sint, si non, non; et pariter si extremorum utrumque mixtum, vel utrumque purum fuerit, et mediorum aut utrumque purum, aut utrumque mixtum sit; si vero extremorum alterutrum mixtum alterum purum fuerit, et mediorum alterutrum purum, alterum mixtum sit; atque idem de duobus prioribus, et 2 posterioribus valeat.

VI. Praeterea de resultato divisionis unico, dum concreta per concretam dividitur, additur aliquid: nempe divisor tam 2dum quam 3tium locum occupare postest: eodemque sensu si divisor fractio vera sit, quotus in casu utroque major dividendo est.

VII. De repertiundo e quibusvis tribus proportionis terminis, quarto (in concreto); et de facto extremorum = facto mediorum, quoad idem + accipiendo.

VIII. Conceptus potentiae, radices, logarithmique (Tom. I. p. 168) traditus simplicius exponitur. Nempe statim post conceptum multiplicationis, series talis construi potest, cujus terminus primus sit $\frac{1}{1}$, et e quovis termi-

no ea lege oriatur sequens; ut numeratori postponatur k ut factor, et denominatori numerus is, quo k ut factor in novo numeratore est, postponatur: quo pacto series $1 + k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{2.3} + \frac{k^4}{2.3.4} \dots$ orta, si fuerit = aut $\sim K$, ex-

primatur valor hujus seriei per $(f)k$.

Atque pro quovis tali c , ut $(f)c^a$ eidem C aequale sit, dicatur quodvis $(f)bc$ (et nonnisi id) potentia exponentis b ipsius C , per Cb denotata; et b dicatur cujusvis Cb logarithmus quoad C ; quidvis sub formam $A+B\sqrt{-1}$ cadens sit sive c sive b A et B realia quaevis, inter quae et 0 cadit, denotantibus). Dicitur praeterea C radix exp. b cujusvis Cb ; imo et quodvis tale a , ut pro certo r , sit $ar = R$, dicitur radix exp. r ipsius R . Exemplis haec ibidem illustrantur; atque per definitionem divisionis (p. 562) extensam, preterquam quod 1^r omitti.

tur (Tom. I. p. 168), neque $N=M$ ibidem (p. 43) excluditur.

Notandum tamen est, conceptum hunc, quamvis statim post multiplicationem construi queat, non nisi subveniente Tom. I. p. 157... oriri.

Nempe prius, factum e factoribus æqualibus numero n , per factorem semel, et n ad dextram superius scriptum denotari coepit; tum ad quantum e talibus factis eundo, ultro venit, si a ut factor superius numero n , inferius numero m erat; quum superius a deleatur per inferius, numerum superiorum a accipere +ve, inferiorum vero -ve, atque $\frac{a^n}{a^m}$ designare per a^{n-m} , et $\frac{A^N}{A^M}$

intelligere per A^{N-M} . Sit $n-m=v$, et $N-M=\mu$.

Passus ulterior erat, duos ejusmodi quotos nempe a^v et A^μ æquales cogitare, et per a^μ designare tale A , ut sit $a^v = A^\mu$. Nec post (p. 364) dicta, $\mu=0$ excluditur: nam $a^1 = A^0 = 1$, et $1^{1:0} = 1$.

Ita $a^0 = A^0$, et $a^{\frac{0}{0}}$ gaudet valore $= 1$.

ERRORES (in Tom. I.) praeter supra annotatos: reliquos, quum nec valetudo nec negotia totum ad unguem castigare permiserint; Lector benigne emendare rogatur.

P. XXXVII. Fig. 17. III. ad $\triangle$ li imi cujus basis $\mathfrak{E}b$ est, verticem ponantur duae literae $\mathfrak{E}$ et f .

P. 84. XXIX linea 5 pro $3-1$ lege $3-2$.

P. 85. linea suprema, pro $2-1$ lege $3-2$.

P. 95. l. 4 pro *quoad basim Q*, lege *quoad basim a*

P. 110 l. 6 a calce, pro *erit* $\sqrt[m]{-P} (=)$ lege

quivis valor ipsius $\sqrt[m]{-P}$ *per* $p(a+b\sqrt{-1})$ *exprimi poterit, (pro* a, b *realia juxta pag* 109 *talia denotantibus, ut* $(a+b\sqrt{-1})^m = -1$ *sit.*

P. 152 linea suprema pro $C(1-$ lege $C(1-$

Parthesis 2da > priori est, si pro $1+x$

sit $e \mp$ nec integer, vel $-$ et < 1 . Nam $\frac{e-n}{n+1}$ (quod

crescens ~ -1 sit $> \frac{h}{k}$, et $\frac{e-n-2}{n+3}$

consideranda veniunt. Accipitur nempe pro $e \mp$ vo et > 1 , n tantum, ut sit $> e$; at-

que tum patet $\frac{e-n}{n+1} < 1$ esse, uti pro $e < 1$

est $\frac{e-n}{n+1} < 1$; est autem in casu utroque $e-n$

$-$ vum⁹; adeoque numeratori fractionis verae negativo addendo -2 , et denominatori $\mp$ vo addito $+ 2$, majus $-$ vum prodit. Nempe in utraque parenthesi terminus ad laevam $-$ et > 1 est; adeoque addito 1 , majus $-$ vum in 2da manet

E pag. 141. signa nonnisi pro $(1+x)$ et $(1+x)-$ alternant. Itaque nonnisi de $(1+x)$

elevato ad e et >1 quaestio fit, pro
 $x = \frac{k}{h}$ et $k > h$. Sit $x = 1 + q$, et $\frac{e-n}{n+1} =$
 $-1 - Q$ pro $(Q) \mp$ vo; accipiatunque n tantum,
 ut Q sit $< 2q$, et $Q < q^2$ sit; quod fieri potest,
 quum $\frac{e-n}{n+1}$ decrescens ~ -1 .

Sint termini ejusmodi signis alternantibus,
 A, B, C, D se invicem excipientes, sitque $A \mp$,
 $B \mp$, $C \mp$, $D \mp$; exprimentur hi per

$$A, \frac{A(e-n)x}{n+1}, \frac{A(e-n)(e-n-1)}{n+1} \cdot x^2, \frac{A(e-n)}{n+1} \cdot \frac{e-n-1}{n+2} (e-n-2) \cdot x^3;$$

eritque factor ipsius $Ax^2 \mp$, quum C et $A \mp$ sint, factor ipsius Ax^3 autem $\mp$ est, quum A et $x \mp$, D vero $\mp$ sit.

Est autem A tam in 2 prioribus, quam in 2 posterioribus factor communis; estque summa factorum sociorum in 2 prioribus, $1 + \frac{e-n}{n+1} \cdot x = -Q - Qq - q$ (substituendo valores dictos); in 2 posterioribus autem, si in postremo

pro $\frac{e-n-2}{n+3}$ (quod > -1 , tantum -1 ponatur,

summa factorum sociorum ipsius A erit $(-x^3 + x^2) \frac{(e-n)(e-n-1)}{n+1} \cdot \frac{e-n-2}{n+3}$. Est autem sub-

stituto valore ipsius x , $x^2 - x^3 = -q - 2q^2 - q^3$; quod $> -Q - Qq - q$ (per valorem suppositum ipsius n) est. Fit vero adhuc majus $\mp$ vum, si per coefficientem $\mp$ vum multiplicetur; fieretque

adhuc majus, si pro -1 poneretur $\frac{e-n-2}{n+3}$.

P. 187. l. 12 pro $n < N\beta\dot{x}$, lege $n = \text{aut} > N\beta x$;
et Fig. 19 annotentur a , b et α

P. 196 et 269. vide statim.

P. 215 *superficie per revolutionem*, anteponatur 9-no.

P. 300. l. 17 a calce pro $>$ lege $<$; sed per
plane dicta a linea 10 pag 300 usque 6to pag.
301 supervacuū fit.

P. 424, l. 5. pro ex ω , lege ex eo.

P. 196. linea 11. quoad substitutionem aequipol-
lentium, exempla haud rite electa sunt;
prætereaque ob facilitatem p. 269 nimis sero re-
lata; atque etiam idea calculi differentialis, in-
tegralisque, ut via, qua reperiri poterat, per-
spiciatur, justo fusius deducta est: quapropter
quum nulla repetitio inutilis sit, quae saltem
quorundam Tyronum captui accommodatior fi-
eri queat; hanc quoque brevius evidentius-
que referre licebit.

I. Variabilis x , a qua sive necessario sive
certa suppositione dependent quotvis variables
 $y, z, \dots$, dicatur *absoluta*; sintque ejus valores
 γ et β , (a 0 accepti, et sive ambo $\pm ve$ sive
ambo $\mp ve$, imò et alter $\pm ve$, alter $\mp ve$); deno-
teturque (pro n integro $\pm vo$) $\gamma: n$ per $\dot{x}$, sitque
(pro μ integro $\pm vo$ vel $\mp vo$) $\beta = \dot{x} + (\omega = 0$
vel $< \dot{x}$), ita ut $\mu \dot{x}$ et ω , aut utrumque $\pm$ aut
utrumque $\mp$ sit, aut et $\beta = 0$ sit.

II. Sit functio $(K)x$, dicaturque ex ea vel
ejus *derivata series* sequens: $(K)n\dot{x} - (K)(n-1)\dot{x}$,
 $(K)(n-1)\dot{x} - (K)(n-2)\dot{x} \dots (K)(\mu+1)\dot{x} - (K)(\mu\dot{x} + \omega)$;
sitque m nomen generale ipsorum $n, n-1, n-2,$
 $n-3 \dots \mu+2, \mu+1$. Esset (inde a 0) seriei dictae
terminus m tus $(K)m\dot{x} - (K)(m-1)\dot{x}$, si pro
 $m-1 = \mu$ addatur ω ipsi $(m-1)\dot{x}$. Denotetur isto
terminus m tus per $(k)m\dot{x}$; eritque summa, ter-

minis intermediis se mutuo destruentibus, $(K)\gamma - (K)\beta$. (pro valoribus dictis ipsius x); denotetur haec per K (nomenclatione ista in posterum quoque retenta). Patet autem m etiam negativum esse posse, si exgr. $\mu + 2 = 0$ fuerit. Casus simplicissimus est si $\beta = 0$, et tum $K = (K)\gamma - (K)0$.

III. *Functio*, e qua derivatae seriei summa a magnitudine ipsius n haud dependet, dicatur *absoluta* sive ab n *independens*, Exgr. sit $\beta = 0$; et sit $(C)x = x$; erit $(c)m\dot{x} = m\dot{x} - (m-1)\dot{x} = \dot{x}$, et $C = n\dot{x} - 0 = x$. Ita pro $(A)x = x^2$, erit $(a)m\dot{x} = 2m\dot{x}^2 - \dot{x}^2$, et $A = x^2$. Pro $(U)x = x^2 + x\dot{x} = (n+1)n\dot{x}^2$, est $(u)m\dot{x} = 2m\dot{x}^2$; atque $U = x^2 + x\dot{x}$; quod ab n dependere, uti C et A haud dependere manifestum est.

IV. Si jam vator ipsius n a certo incipiendo, semper porro bis augeatur; atque prius pro valore ejus primo construantur series derivatae functionum certarum $(A)x$ et $(B)x$ ab n independentium, ac functionis cujuspiam $(U)x$, in eadem linea horizontali; serie ipsius $(U)x$ in medium, serie ipsius $(A)x$ ad dextram, serieque ipsius $(B)x$ ad laevam positis; atque pro valoribus sequentibus ipsius n , construantur pariter series functionum $(B)x, (U)x, (A)x$; pro quovis n in eadem horizontali, ita ut lineæ hæc crescente n se invicem deorsum excipiant, et series ipsius $(U)x$ columnam mediam, series ipsius $(A)x$ dextram, series ipsius $(B)x$ laevam teneant. Exgr. Sit primum $n=2$, postea sequentia erunt 4, 8 . . .; quæ incrementi ipsius n ratio et posthac servetur; sitque $\beta = \mu\dot{x} + \omega = \mu'\dot{x}' + \omega'$; fiet

$(B)2\dot{x} \dots - (B)\beta$	$ $	$(U)2\dot{x} \dots - (U)\beta$	$ $	$(A)2\dot{x} \dots - (A)\beta$
$B)4\dot{x}' \dots - (B)\beta$	$ $	$(U)4\dot{x}' \dots - (U)\beta$	$ $	$(A)4\dot{x}' \dots - (A)\beta$
$\dots$		$\dots$		$\dots$

Ubi pro quovis n , quodvis $m\dot{x}$, pro sequente n , mutatur in $2m\dot{x}'$, ω' vero (nisi $=0$ fiat) ipso $\dot{x}'$ idest dimidio prioris $\dot{x}$ minus evadet, et μ' ad summum $=2\mu+1$ erit, quia $\omega < 2\dot{x}'$ est; atque numerus terminorum duplicatur.

Schol. Manifesto autem quaevis serierum harum, terminis extremis gaudet, sed in nullarum columnarum serialium dictarum series ultima datur: differt igitur series ejusmodi a serie vulgari infinita, quae duobus terminis extremis haud gaudet.

V. Sit jam $(B)x$ notum, et quaeratur $(A)x$; atque $(u)m\dot{x}$ aequipolleat tam ipsi $(a)m\dot{x}$ quam ipsi $(b)m\dot{x}$; idest aut pro quovis n sit $(u)m\dot{x} = (a)m\dot{x} = (b)m\dot{x}$, (pro quovis m), (quo in casu erit $A=B=U$, nec U ad n dependet); aut pro quovis utvis magno N , detur tale n , ut in ejus linea horizontali, pro quovis valore ipsius m , sit

$$(u)m\dot{x} - (a)m\dot{x} < \frac{(a)m\dot{x}}{N}, \text{ et } (u)m\dot{x} - (b)m\dot{x} < \frac{(b)m\dot{x}}{N}; \text{ saltem nonnisi illis } m\dot{x} \text{ exceptis, quae}$$

in certis casibus in dato quopiam λ desinunt; siquidem tam istud λ , quam partes ipsorum B , U , A huic λ appertinentes ~ 0 . Fiet tum, substituendo valores ipsius m (si exgr. pro dato N sufficiat $n=9$, sitque $\mu+1=5$),

$$(u)9\dot{x} - (a)9\dot{x} < \frac{(a)9\dot{x}}{N}, \text{ et } (u)9\dot{x} - (b)9\dot{x} < \frac{(b)9\dot{x}}{N}$$

$$(u)8\dot{x} - (a)8\dot{x} < \frac{(a)8\dot{x}}{N}, \text{ et } (u)8\dot{x} - (b)8\dot{x} < \frac{(b)8\dot{x}}{N}$$

.....

$$(u)5\dot{x} - (a)5\dot{x} < \frac{(a)5\dot{x}}{N}, \text{ et } (u)5\dot{x} - (b)5\dot{x} < \frac{(b)5\dot{x}}{N}$$

Eritque manifesto summa columnae verticalis prioris, U , sequentis A , 3tae erit $A:N$, 4tae U , 5tae B , ultimae $B:N$; fietque

$$U-A < \frac{A}{N}, \text{ et } U-B < \frac{B}{N}; \text{ adeoque}$$

(pro A, B omnino finitis) $U \sim A$, ac $U \sim B$. Consequ. $A=B$, nempe $(A)\gamma - (A)\beta = (B)\gamma - (B)\beta$, adeoque $(A)\gamma = (B)\gamma + (A)\beta - (B)\beta$. Reperitur autem $(A)\beta$ modo sequente: si dicta et de valore h ipsius x placeat ut de γ valeant, et constet $(A)h = a$ esse; erit

$$(A)h = a = (B)h + (A)\beta - (B)\beta; \text{ adeoque} \\ (A)\beta = a - (B)h + (B)\beta; \text{ atque } (A)\gamma = (B)\gamma + a - (B)h + (B)\beta - (B)\beta = (B)\gamma + a - (B)h.$$

Quum igitur $(B)\gamma$ et $(B)h$ nota sint, $(A)\gamma$ innotescit. Scribitur autem $(A)x = (B)x + \text{const.}$; quum $(A)\beta - (B)\beta$ de quovis valore ipsius x , de quo dicta valent, idem $a - (B)h$ sit.

Dicique potest $(B)x$ *functio summatrix*, et $(U)x$ *functio mediatrice*.

VI. Si et variables, $y, z \dots$ certa lege cum quovis $m\dot{x}$ posita fuerint, cujusvis illius y , quod cum aliquo $m\dot{x}$ ponitur, differentia ab illo y , quod cum $(m-1)\dot{x}$ ponitur, designetur per y ; idem de $z \dots$ intelligatur, atque $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \dots$ semper simultanea accipiantur; potest illud y quod cum $m\dot{x}$ ponitur, per $y_* m\dot{x}$ denotari.

VII. Dicuntur $(a)m\dot{x}, (u)m\dot{x}, (b)m\dot{x}$, idest $(A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x}, (U)m\dot{x} - (U)(m-1)\dot{x}, (B)m\dot{x} - (B)(m-1)\dot{x}$ *differentialia vera* functionum $(A)x, (U)x, (B)x$. At si detur tale $(u')m\dot{x}$, quod ipsis $(a)m\dot{x}$ et $(b)m\dot{x}$ sensu dicto aequipolleat, atque ita expressum sit, ut si in eo ubique x pro $m\dot{x}$ (et si adfuerit, y pro $y_* m\dot{x}$ etc.) ponatur, in nullo termino litera punctata

per aliam punctatam multiplicata occurrat: dicitur $(u')x$ breviter *differentiale* tam ipsius $(A)x$ quam ipsius $(B)x$; atque $(A)x$ imo et $(B)x$ (quae nonnisi constante differunt) dicitur *integrale* ipsius $(u')x$. Omniaque hic a valore β ipsius x usque ad γ (juxta dicta) intelligantur.

VIII. Aequipollent autem (sensu dicto)

$$(a)m\dot{x}, (u')m\dot{x}, (b)m\dot{x}; \text{ si } \frac{(u')x}{(a)x} \sim 1 \text{ et}$$

$$\frac{(u')x}{(b)x} \sim 1. \text{ Namque valores horum pro certis}$$

quibusvis valoribus ipsius x (aut plurium variaribilium, si adfuerint), ab n dependent; atque tendentia ad limitem 1 id significat, quod pro quovis utvis magno N detur tale n , ut sit $\frac{(u')x}{(a)x} - 1$

$$< \frac{1}{N}, \text{ et } \frac{(u')x}{(b)x} - 1 < \frac{1}{N}; \text{ hinc autem fit}$$

$$(u')x - (a)x < \frac{(a)x}{N}, \text{ et } (u')x - (b)x < \frac{(b)x}{N}.$$

Atque jam moveatur punctum a 0 usque ad finem ipsius γ , item a 0 usque ad finem ipsius β (si hoc non $=0$); et quaeratur ubique, quodnam n pro dato N satisfaciat illi x quod eousque determinatum est? respondebitur semper cum aliquo finito n . Unde manifesto dabitur numerus finitus quemvis dictorum finitorum superans; accipiatur tale n' , quod hunc quoque superet, et sit potentia binarii integra. Et manifesto si γ per n' dividatur, ut sit $\dot{x} = \frac{\gamma}{n'}$; valebit hoc n' pro linea horizontali illa,

in qua $n=n'$ fit, eritque idem n , pro dato N pro omnibus m lineæ ejusdem tale ut requiritur (in V)

Siquidem datur λ (p. eadem), exceptionem hanc in summis nihil inducere patet.

IX. Si $(b)x = (uv \dagger pr \dots) \dagger \omega$, (ubi terminus quivis praeter unum et ω , 0 denotare potest),

atque $\frac{\omega}{(uv \dagger pr \dots)} \rightsquigarrow 0$; tum cuicunque quantitatum in $(uv \dagger pr \dots)$ occurrentium, substituatur aequale, aut (per pag. 80...) tale, ut quotus e substituto per id cui substituitur, $\rightsquigarrow 1$, dum $n \rightsquigarrow \infty$, dicaturque k id, quod post substitutiones dictas quotvis ex $(uv \dagger pr \dots)$ factum

est; erit $\frac{k}{(uv \dagger pr \dots) \dagger \omega} \rightsquigarrow 1$; eritque k si forma requisita gaudeat, differentiale ipsius $(B)x$

Exgr. Si $(B)x = x^2$; erit $(b)x = 2x\dot{x} - \dot{x}^2$,

atque $\frac{-\dot{x}^2}{2x\dot{x}} \rightsquigarrow 0$; adeoque $2x\dot{x}$ differentiale est.

X. Pro $(A)x$ functio talis $(U)x$ ab n dependens quaeritur, ut $U \rightsquigarrow A$, et $\frac{(u)x}{(a)x} \rightsquigarrow 1$.

Saepe $(A)x$ nec in concreto (uti figura quaequam) datur, et tum dari $(A)x$ demonstrandum est: pro tali plurimisque casibus, quaeruntur duae functiones finitae $(V)x$ et $(U)x$ ab n dependentes, ut sit $V > A > U$, et $V - U$

$\rightsquigarrow 0$ (dum $n \rightsquigarrow \infty$) adeoque $U \rightsquigarrow A$, (quo pacto et A per limitem datum sit); sitque

$(v)x > (a)x > (u)x$, et $\frac{(v)x - (u)x}{(u)x} \rightsquigarrow 0$, adeoque

et $\frac{(a)x - (u)x}{(a)x} \rightsquigarrow 0$. Erit enim

$\frac{(u)x}{(a)x - [(a)x - (u)x]} \equiv 1$. Consequ $\frac{(u)x}{(a)x} \rightsquigarrow 1$

SCHOLION: in quo partim dicta illustrantur; partim methodi (p. 183) (*ubi post* $(A)(x+i)$ *in numeratore, —* $(A)x$ *per errorem omissum est*) idea exponitur; atque exemplis applicatio methodi utriusque ostenditur; inter quae et *error calculi* (p. 220 et 222) *corrigitur*.

1-mo Accipiat in posterum (nisi aliud monitum fuerit) $\beta=0$ (p. LXI) vel $\gamma>\beta$ et utrumque +ve aut utrumque -ve: atque si commensurabilia fuerint, sitque exg. $\gamma=9u$, et $\beta=4u$, accipiat primum $n=9$, et sequentia n sint 2.9, 2.2.9, 2.2.2.9... (p. LXII); si vero incommensurabilia fuerint, poterunt pro n accipi 2, 4, 8...

2-do Patet seriem ex $(A)x$ derivatam esse seriem incrementorum functionis (a β usque ad γ) ipsis $\dot{x}$ respondentium; numerumque terminorum esse $n-\mu$, et $(a)m\dot{x}$ incrementum mto $\dot{x}$ respondens esse.

3-tio. Aequipollentia termini $(u)m\dot{x}$ seriei cuiuspiam S' cum termino generali $(a)m\dot{x}$ seriei incrementorum ex $(A)x$ functione abs. derivatae S , per $(u)m\dot{x} \cong (a)m\dot{x}$ designari potest; atque sine aliquo (p. LXIII) ope seriei sic definiri potest: si S et S' fuerint series terminorum numero aequalium, ita ut cuivis mto $\dot{x}$ duo termini simultanei, et cuivis alii alii respondeant; atque pro utvis magno N , detur tale n , ut pro eodem n quivis termini $(u)m\dot{x}$ et $(a)m\dot{x}$ fuerint sibi invicem respondentes simultanei, sit $(u)m\dot{x} - (a)m\dot{x}$ aut $=0$ aut $< (a)m\dot{x} : N$, saltem si non de omnibus valeat, exceptorum summa ~ 0 , dum $n \sim \infty$; tum dicitur $(u)m\dot{x} \cong (a)m\dot{x}$.

Patetque esse S' aut $= A$ aut $\sim A$; adeoque si et $(B)x$ functio abs. adfuerit; atque $(u)m\dot{x} \cong (b)m\dot{x}$: esse etiam S' aut $= B$ aut $\sim B$; consequ. esse $A=B$. Unde etiam S' series mediatrice, et $(u)m\dot{x}$ terminus mediator sive sensu generaliore differentiale cuiusvis ipsorum $(A)x$ et $(B)x$,

sive alterutrius tantum, si sola consideretur, dici possunt;

4to. Quamvis igitur expressio quaevis termino generali seriei incrementorum functionis abs. aequipollens, sensu generali differentiale functionis illius, et haec ipsa *integrale* illius dici possint: expressio tamen quam simplicissima quaeritur: atque *differentiale* sensu stricto non nisi talis expressio dicitur, in cuius termino quovis unica litera punctata eaque in prima potentia est, et coefficientens ejus pro quovis dato x functio absoluta est.

At vero expressio talis ita intelligenda est: ut omnes literae valoribus simultaneis quibus ad finem cujusvis $m\dot{x}$ gaudent, accipiantur; punctata vero semper et alibi, sit incrementum ejus, quod littera illa sine puncto significat, sub mto $\dot{x}$ factum.

3tio Per $(a)x$ (p. LXV) autem intelligatur $(A)x - (A)'x - \dot{x}$; ita ut in hoc ipsi x quivis valor pro aliquo n sub formam $m\dot{x}$ cadens substitui possit; ita tamen ut quivis utvis crescente n constans maneat, ipso m quoque eatenus mutato, atque x semper $m\dot{x}$ sit. Si vero $(A)x = z$ sit, patet z ipse $m\dot{x}$, et $\dot{z}$ respondere mto $\dot{x}$, atque $(A)(x - \dot{x})$ esse $= z - \dot{z}$; adeoque si exg. $(C)x = z^2$, esse $(c)x = z^2 - (z - \dot{z})^2$.

Quodsi jam pro quovis dicto x (a β usque ad γ) sit $[(A)x - (A)(x - \dot{x})] : \dot{x} = \text{vel} \sim (D)x$, et $(D)x$ functio abs. sit, semper finita nec 0^a (non nisi ipsis x in certis punctis discretis desinentibus exceptis): erit $(A)x - (A)(x - \dot{x}) : \dot{x} (D)x = \text{vel} \sim 1$ (saltem praeter puncta dicta): itaque per fluxum puncti quaerendo (juxta p. LXV) pro quovis tali x , quodnam n pro dato N satisfaciat; dabitur tale n , pro quo eodem sit $\dot{x} (D)m\dot{x} - (a)m\dot{x}$ aut $= 0$ aut $< (a)m\dot{x} : N$ (saltem praeter dicta); adeoque $\dot{x} (D)x$ aequipollebit ipsi $(a)m\dot{x}$, et differentiale erit: $(D)x$ autem *derivata* ipsius $(A)x$ dici potest quoad x , si $\dot{x}$ fuerit in denominatore; quod etiam omissum subintelligi potest; at si non quoad varia-

bilem abs. fuerit, annotandum est. Sivero derivata haec *prima* dicatur, derivatae k tae derivata, $(k+1)$ ta audit; et $(A)x$ functio primitiva k ta derivatae k tae dicitur, per $\int^x$ praepositum, aut si $k=1$, per $\int$ designata. Differentiale per d , derivata k ta per J^k , aut si $k=1$ per J , aut si quoad z sit per zJ^k praepositum denotari potest; et si hoc $=q$ fuerit, $\int q$ integrale ipsius qz , et $z\int^x q$ functionem cujus derivata k ta duoad z est q , denotare potest.

Differentialium altiorum apparatus derivatis altioribus superfluous fit.

Ut res clarior fiat: denotet v velocitatem, s spatium, w vim continuo agentem (p. 201 et 216), singula ad finem temporis t variabilis abs. intelligendo. Designeturque cujusvis variabilium valor qui ad finem alicujus t aut $t-i$, vel mt aut $(m-1)t$ est, praeponendo literam germanicam nominis ejusdem majorem clausam, litera punctata autem minori clausa denotetur. Si jam dicatur $vt=ds=d$, sive $v=J_s$; intelligatur $i(B)mi \equiv (\int)mi$ et pro quovis dato t esse $[(S)t-(S)(t-i)] : i \sim (B)t$. Hinc etiam s talis functio est, cujus derivata v est, idest $\int v \equiv s + (\text{const. quae tamen et } 0 \text{ esse potest})$.

6to Nempe functiones absolutae nonnisi constante c differentes, differentialibus aequipollentibus; et differentialia aequipollentia integralibus nonnisi constante differentibus gaudent.

Nam $(A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x} = (A)m\dot{x} + c - [(A)(m-1)\dot{x} + c]$
Quoad alterum autem: sit $(q)x \equiv (a)x$ et $\int (q)x$ sit $(C)x$; erit $(C)x - (C)\beta = (A)x - (A)\beta$
adeoque $(A)x - (C)x = (A)\beta - (C)\beta$, quod constans est.

7mo. Si (p. LXIV) $(A)\beta$ immediate datum fuerit, et $(A)\beta - (B)\beta = \text{const. datum erit. Si vero (ibidem) pro } h=0 \text{ sit } (A)h=a$; valeantque dicta a valore 0 ipsius x usque ad β , erit $(A)\beta - (A)0$

$\equiv (B)\beta - (B)0$; atque hinc $(A)\beta - (B)\beta = a - (B)h$, ut ibidem.

8vo. Methodus altera eodem redit, breviterque in sequentibus consistit.

1. Si pro quovis valore determinato et non 0 ipsius x , sit $[(A)(x+i) - (A)x] : i \sim (D)x$, dum $i \sim 0$; denotante $(D)x$ functionem absolutam valoris finiti et non 0 (saltem ni x in certo puncto, aut certorum discretorum aliquo terminetur; dici posset $(D)x$ *limes augmentalis*; facileque patet hoc idem esse quod derivata superius erat: nempe $\dot{x}$ pro i ponendo, $(A)(x+\dot{x}) - (A)x$ et $(A)x - (A)(x-\dot{x})$ duo incrementa proxima sunt, quorum prius per alterum divisum ~ 1 .

2. Porro functiones nonnisi constante differentes limite augmentali eodem gaudent; et limiti augmentali functiones primitivae nonnisi constante differentes respondent.

Nam $(A)(x+i) + c - [(A)x + c] = (A)(x+i) - (A)x$. Quoad alterum autem: functio primitiva $\succ$ aut $\prec (A)x$ esse nequit; si enim $k(A)x$ esset; limes fieret $k(D)x$; quum $(D)x$ (praeter puncta discreta) valoris determinati finiti et non 0 sit.

3. Hinc si functio $(A)x$ quaeratur, et reperiatur functio nota $(B)x$ talis, ut limite augmentali (quoad eandem variabilem) eodem gaudeant: erit $(A)x = (B)x + \text{const.}$

Subit igitur heic limes augmentalis, superius dictae seriei mediatricis vicem.

4. Constans autem sic reperitur: si pro quovis x (a β usquead γ) sit $(A)x = (B)x + \text{const.}$ et sit $(A)h = a$; erit $(A)h = (B)h + \text{const.} = a$; adeoque $\text{const.} = a - (B)h$, ut supra.

5. Limes dictus methodo de differentiali dictae analogae quaeritur.

9no. *Exempla pro methodo utraque:*

1. Pro coordinatis rectangulis derivata areae $(A)x$ in plano, est ordinata y , et differentiale est $\dot{x}y$. Sit enim exgr pro ordinatis crescentibus (pLXVI)

$(V)x$ summa rectangulorum e quovis $\dot{x}$ et ordinata e fine ejus erecta, $(U)x$ autem sit summa rectangulorum item e quovis $\dot{x}$ et ordinata ex initio ejus erecta: erit $V > A > U$, et $(v)x > (a)x > (u)x$, atque $(v)x:(u)x \sim 1$, adeoque $(v)x:(a)x \sim 1$; sed $(v)x:\dot{x} = y$: consequ. $(a)x:\dot{x} \sim y$. Hinc si $y = px^k$, erit $(A)x = \int px^k$, quod (p. 205) est $= (B)x = ax^{k+1}:(k+1)$; constans enim $= 0$, quia pro $x=0$ fit $(A)x=0=(B)x$.

2. Pro (p. 201) est $ds = v$, et $ds = v \dot{t}$. Sit enim prius, w constans $= g$ (p. 217); sitque $(A)t = s$, et $(V)t$ summa spatiorum sub quovis $\dot{t}$ velocitate quae ad finem ejus est aequabiliter percursorum, $(U)t$ vero summa item sub quovis $\dot{t}$ velocitate quae ad initum ejus est, aequabiliter percursorum. Erit $(v)t = i(B)t$, et $(u)t = t(B)(t-i)$; atque $(v)t > (a)t > (u)t$, et $(v)t:(u)t \sim 1$, adeoque $(v)t:(a)t \sim 1$. Consequ. $i(B)t:t = (B)t$ limes ipsius $(a)t:t$ pro quovis dato t est; et v illi respondens derivata, atque $v \dot{t}$ differentiale est. Est autem $v = gt$, et $\int g t = \frac{t^2 g}{2}$ (p. 198).

Potest idem et juxta (p. 217) fieri, ubi $(m-1):m \sim 1$ ita intelligitur; quod detur tale n pro quovis dato N , utvis parvo t excepto, ut $(m-1):m - 1 < 1:N$ sit.

Si vero w non sit constans, sed exg. crescat continuo (p. 218); est $t(B)(t-i) + i^2(B)t > (a)t > i(B)(t-i) + i^2(B)(t-i)$. Sed prius per posterius divisum ~ 1 , et $(B)(t-i):(B)t \sim 1$; atque $i(B)t:(B)t \sim 0$. Consequ. $(a)t:t \sim (B)t$.

Pariter $\dot{v} \stackrel{o}{=} w \dot{t}$ (p. 219), adeoque $\dot{v}:i \sim w$ et quum ex $v \dot{t} \stackrel{o}{=} s$ sit $t \stackrel{o}{=} s:v$, substituendo fit $v \dot{v} \stackrel{o}{=} w s$. Consequ. $\int v \dot{v} = \int w s$, sive $v \int v = s \int w$ nempe functio, cujus derivata quoad v est v , et illa cujus derivata quoad s est w , non nisi constante differunt. Sed prius $= v^2:2$ (p. 198); itaque $v^2 = 2 \int w$; et exhinc, prius functio pri-

mitiva simul cum constante quaerenda, ut radix v obtineatur.

Exgr. Sit (p. 219 Fig. 25) problema motus difformiter accelerati. Est ibidem $w = r^2 g : x^2$, et $s = a - x$, adeoque $\dot{s} = -\dot{x}$, et $x \dot{s} = -1$. Itaque $w \dot{s} = -r^2 g \dot{x} : x^2$, et $w x \dot{s} = -r^2 g : x^2$; cuius integrale est $r^2 g : x + \text{const.}$, nam hujus derivata quod x est $-r^2 g : x^2$ (p. 198). Reperitur autem constans sic: pro $x = a$ est $v = 0$, adeoque et $v^2 : 2 = 0$; hinc $\text{const.} = -r^2 g : a$, atque $v^2 = 2 \int w x \dot{s} = 2r^2 g \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right)$. Couseq. $v = r \sqrt{2g \frac{a-x}{ax}}$

Pariter (p. 222) calculum error irrepsit. Est nempe vis ibi $zg : r$, et $s = r - z$; atque $z \dot{s} = -1$; adeoque $v^2 : 2 = z \int (-zg : r) = -z^2 g : 2r + \text{const.}$ Est vero pro $z = r$ velocitas 0, adeoque $v^2 : 2 = 0 = -rg : 2 + \text{const.}$ et $\text{const.} = rg : 2$. Couseq. $v = \sqrt{\frac{g}{r} (r^2 - z^2)}$; quod pro $z = 0$ fit $\sqrt{rg}$

Ubi notandum est: quod gr pro diversa unitate, facta diversa praebeat, adeoque vagum videri posset; at si factores concreti numero μ fuerint, radix μ ti gradus e facto semper eadem erit, dummodo tam factum quam radix quoad quamvis quidem sed eandem unitatē accipiatur. Nempe quoad $u = 1$ sit factum f , erit (p. 98.) quoad $ku = 1$ (denotante k quantitatem abstractam) factum $F =$

$f : k^{-\frac{1}{\mu}}$; atque si $\sqrt[\mu]{f}$ (quoad $u = 1$) sit r , erit (quoad $ku = 1$) $\sqrt[\mu]{F} = \sqrt[\mu]{(f : k^{\frac{1}{\mu} - 1})}$ (quoad $ku = 1$), et hoc

$$\text{est} = \frac{rk^{\frac{1}{\mu} - 1}}{k^{\frac{\mu - 1}{\mu}}} = r;$$

In exemplo praec. sunt 4 factores in numeratore, et duo in denominatore: Sed ibi quoque duo tantum manent; nam quantitas concreta per

concretam quotum constautem dat (Tom. II. p. 567)

Denique (p. 222) patet altitudinem velocitati minimae, qua globus verticaliter explodi deberet, ut nunquam redeat competentem, esse radium corporis coelestis.

3. Sit adhuc exemplum pro differentiali negativo et derivata negativa: *quaeratur nempe tempus lapsus per s arcum cycloidis.*

Si (Fig. 53) pro v scriberetur x , essetque haec variabilis absoluta, neglectoque s quod ibi est, denotet s viam a certo puncto cycloidis incipiendo, super eadem per gravitatem labentis puncti; respondeatque abscissa h puncto illi certo ipsius s , sitque y ordinata ipsius x ; atque tempus lapsus per s dicatur t , et v denotet velocitatem finalem ad finem ipsius t et imum ipsius s , spatiumque sub 1^o lapsu libero percursum denotetur per g .

Erat (p. LXXI) $t: \frac{s}{v} \sim 1$; itaque $t = \int \frac{\dot{x} ds}{v}$

sive $t = \int \frac{ds}{v}$; eumque in finem ds et v quae-

renda sunt. Est $v = 2\sqrt{g(h-x)}$; nempe lapsus non per plana inclinata compacta, sed per cur-

vam fit. Estque $ds = (1 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ (p. 262),

atque $dy = (2x^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}$ (326) ; adeoque

$$ds = \sqrt{2x^{-1}}$$

Consequ. $\frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{x^{-1}}{2g(h-x)}} = x^{\frac{-1}{2}} (h-x)^{\frac{-1}{2}}$

$$\sqrt{\frac{1}{2g}}$$

Estque hoc negativum; namque pro $h = nx$ tam s quam t est 0, sed a fine nti x usque ad initium ejus crescit arcus, et ut grave per eum

descendat, tempus requiritur; si igitur incrementa ista temporis a 0 incipiendo pro $(n-1)\dot{x}, (n-2)\dot{x}$... per ordinatas ad fines ipsorum $\dot{x}$ positas represententur, dicaturque ordinata $(C)x$; erit $(C)n\dot{x} - (C)(n-1)\dot{x} = 0 - i$, quod et de sequentibus patet.

$$\text{Erit igitur } t = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int x^{-\frac{1}{2}}(h-x)^{-\frac{1}{2}};$$

atque hoc $\cong \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \text{arc.} \cdot \cos. (1 - \frac{2x}{h}) + \text{const.}$
(p. 254) uti statim patebit.

Si vero $t=0$; tum $x=h$; adeoque $0 = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \text{arc.} \cdot \cos(-1) + \text{const.}$ Arcus $\cos -1$ est $= \pi$
Itaque $\text{const} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \pi$. Conseq. $t = \frac{1}{\sqrt{2g}} (\pi - \text{arc.} \cdot \cos. (1 - \frac{2x}{h}))$.

Si vere $x=0$; tempus lapsus per cycloidem usque ad punctum imum erit $\frac{\pi}{\sqrt{2g}}$; ubi $\sqrt{\frac{1}{g}}$ (quantacunque fuerit unitas) idem manet, ut antea.

Patet quoque tempus undevis idem requiri, ut grave ad imum usque delabatur.

P. 250 eadem prodibunt, etsi arcu z dicto abscissa x sit variabilis absoluta; eritque (p. 254) $\dot{z} \cong -d \cos z : \sin z$; pro $\cos z = 1 - (2x:h)$ vero $-d \cos z = 2\dot{x} : h$; estque $\sin z = \sqrt{(1 - \cos z^2)}$

Itaque $-d \cos z : \sin z \cong \dot{x} x^{\frac{-1}{2}} (h-x)^{\frac{-1}{2}}$. Conseq. hujus integrale est z arcus ipsius $1 - (2x:h)$ tanquam cosinus.

Plurium errorum haud animadversorum numerus adhuc sequentibus minuitur: praetereaquē additur methodus heterogenea in calculo tractandi simplex et intuitiva.

Tom. II. p. 365 per errorem omissum est: *excepto, si duorum priorum aut duorum posteriorum, alterutrum purum, alterum mixtum, et reliqua mixta fuerint; quod 4 casus praebet; in quibus quotos aequales esse posse e §. ibidem citato patet, haud valente regula.*

Error dictus semel commissus Tom. I. p. LVI repetitus est.

T. I. p. 17. *Pars indivellibilis potest etiam ita illustrari: quod sit pars ejusmodi totius T, quae ex T abstrahi potest, ut sine reliquo, cogitationis objectum esse queat, sed ipsa nec cogitatione ita avelli potest, ut reliquum sine ea cogitari queat.*

T. I. p. 21. §. 7. linea 3. *post quantitates A et B addi debet: nonnisi indivellibile utriusque commune habentes. Aut: si quantitatū A et B alterutra sit* $\frac{1}{2}$ *alteri aut portioni ejus; dicuntur A et B homogenea.*

T. I. p. 29 et T. II. p. 364. *mentio ∞ ti fit: in Arithmetica pura non aliam quantitatem praeter 0 et exgr. rectam (e Geometria petitam) tractante, non aliud ∞ intelligitur, nisi limes viae puncti e rectae puncto p in ea semper porro et ultra datum quodvis punctum moti. Quoad signa +, — ipsi ∞ to praeposita, conditio C (T. I. p. 23) locum haud habet quidem, sed pro viis quibusvis finitis, quarum alterutra exgr. ad dextram altera ad laevam describitur, C locum habebit initio p viae ad laevam, ad finem viae alterius posito, atque per — ∞ limes viae ex p ad laevam factae, per + ∞ autem limes viae ex p ad dextram factae intelligi potest.*

T. II. p. 97. *Si punctum ex A linea abscissarum in B sursum moveatur, via accipitur + va, si deorsum, — va; atque hic conditio C esse potest, ut quaeratur resultatum, quod fieret, si motus puncti deorsum e fine viae sursum factae poneretur.*

T. II. p. 361. *regula data, in arithmetica pura, aut ad puram reducta, clara est: si vero heterogenea in concreto accipiantur; regula (T. I. p. 106. 1.) data simplicior est. Atque non negativum solum, sed et mixtum radice gaudet.*

Tom. II. p. 174. l. 11. *adde solido. Unde et via minima inter 2 puncta superficiei sphaericae, in circulo maximo est.*

De methodo heterogenea in calculo tractandi.

Possunt quidem omnia in concreto tractari. Nempe

1-mo quaelibet quantitas speciei cujusvis determinationum $+$, $-$ aliqua, 2-do et simul determinationum quoad realitatem aliqua, affecta esse debet: nempe quoad operationem multiplicationis operationesque inde promanantes, cuius unitas positiva aut negativa attributa sit, prouti simplicius ad scopum visum fuerit. Duplex nempe unitatis dos est: ut quum mensura haud nominatur, ea subintelligatur positiva; atque ut operationibus dictis, prouti positiva vel negativa attribuitur, juxta regulam dictam inserviat. Exgr. $-\frac{2}{3}$ significat oppo-

situm ejus quod unitatis 3tiam bis continet; atque si hoc per a denotetur, $-a$ significat quantitatem eadem unitate sed negativa (quoad operationes dictas) praeditam (T. I. p. 105)

3-tio Quaevis expressio ita intelligatur; ut omnium terminorum praeter zerum (abstrahendo a determinatione) complexus, quantitas sit. Egr. si a spatium, b tempus, et a mult. per b sit S , atque b mult. per a sit T , et unitas spatii sit s , unitasque temporis sit t ; expressio $1+ab=s+S$ vel $t+T$, prouti a per b vel b per a multiplicatur.

Ita si $a=2s$, $b=3t$, et $a+ab=k$; erit $2s+2.3s=8s$; et utrinque per a dividendo, erit $1+3=4$ quoad quamvis unitatem, adeoque et quoad t ; eritque $t+b=4t$, et $b=3t$.

Sed simplicius fit, rem ad arithmetica puram reduciendo modo sequente.

1-mo Quantitatum omnium (et heterogenearum) quaevis Q , tali recta, ejus in calculo vices gerente, expressa consideretur, quae si unitas ipsius Q sit q , et β rectarum unitas sit, tale mensum ipsius β sit, quam Q ipsius q est. 2-do Nec in calculum alia unitas praeter $\pm\beta$ ulla admittatur; quasi omnes quantitates praeter 0 et rectam excluderentur.

Quo pacto factum unicum, quotusque (praeter 0 : 0) unicus erit, imo quantitates abstractae, de quibus (T. I. p. 37 39 40 97 --- et T. II. p. 336 et 337 ---) pro fundamento agere necesse fuit, in rectas mutantur.

Patet etiam: quod si prodierit exgr. Q (tanquam recta ejus vices gerens) $=2\beta$, sit Q ipsum $=2q$.

P. LXXIV. non solum post $\sqrt{\frac{1}{2g}}$ omissum

est *non*; sed g ex toto omitti debuisset: nam $\pi:\sqrt{2g}$ nonnisi pro $g=1$ valet; at $\pi:\sqrt{2}$, nempe 3, 14...: 1, 41... pro quavis unitate valet modo sequi. Si quid de quavis unitate indeterminata F' demonstretur, et unitas quaesiti x dicatur f' pro $F'=1$, atque prodeat egr. $x=(2:3)F'$; tum pro casu speciali, si dum generale F' specialiter F fit, generale f' specialiter f fiat; erit $x=(2:3)f$.

Nempe certa unitas dependet ab altera: egr. si pro temporis unitate ponatur τ , et pro rectorum unitate s , via in certo loco sub $\tau=1$ libere labentis: erit unitas velocitatis illa, qua sub τ aequabiliter s describeretur. Applicando ad motum libere labentis; ubi spatia sunt uti temporum (atque etiam uti velocitatum finalium) quadrata, estque velocitas ad imum spatii cujusvis tanta, ut ea sub tempore lapsus duplum spatii illius describeretur aequabiliter; atque hinc si tempus T , spatium S , et velocitas finalis v sit: erit ($s=1$): $S=(\tau=1)^2:T^2$; item ($s=1$): $S=(2s=2)^2:v^2$.

Itaque $T=\sqrt{S}$, et $v=\sqrt{4S}$; ubi radice quoad $s=1$ extracta, prius numerum ipsorum τ dabit, sub quibus labens, spatium S describit, posterius numerum ipsorum $s=1$, quae velocitate quae ad imum ipsius S est, aequabiliter sub $\tau=1$ describerentur.

Si jam pro spatii unitate ponatur via sub $\tau=1$ libere labentis: erit (p. LXXIII.) $v=2\sqrt{s(h-x)}$, et prodibit tempus quaesitum $=(\pi:\sqrt{2})\tau$ in genere; at si specialiter egr. $s=1=9g$ fiat, $\tau=3''$ erit, et pro $s=kg$ (quant. abstractam denotante k) dabit $\sqrt{kg}$ quoad $g=1$ accepta radice numerum secundorum, quibus

$\tau = \text{est}$; unde fiet $(\pi : \sqrt{2})\tau = (\pi : \sqrt{2}) \cdot \sqrt{k}$; quod item $= 3, 14 \dots \sqrt{(s : 2g)}$.

Scholion. Sit fas quoad unitatem, et conceptus primarios breviter referre. Conceptus construere (abstrahendo, et conjungendo haud contraria, ac comparando) fas est: donec aliud clarius elegantiusque, quo systema aequae concinnum firmumque stabiliatur, prodeat.

Hoc pacto quantitates, cum certis qualitatibus connexae, et cum iis suscipiendae operationes oriuntur: quaerique potest; quodnam sit certarum quantitatum certis qualitatibus praeditarum per certas operationes resultatum? item pro certo resultato, quaenam quantitates cum quibus qualitatibus connectantur, et quae operationes cum iis suscipiantur?

Ita pag. 27. seriei terminus quivis, *numerus* quoad *u* (*unum* ab *unitate* distingvendum) dicitur: at si cui *o* et *u* quoque numerum dici absonum videatur, aliud nomen commune dari potest; idque cum ceteris fieri potest.

Ita qualitates *oppositorum*, earumque cum quantitatibus conjunctio; atque hinc *additionis*, et ex hac *subtractionis* operationes construuntur.

Conceptus $\oplus$ et $\ominus$, e *demptione* oriundus, construi modo sequi. etiam potest: si *A* tali qualitate *Q*, et *B* tali qualitate *q* praedita ponantur: ut pro certa conditione *c* accipiendum resultatum sit *o* si $A=B$, fecus autem id cum qualitate *Q* aut *q*, quod si non esset, resultatum *o* esset: tum *A* cum *Q*, et *B* cum *q* dicuntur (posito *c*) *opposita*.

Ita fit mater conceptuum cardinalium, operatio, qua aliquid quoad certam *mensuram* *mensurari* dicitur, cum *imagine* resultatum operationis exhibente: atque ex omnibus *mensurae primariae, mensurationis primariae, et imaginis*

mensurationis primariae quoque, constructio; quamvis verba ista hic altiori sensu quam in vita communi veniant. Nempe statuere fas est.

1-mo. Ut certa quantitas U sit *mensura primaria* ab omnibus illi aequalibus quoque distincta, nec cum ulla earum alia permutetur, atque $\oplus [U]$ significet id ipsum] cum qualitate $\oplus$, et $\ominus [U]$ item illud ipsum cum qualitate $\ominus$.

2-do. Ut pro quavis quantitate tractanda figatur, ad casus operationum constructarum: non solum cum quam qualitatibus $\oplus$ et $\ominus$ conjuncta spectetur; sed etiam quoad quam unitatem (nempe $\oplus$ vam vel $\ominus$ vam) mensuretur, dum primaria ejus mensuratio praecipitur: atque eatenus aliae unitate $\oplus$ va, aliae unitate negativa praeditae distingvantur; exg. posteriores, quae *imaginariae* dici solent, (a prioribus quae *realia* dici solent) alio egr. rubro colore distingvi possent, aut signo * ad laevam supra-posito. Atque tam priores quam posteriores *purae*, connexae vero *mixtae*, dici possunt.

3-tio. Quum vero sive expresse ipsius $\oplus [U]$ aut ipsius $\ominus [U]$ mensuratio primaria praeciperetur; id quoad $\oplus [U]$ fiat: adeoque tam $\oplus [U]$ quam $\ominus [U]$ ita dicta realia sint.

4-to. Ut mensum quoad mensuram magis innotescat: statuatur pro resultato *mensurationis* imago responsiones ad 3 quaestiones sequ. exhibens; post I scribatur quantumnam sit mensum quoad mensuram? post II vero, num simul sint $\oplus$ va vel $\ominus$ va, aut non? post III autem, num simul gaudeant unitate $\oplus$ va vel $\ominus$ va, aut non? scribaturque eatenus post II et III, *Ita* vel *Non*. Abhinc et mensurationis mixtae quoad qualemvis, et purae quoad mixtam imagines item lege certa construuntur.

5-to. Si imago mensurati b quoad a fuerit aequalis imagini mensurati B quoad A , dicatur b quoad a *aequimensum* ipsi B quoad A .

6-to. Sivero A unitatem ipsius B denotet: dicatur b quoad a ipsi B *aequimensum*; nempe dum mensura haud nominatur, *primaria* mensuratio intelligatur, prior respectiva quoad a est: operatio qua b ex a et B quaeritur, *multiplicatio*, et b *factum* ex a per B audit; est quidem a *mensura posita*, B vero *primario mensum*.

7-mo. At quum si factores egr. rectae fuerint, rectam dent pro facto (Tom. II. p. 50); imo etsi permutentur, in omni casu factum idem sit, praeter casum unicum (si nempe a unitate $\dagger$ va et B $_$ va gaudeat): ut ordo factorum dictorum in nullo casu factum mutet, statuitur; ut imagines mensurationis (in 4) unica exceptione aequales sint; nempe in casu plane dicto, post II in primaria et in respectiva mensuratione contraria stent.

8-ro. Porro ad quantitates e qualibusvis puris complexas, conceptus multiplicationis facile construitur.

9-no. Si verò γ factum ex β per α fuerit; pronum est; e γ tanquam posito facto, et alterutro ipsorum α et β quaerere hujus socium: dici solet haec operatio *divisio*, et quaesitum *quotus*; *duae* vero sunt *species* in genere, prouti *mensura respectiva*, aut *primario mensum* quaeritur. Dicatur posterius *quotiens*.

10-mo. Atque si duo quotientes aequales sint: fit *quotientium aequalitas*; et fas est sive hoc, sive (5) *proportionem* dicere, at generaliter utrumque haud idem est, ut infra patebit.

11-mo. Unde passus ad seriem (quae *geometrica* vocatur), cujus terminus quivis per sequentem divisus quotientem eundem dat. Atque

hac serie combinata cum serie (quae arithmetica dicitur) cujus termini cujusvis differentia a sequente eadem est; nascitur conceptus *potentiae*, *radicis* et *logarithmi*: nimirum

Origo ad indicam (qua numeri designantur) legem referri potest: nempe ... 111, 111 ... denotat seriem geometricam, in qua si 10 generaliter a sit, loco 1-*mo* ad laevam ab 1 (exclusive numerando) valor ipsius 1 est a , loco 2 do aa etc.; quae loca si terminis respondentia infra eos scribantur, serie locorum arithmetica pariter continuata utrinque in ∞ , ut terminis seriei superioris geometricae subscripti, quasi indices locales eorum sint: sequens imago orietur

... aaa aa a 1 (1: a) (1: aa) (1: aaa) ...
 ... 3 2 1 0 —1 —2 —3 ...

Ubi perspicere pronum est: quod index localis facti e quibusvis terminis superioribus, summa indicum localium iis respondentium sit; et quotientis ind. localis prodeat, subtracto indice locali divisoris ex ind. loc. dividendi.

Et quum index loc. egr. ipsius 1, sit 0 ies tantus quam ind. loc. ipsius a , et ind. loc. ipsius 1: aa sit —2:3ies tantus quam ind. loc. ipsius aaa etc.; designare hoc per $1 \equiv a^0$, et $1:aa \equiv$
 $\frac{-2}{-3}$

$(aaa) \frac{-2}{-3}$ etc. (nihil aliud intelligendo) fas erat. Patebat etiam idem esse; si pro .. 2, 1, 0, —1, —2 .. ponatur .. $2d$, d , 0, — d , — $2d$... Hinc passus erat pro a et d quasvis quantitates libere sumere, *capita* suarum serierum nuncupando, unde bracchia utrinque extendant. Passus ulterior est, in utraque serie a quovis ad proximum terminos numero eodem μ (quem postea in ∞ augere liceat) ita interserere, ut series superior geometrica, inferior autem arithmetica

maneant, atque ut termini inferioris, terminis superioris tanquam indices locales respondeant.

Et tum subvenit, duo ejusmodi serierum paria condere: alterum pro parte realium, et alterum pro parte imaginariorum, et quidem ita, ut capita serierum sint a, d $\times$ va et unitate $\times$ va praedita pro parte realium, et ${}^*p, {}^*q$ (quantitates p, q unitate — va praeditas denotantia) pariter $\times$ va pro parte imaginariorum purorum.

Atque quum si N, R termini seriei ipsius a ; et M, S termini serici ipsius *p , indicesque locales ipsorum N, R, M, S fuerint n, r, m, s ; et index loc. ipsius NR sit $n+r$, et ipsius MS sit $m+s$; pronum est pro indice locali ipsius NM quoque $n+m$ ponere, quasi ejusmodi facti, cujus alter factor pro parte realium indice loc. n , pro imaginariorum parte vero indice loc. m gaudet.

Et hinc (adinstar unitatis) pronum est capita serierum constantia statuere.

Atque si hoc pacto (pro valoribus ipsorum b, c, C unicus, indiceque loc. per $\lg$ designato) fuerit $\lg b = \lg C$, per $x = y$ intelligendo, aliquem valorem ipsius x alicui ipsius y aequalem esse: fas erat dicere, C quoad ind. loc. quasi *cies potentius* ipso b , et b quasi *cies impotentius* ipso C , designando per $C (=b^c)$, et $b (= \sqrt[c]{C})$, atque $c (= \lg C \text{ quoad } b; \text{ signo } (= \text{ob plurium valorum possibilitatem adhibito (p. 107)).$

Et tum priusquam capita figerentur; oritur *theoria potentiae generalis*: specialiter applicata; dum tale q et talis functio $\mathfrak{h} v = 1 + v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{2.3} \dots$ quod $= \mathfrak{C} v + \mathfrak{D} v$ (per $\mathfrak{C} v$ summam terminorum imparis numeri intelligen-

do) innotuerunt, ut $(\mathfrak{C}v)^2 - (\mathfrak{D}v)^2 = 1$, et $\mathfrak{h}^*q = {}^*1 = \cos q + {}^*\sin q$, et $\cos u + {}^*\sin u = \mathfrak{h}^*u$ sit. Unde quum si pro *p et *q ista *1 et *q accipiantur, quivis ind. loc. *i fuerit in serie infima, $\mathfrak{h}^*i$ terminum, cujus *i index est exhibeat, pariterque sit, si $\mathfrak{h}d$ sumatur pro a ; capita haec stabilire, et ob simplicitatem $d=1$ ponere (quo *systema naturale* baseos $\mathfrak{h}1=e$ dictae) in promptu erat.

Et tum demonstrato, quamvis quantitatem per $y\cos u + y^*\sin u$ exprimi posse, denotante y reale, et u viam puncti in peripheria radii 1; non solum quantitas ipsa, sed et potentia exponentis (sive realis sive imaginarii sive mixti), imo quantitatis cujusvis omnes logarithmi intuitui subjiciuntur: nempe abscissae in recta ab a acceptae ad dextram $\mathfrak{+}$ vae ad laevam $\mathfrak{-}$ vae expriment seriem arithmeticam, seriei geom. ipsius e respondentem, atque ordinatae y ad finem cujusvis abscissae ap $\mathfrak{L}$ res superius erectae sint termini seriei dictae ipsius e , abscissis respondentes; item sit altera quoque talis abscissarum linea cum ordinatis prioribus; et e cujusvis abscissae fine p fiat circulus radii 1, ad eam $\mathfrak{L}$ ris, atque e diametri in tabula erectae fine superiore punctum pone tabulam directum moveatur semper porro in ∞ , via ejus u dicta; et ubicunque in p' sit finis viae u , accipiatur ex p in recta versus p' indefinita $y\cos u$ (per y ordinatam illius ap, et cosinum pro radio 1 intelligendo). Idemque fiat cum altera abscissarum linea, eo solum discrimine, quod $y\sin u$ pro $y\cos u$ accipiatur; et quidem $y\cos u$ unitate $\mathfrak{+}$ va $y\sin u$ vero unitate $\mathfrak{-}$ va praedita sint. Facile patet prius formam stantem S , posterius vero jacentem dare, hocque ob intuitum clariorem colore egr. rubro ab illo nigro distingvi posse; exhibe-

rique posse quodvis Q per $y(\cos u + {}^* \sin u)$, quum pro quovis detur tale u et tale y . Omnes logarithmi naturales ipsius Q vero comprehenduntur in $ap + {}^* u + \widehat{v} {}^* \alpha$, si p denotet finem abscissae ipsi y respondentem, et $\alpha = 4q$ sit, atque $\widehat{v}$ sit nomen generale omnis numeri integri sive $\pm vi$ sive $-vi$, ita ut quivis (haudꝑ excluso 0) illi substitui possit.

Patet etiam formas dictas ad dextram crescere in ∞ , decrescere ad laevam semper similes: uti tabula e compendio hungarico postea edito sumta ostendit; ubi et dari supradictum q etiam mere analytice cum rigore demonstratur.

Notandum vero est; 1. quod quamvis $\mathcal{C}v$ pro $v = u\sqrt{-1} = \cos(u = v:\sqrt{-1})$; substituto *u idest $u\sqrt{-1}$ ipsi u in $v = u\sqrt{-1}$, absonum sit $\mathcal{C}-u$ cosinum ipsius *u dicere: quum in circulo radii 1, *cos* ejus fieret omni dabili major, si $u \sim \infty$. Interim et tunc $(\mathcal{C}v)^2 - (\mathcal{D}v)^2 = 1$: et $\mathcal{C}v$ ac $\mathcal{D}v$ functiones nomine proprio quidem dignae, sed a simplici conceptu geometrico distinctae, *cosformis* et *sinformis* dici possent.

2. Pag LVII et Tom II. pag. 369.) data definitio per signum $) =$ fit praecisa: nimirum si $\mathfrak{h}v = V$, tam dicitur $v (= \lg V$ (idest $\log nat V$; et si pro valoribus unicis ipsorum c, C, a fuerit $c \lg a) = \lg C$, dicitur $C (= a^c$, et $a (= \sqrt[c]{C}$, atque $c (= \lg C$, idest $\log C$ quoad basim a .

Ubi si $a = \mathfrak{h}h$, atque $C = \mathfrak{h}hc$; dicitur $1:h$ *modulus* syst. logarithmici pro basi a ; per quem nimirum $\lg C$ multiplicatum dat logarithmum quoad a . Unde si modulus is σ dicatur, $\mathfrak{h}(1:\sigma)$ est basis a .

Ratio signi $) =$ est: quod generaliter nec $c \lg a (= \lg C$ nec $\lg a (= \lg C:c$ sit. Nam si ali-

quis $\lg a$ fuerit k , et aliquis $\lg C$ fuerit kc ; erit $\lg a (=) k + \widehat{\nu}^* \alpha$, et $\lg C (=) kc + \widehat{r}^* \alpha$; adeoque ut $c(k + \widehat{\nu}^* \alpha) (= kc + \widehat{r}^* \alpha)$ sit, dari pro quovis ν talem integrum r oporteret, ut $c\nu = r$ sit; quod si egr. $c = 2:3$, et $\nu = 5$, fieri nequit, quia $2.5 = 3\nu$, adeoque $2.5:3$ integer esset. Pariter casus alter patet.

3. Si in serie geom. ... $1:aa, 1:a, 1, a, aa..$ et respondente arithm. ... $-2, -1, 0, 1, 2..$ termini inter quosvis proximos numero $\mu - 1$ interserantur: exponens superioris erit $a^{(1:\mu)}$, inferioris autem $1:\mu$; atque si prior sit x , ac integer r et $\omega < 1$ $\nmid$ va et $x^r < (N = x^{r+\omega}) < x^{r+1}$ fuerint, fiet $\frac{r}{\mu} < (\lg N = \frac{r+\omega}{\mu}) < \frac{r+1}{\mu}$.

4. Ex $A^m = B^n$ generaliter nec $A = B^{\frac{n}{m}}$ sequitur; egr. $(-1)^2 = 1^2$, sed ipsius -1 nullus valor est ulli ipsius $1^{\frac{2}{2}}$ aequalis (si $2:2 = 1$ accipiatur). Addendum itaque pag. LVII fuisset; si n, m inter se primi fuerint; aut potius dicendum: si termini seriei geometricae ejusdem cujus caput a sit, fuerint $A = a^n$ et $B = a^m$; tunc (prouti si $A = na$ et $B = ma$, dicitur A ipsius B tanquam mensurae $n(m)$ tum), pariter dicatur

$A (= B^{\frac{n}{m}})$, (si m non $= 0$); et $B (= \sqrt[m]{A})$, atque $n:m (= \lg A)$. Est quippe si $n = xm$ ponatur, ind. loc. ipsius A , $(n:m)$ ies tantus, quam ind. loc. ipsius B .

Ita pro c finito et non $= 0$, fit $\sqrt[c]{C (=) C^{\frac{1}{c}}}$

Namque $b (= \sqrt[c]{C})$ sequitur ex $\lg b = \lg C$ (LXXXII) Namsit k valor aliquis ipsius $\lg b$, et kc valor aliquis ipsius $\lg C$; erit et $kc:c = k$, adeoque

$(1:c)\lg C = \lg b$; itaque $b (= C^{\frac{1}{c}})$. Ita si $h (= C^{\frac{1}{c}})$, tum $(1:c)\lg C = \lg h$; itaque $\lg C = c\lg h$; et $h (= \sqrt[c]{C})$.

At si $c=0$, sitque $2^0=1$; erit $2 (= \sqrt[0]{1})$, sed 2 non est $1^{\frac{1}{0}}$, nisi sensu (p. 38), quo pro operationem ingredientium limitibus resultati limes nomine eodem insignitur: quatenus ex $\omega\lg b = \lg C$, pro $\omega \rightsquigarrow 0$ fieret $C \rightsquigarrow 1$, et $b (= 1^{\frac{1}{0}})$; et si $-\omega\lg b = \lg C$, fieret pro $\omega \rightsquigarrow \infty$, $b (= 0^{\frac{-1}{\infty}})$. Expressionum tamen hujusmodi saepe sensus vagus est.

5. In opere dicto, potentiae theoria generalis traditur, priusquam capita serierum figerentur: et quicumque index loc. fuerit i , id cuius i index loc. est, per φi designatur, quod postea $\mathfrak{h} i$ fiet. Adhibitisque signis $)=$, $(=$, $(=)$, (notando quod nonnisi ubi signum $=$ est, expressionum aequalium, quotvis valoribus gaudeant, aequales accipi debeant), plura praecisius determinantur: egr. generaliter $(\sqrt[d]{a})^c$ nonnisi $)= \sqrt[d]{(a^c)}$ dici potest; $a^b \cdot a^c$ tantum $=) a^{b+c}$ & cet.

Praeter potentiae theoriam autem ibidem *triplex vestitus*, quo quantitates utvis heterogeneas pro quaestionis statu ornatas tabulam adire praeceptum est, in eo consistit; ut rectarum unitas $U(\text{LXXVII})$ (quasi dux operationum cardinalium) eadem teneatur, donec aliud monitum fuerit: atque 1-mo quaevis quantitas utvis heterogenea, si egr. suae unitatis 2(3) tum fuerit, repraesentetur per rectam $2U:3$; item

Handwritten: 4^{to} Tom. II pag. 401

2-do cuivis ejusmodi repraesentanti, prouti ad scopum visum fuerit, detur qualitas $\boxplus$ vel $\boxminus$ quoad casum operationis, quae *additio* dicitur, indeque oriundae subtractionis. 3-tio quoad casum praecipiendae mensurationis primariae, et inde oriundorum, tribuatur illi $\boxplus$ *U* vel $\boxminus$ *U*; ut idem *U* huic operationi, jam cum qualitate $\boxplus$ jam cum qualitate $\boxminus$ inserviat. Operationes per numericas quoad unitatem expressiones pariter peragere fas est.

Pag. LXXVII. 4^{to}. Imaginis mensurationis constructae lex sequens ponitur. Si mixta quoad puram datam mensurauda sit: prius illa pura pars mixtae mensuretur, quae cum mensura eadem $\boxplus$ va vel eadem $\boxminus$ va unitate gaudet, et postmodum mensuretur altera pars; atque post I, II, III scribantur responsiones mensurationis ad laevam, et posterioris ad dextram.

Mixtae mensuratio primaria autem fiat ordine sequi: quaevis quoad suam unitatem mensuretur; sed ad laevam scribatur post I, II, III. partis unitate $\boxplus$ va praeditae imago, et ad dextram imago mensuratae partis alterius.

Quoad mixtam autem mensuratae (sive mixtae, sive purae) imago sit sequi. Sit mensura $a\boxplus^*b$, sitque mensurandum K , pro $K=P\boxplus Q$ (tam P quam Q mixtum denotantibus); si prius P quoad a , tum Q quoad *b mensurata imaginem eandem dent: imago ista accipiatur pro resultado mensurationis ipsius K quoad $a\boxplus^*b$.

Egr. Si $K=\boxminus c\boxplus^*d=P\boxplus Q$, facile prodit pro imagine aequali esse $P=\boxminus ax-\boxminus a^*y$, et $Q=\boxminus^*bx-\boxminus by$, atque $x=\boxminus d:\boxminus b\boxplus (abc-\boxminus a^2d):(\boxminus a^2b-\boxminus b^3)$, et $y=\boxminus (bc-\boxminus ad):(\boxminus a^2-\boxminus b^3)$.

Ut vero $P:a$ sit $= Q: ^*b$, accipiendum $P=\boxminus ax\boxplus^*a^*y$, et $x=\frac{d}{b} \boxplus \frac{abc-\boxminus a^2d}{a^2b+\boxminus b^3}$, $y=\frac{ad-\boxminus bc}{a^2+\boxminus b^2}$.

Q vero ut antea $= {}^*bx - by$; eritque $P: a = x + {}^*y = Q: {}^*b = (P + Q): (a + {}^*b)$; et $a(x + {}^*y) + {}^*b(x + {}^*y) = P + Q = K$; atque imago mensurationis ipsius K quoad $a + {}^*b$ eadem erit cum imagine mensurationis primariae ipsius $x + {}^*y$ (cum restrictione (LXXVIII) determinata.

Pag. 15. in lineis imis post *semper adest* A substituendum: in p vero aut *ultimum* A est aut *primum non* A ; et si in p non A fuerit, post p aliquandiu aut semper A , aut semper non A erit; nisi post p quodvis punctum p' tale fuerit ut inter p et p' tam A quam non A adsit. Fundamentum limitis, plura alia quoque expediens.

P. 153. Criterium divergentiae aliter in opere LXXXII dicto exponitur: pro $U_n = U_{n-1} + \frac{n-m}{n}$, est $m = n(U_{n-1} - U_n)$; et si $\frac{n U_{n-1}}{U_{n-1}}$ sive $\frac{(U_{n-1})^2}{U_{n-1} - U_n}$ non ~ 0 , series divergit.

Si vero ab aliquo termino porro m semper $\times$ et $>$ certo unitatem superante manet, series convergit. De conversione utriusque etiam, dictum ibidem est. Notandum vero quoad m , primum ipsius n valorem ibi accipi, ubi n prima vice $> m$ est. Pro $m=1$ (si primus terminus $= 1$ ponatur) fit $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots$, et pro $m=2$

(si duo priores termini 1 et 1 accipiantur fit $\frac{1}{2}$)
 $1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} \dots$ Quo majus m vero, eo ma-

jus subtrahitur ex n , eoque fit exponens minor, terminique minores; decrescenteque m contrarium evenit.

P. 154. In opere hung. dicto aliter demonstratur. Nempe si duarum serierum con-

vergentium termini t et u fuerint, summaeque terminorum usque ad p tum fuerint T et U ; atque t et T ab n (quod utvis augere liceat) dependentia sint, U vero et quodvis ipsorum u constantia maneant: tum si $t:u \sim 1$, nempe pro dato utvis magno N detur tale n idem pro omnibus dictis terminis, ut $t-u \leq u:N$, adeoque $t-u = fqu$ (per f fractionem veram $\frac{f}{q}$ nam vel $\frac{f}{q}$ nam, et $> ac <$ sensu (p. 31) intelligendo, atque q scribendo pro $1:N$): erit $T \sim U$; imo si terminorum post t_p sequentium summae (proprie summarum limites) fuerint τ et s , series ipsius u erit $U + s$, et series ipsius t erit $T + \tau$; atque $T + \tau - (U + s) \sim 0$ si $p \sim \infty$; nam $T - U \sim 0$, et tam τ quam $s \sim 0$, quum series convergentes sint; adeoque et $\tau - s \sim 0$; eritque $T + \tau \sim U + s$.

Quod $T \sim U$, patet, si columna ad dextram ponatur $= xqU$; eritque $x =$

$$\frac{f_1 u_1 + f_2 u_2 \dots + f_p u_p}{U}$$

$t_p - u_p = f_p qu_p$ Et si terminus in nume-
ratore is quo nullus major est, sit k , accipia-
turque $\frac{f}{q}$ ve et realiter: columna ad dextram
non erit $> pkqU:U$ idest $pk:N$; hoc autem
 ~ 0 ; nam sit $k = f_h u_h$, hoc $< u_h$ est, adeo-
que $pk < pu_h$; itaque finitum pro dato quovis p
est, N autem $\sim \infty$, quum N manente p et k
utvis augere liceat; si egr. pro dato utvis par-
vo λ , accipiatur $N > pk:\lambda$, fiet $pk:N < \lambda$; et
si detur tale n pro quibusvis terminorum di-
ctorum, accipi maximum eorum potest.

Applicatum hoc ibidem est ad demonst-
randum, quod $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ et $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \dots$ limite

eodem gaudent si $n \sim \infty$, et plura alia.

P. 186. Ex $(u)m\dot{x} - (u)m\dot{x} < (a)m\dot{x} : N$ (pro eodem n et hic) deducitur $U \sim A$. Sed evidentius in opere dicto, ponitur (ut antea) $(u)m\dot{x} - (a)m\dot{x} = f \varrho(a)m\dot{x}$, per f et hic fractionem veram sive $\frac{f}{1}$ nam sive $=$ nam ac $>$ et $<$ pariter sensu (p. 31) intelligendo, et ϱ scribendo pro $1:N$. Nimirum sit fas in gratiam tyronum quaedam jam supra dictorum magis necessaria hic quoque repetere.

I. Si quotcunque variables simultaneo positae fuerint, illa egr. x cujus certum valorem y per integrum $\frac{y}{n}$ dividere libet, dicatur *primaria*, $y:n$ per $\dot{x}$ denotato. Cujuscunque variabilis egr. y vero simul cum x mentio fiat, valor is ipsius y intelligatur, qui ad finem illius x est, y' autem denotet incrementum variabilis y illud, quod sub illo $\dot{x}$ nacta est, quod cum illo x terminatur.

Quatenus si $(A)x$ functio (ipsa quoque variabilis) dicatur u , denotabit $\dot{u}$ incrementum ipsi $\dot{x}$ cum x terminato respondens $= (A)x - (A)(x - \dot{x}) = u - (A)(x - \dot{x})$; unde $(A)(x - \dot{x}) = u - \dot{u}$. Denotetur $\dot{u}$ per $(a)x$.

II. Ex $(A)x$ autem per quaestionem primam (p. 179) substituendo ipsi x prius $n\dot{x}$, tum $(n-1)\dot{x}$ dein $(n-2)\dot{x}$... usque $\beta = (p-1)\dot{x}$ (tam p quam n integrum $\frac{y}{n}$ vum denotantibus), oritur series $(A)n\dot{x}$, $(A)(n-1)\dot{x}$, $(A)(n-2)\dot{x}$, $(A)(n-3)\dot{x}$ $(A)(p-1)\dot{x}$; unde quum illico pateat, quovis termino subtracto e praecedente, incrementum sequenti $\dot{x}$ respondens prodire, exgr. $(A)p\dot{x} - (A)(p-1)\dot{x}$ esse incrementum ipsius $(A)\beta$ sub $p\dot{x}$; in promptu fit incrementorum $p\dot{x}$, $p+1\dot{x}$ to $p+2\dot{x}$. . . $n\dot{x}$ respondentium series $(A)n\dot{x} - (A)(n-1)\dot{x} + (A)(n-1)\dot{x} - (A)(n-2)\dot{x}$. . . $+ (A)p\dot{x} - (A)(p-1)\dot{x}$; cujus term. generalis $(A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x}$ (p. 184)

per a_m , et summa (intermediis semutuo destruentibus) $(A)\gamma - (A)\beta$ per (A) denotari potest.

III. Si $(A)x$ et $(B)x$ ab n independentes fuerint, $(V)x$ autem dependeat ab n ; et $v_m : a_m \sim 1$, ac $v_m : b_m \sim 1$; nempe pro utvis magno N sit tale idem n , ut quodvis m accipiatur a β usque γ , sit $v_m - a_m = f_m \varrho a_m$ et $v_m - b_m = f'_m \varrho b_m$, tum $(A) = (B)$, adeoque $(A)\gamma = (B)\gamma + (A)\beta$. Nam

$$\begin{array}{ll} v_n - a_n = f_n \varrho a_n & \text{et } v_n - b_n = f'_n \varrho b_n \\ v_{n-1} - a_{n-1} = f_{n-1} \varrho a_{n-1} & v_{n-1} - b_{n-1} = f'_{n-1} \varrho b_{n-1} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ v_p - a_p = f_p \varrho a_p & v_p - b_p = f'_p \varrho b_p \end{array}$$

Et si in $(A)x$ cogitetur incrementum ipsius $(A)\beta$ ipsi $\gamma - \beta$ respondens, expressum per aream inter $\gamma - \beta$ et fines ordinarum a fine ipsius β usque finem ipsius γ , et ordinatas ad fines ipsorum β et γ contentam; sitque pro ordinatis omnibus finitis illa qua nulla major est, k ; accipianturque haec ut realis et $\ddagger$ va: 3 tia columna non erit $> pk : N$ (LXXXVII). At vero hic p crescet crescente n , attamen pk nunquam fit rectangulo ex k et $\gamma - \beta$ majus, atque $N \sim \infty$, si $n \sim \infty$. Consequ. limes ipsius (V) tam (A) quam (B) est; adeoque $(A) = (B)$.

IV. Potest vero γ utvis magnum accipi si dicta valeant; neque turbatur aequalitas, si parti ipsius $\gamma - \beta$ ad limitem 0 tendenti respondens incrementum quoque ~ 0 .

V. Si de $(A)x$ dicta et de $(K)x$ valeant: fiet $(K)\gamma = (B)\ddagger(K)\beta$; et prouti $(A)\beta$ vel $(K)\beta$ additur ipsi (B) , summa *integrale* (ipsius $(v)x$) quoad $(A)x$ vel $(K)x$ dici potest.

VI. Si $(a)x : \dot{z} \sim (C)x$ (pro hoc ab n independente): tum $\dot{z}(C)x$ *diferentiale* ipsius $(A)x$, et $(C)x$ *limes augmentalis* (primus), utrumque quoad z , et $q - 1$ ti limitis aug. limes ang.

dicatur q tns; signisque ${}^2d(A)x$, ${}^2J(A)x$, ${}^2J^q(A)x$ denotari, et differentialia altiora supervacanea reddi possunt.

VII. Praeter modum quo differentiale quaeritur: ut parum reddatur, plura in opere dicto demonstrantur.

P. 238. De *oscillatione ad latus* sermo est.

P. 264. In differentiali curvae salva re plures errores typographici facile corrigi possunt.

P. 454. l. 5. post *et simul* addendum est: *nil aliud cum plano illo utvis producto commune habenti.*

P. 446 l. 2 *a calce*: *sectio quarumvis binarum eadem* intelligatur. *Superficies* est, in qua punctum undevis innumeras vias habet, nec portio spatii inest: hicque talis supponitur, cujus nulla portio cum reliquo punctum solum commune habet; quae *planum* fit, si in ea quaevis *linea rediens* sphaerae communis portionem se facie utraque tegentem claudat.

P. 471. l. 7 *a calce*. Annulus e centro k aliter determinandus: moveatur nempe superficies sphaerica S' in se circa k : punctum aliquod ipsum k includens, lineam uniformam redeuntem describet.

Notandum autem, rectam planumque brevius quoque deduci posse.

Tom II. p. 399 error caculi est. Ita pag. 308 pro. N non > 18 , dum residuum > 13 , tunc est addendum 1.

Porro quoad paschata coincidentia notandum: quod quamquam annis J . et G . simul incipientibus aetates lunae diversas esse absonum sit: tamen retentis regulis tunc plane paschata coincidere non posse in opere hung. dicto ostenditur; data simul theoria hujus coincidentiae generali, temporeque quo ultimo atque iterum primo coincidunt determinato.

Ad pag LXXXVI notanda.

I. *Criterium convergentiae* nec (p. 308) $nU_n \sim 0$, neque ab *Auctore celebri* allatum $U_n : U_{n+1} : (U_n - U_{n+1}) \sim 0$, generale est: nam series cujus term. gener. $1:n \log n$ est, contra utrumque divergit, ut infra patebit.

II. Generale est a *Maclaurino* datum: nempe si pro $n=1+x$, et termino $n \rightarrow y$, area curvae pro $x \sim \infty$ limite finito gaudet, convergit series, si vero area $\sim \infty$, divergit: nimirum si termini rectangulis exprimantur, quorum bases sint unitates ab $x=0$ se invicem excipientes, altitudines autem ordinatae ad initia unitatum fuerint, summa seriei est $>$ quam area, sed excessus termino primo minor est; adeoque quaestio ad $\int yx$ reducitur.

III, Errat autem ex hoc fonte derivando pronuncians *Montucla*: quod si a, b, c generaliter tres terminos se invicem excipientes denotent, et $a.(b-c):(a-b) > c$ fuerit, converget series, si non, diverget. Namque tum pro a, b, c scribendo $1:\omega, 1:\omega', 1:\omega''$, si $\omega''-\omega' > \omega'-\omega$, fiet $\frac{\omega''-\omega'}{\omega'-\omega} = \frac{(\omega''-\omega')\omega\omega'}{(\omega'-\omega)\omega\omega'} > 1$; itaque $\frac{1}{\omega} \cdot \frac{(\omega''-\omega')\omega\omega'}{(\omega'-\omega)\omega'\omega''} > \frac{1}{\omega''}$, idest $\frac{a.(b-c)}{a-b} > c$.

Atque si terminus gener. fuerit $1:\frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{2^2} \dots + \frac{n-(n-1)}{2^{n-1}}$, et 3 termini se invicem

excipientes habeant denominatores $\frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{2^2} \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$, $\frac{n}{2} + \frac{n-1}{2^2} \dots + \frac{2}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$, $\frac{n+1}{2} + \frac{n}{2^2} \dots + \frac{3}{2^{n-1}} + \frac{2}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$; erit $\omega'-\omega =$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}; \text{ et } \omega'' - \omega' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}; \text{ atque posterius exce-}$$

dit termino ultimo ipsum $\omega' - \omega$; quamvis series divergat; namque incrementum denominatoris est < 1 et descrecit, quamvis si constans 1 esset quoque, uti pro term. gen. $1:n$, divergat.

IV. Si term. gener. ad $1:nn^h$ reducatur: pro $h=0$ fit term. gen. $1:n$; et si $h =$ fuerit, adhuc magis diverget series; si vero $h \sim 0$, tum n^h aut $\sim \infty$, aut non; in casu posteriore divergit series, nam si convergit tum $nU_n \sim 0$; quaestio igitur de altero casu erit. At sit prius $h > b$ (constantem $\mp$ denotante b): tum convergit series. Nam

Sit $n=1+x$, et $y=1:(1+x)^{-(1+b)}$, et arca sit $(A)x$; differentiale est $y\dot{x} = \dot{x}(1+x)^{-(1+b)}$, cujus integrale $(B)x = -(1:b)(1+x)^{-b}$; itaque $(A)x - (A)0 = (B)x - (B)0$, et quia $(A)0 = 0$, fit $(A)x = -1 \frac{1}{b(1+x)^b} - (-1 \frac{1}{b(1+0)^b}) = \frac{1}{b} - \frac{1}{b(1+x)^b}$, quod $\sim 1:b$ si $x \sim \infty$.

V. Prouti vero convergit vel divergit series, cujus terminus generalis est $1:n^a$, pro eodem a simul convergit vel divergit series cujus term. gener. est $1:nl^a$, vel $1:nll^a$ aut generaliter $1:nlll \dots l^a$, pro $l = \log 1$, ac $l = \log l$ et $l = \log l_{-1}$, atque l non < 1 .

$$\text{Nam sit } \frac{1}{10.l^a} + \frac{1}{11.l^a} + \frac{1}{12.l^a} \dots + \frac{1}{100.2} + \frac{1}{101.l^a} \dots + \frac{1}{1000.l^a} + \frac{1}{1001.l^a} \dots$$

(ubi l logarithmum numeri praecedentis denotat). Numerus terminorum a primo usque ad illum ubi 100 est, 90 et inde usque 1000 est 900, et

XCIII

ita porro; sitque priorum summa α , sequentium β et ita porro; atque ubivis multiplicetur primus (utpote quovis sequentium major) per numerum terminorum: fiet $\frac{1}{10} \cdot 90 > \alpha$, $\frac{1}{100 \cdot 2^a} \cdot 900 > \beta$

etc; adeoque $9 \left(1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} \dots \right) > \alpha + \beta \dots$

Si igitur series inclusa convergit, convergit et proposita. Si vero pro primo ubique ultimus (utpote quovis priorum minor) multiplicetur: fiet

$$\frac{90}{100 \cdot 2^a} + \frac{900}{1000 \cdot 3^a} \dots \text{ idest } \frac{9}{10} \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} \dots \right)$$

$< \alpha + \beta \dots$. Si igitur series inclusa divergit, et proposita divergit.

Atque si $\frac{1}{C_p \cdot l \dots} + \frac{1}{(C_p + 1) \cdot l \dots} + \frac{1}{(C_p + 2) \cdot l \dots} \dots$
dicatur A , et $\frac{1}{C_{p+1} \cdot l \dots} + \frac{1}{(C_{p+1} + 1) \cdot l \dots} + \frac{1}{(C_{p+1} + 2) \cdot l \dots} \dots$
dicatur B ; prouti A convergit

aut divergit, B quoque converget vel diverget: nempe C_0 denotet tantum quam 0, et C_m tantum quam 1 postscriptis C_{m-1} cifris; quo pacto $C_1 = 1$ cum C_0 cifra, $C_2 = 1$ cum C_1 idest 1 cifra, $C_3 = 1$ cum $(C_2 = 10)$ cifris et ita porro. Patet C_{p+1} esse $= 10^{C_p}$, adeoque $C_p = \log C_{p+1}$. Porro l significat hic logarithmum numeri antepositum, et 2 puncta post l denotant simul cum l , tale factum, in quo primus factor est l , et quilibet postea est logarithmus praecedentis, atque factorum numerus est uno minor quam qui ad imum ipsius C ipsum l praecedentis est, atque ultimus non < 1 ad α elevatus est.

Assertum patet sic. In serie B ipsi C_{p+1} semper 1 addendo, aliquando prodit $C_{p+1} \cdot 10$, tum $C_{p+1} \cdot 100$, dein $C_{p+1} \cdot 1000$ etc. Est vero numerus

terminorum a primo usque $C_{p+1}.10$, $C_{p+1}.10 - C_{p+1}$, inde usque $C_{p+1}.100$ est $C_{p+1}.100 - C_{p+1}.10$ et ita porro. Multiplicetur et hic prius ubique prius per numerum terminorum, sitque terminorum priorum summa k sequentium k' etc.; fiet $\frac{C_{p+1}.10 - C_{p+1}}{C_{p+1}.l..}$ idest $\frac{9}{C_p.l..} > k$ (nempe post

C_{p+1} sequitur C_p in denominatore); porro $\frac{C_{p+1}.100 - C_{p+1}.10}{(C_{p+1}.10).l..}$ idest $\frac{9}{C_{p+1}.l..} > k'$; (nempe $\log(C_{p+1}.10) = C_{p+1}$; quo continuato fiet $\frac{9}{C_p.l..} \left(1 + \frac{1}{(C_{p+1}).l..} + \frac{1}{(C_{p+2}).l..} + \dots \right) > k + k' + k'' \dots$

Si igitur inclusa series A converget, converget et B . Si vero in B ubique ultimus multiplicetur per numerum terminorum; fiet $\frac{C_{p+1}.10 - C_{p+1}}{(C_{p+1}.10).l..}$ idest $\frac{9}{10.(C_{p+1}).l..} < k$ (nempe C_{p+1} est $\log(C_{p+1}.10)$,

pariter $\frac{C_{p+1}.100 - C_{p+1}.10}{(C_{p+1}.100).l..}$ idest $\frac{9}{10.C_{p+2}.l..} < k'$, [nempe $C_{p+2} = \log(C_{p+1}.100)$], quo continuato fit $\frac{9}{10.(C_{p+1}).l..} \left(1 + \frac{1}{(C_{p+2}).l..} + \dots \right) < k + k' \dots$

Itaque si A divergit et B divergit. Consequ. quum de $p=2$ demonstratum sit, semper uno altius asurgere fas est.

VI. Hiuc autem criterium saepe expediens est sequens: quod si detur tale r , quod $\sim \infty$, convergit series, et si post certum terminum non fuerit $r > 1$, divergit. Nempe termino generali ad $1:nn^h$ reducto sit $n^h = l^r$ (nimirum $r = hl:l_1$, et si $r > 1$, sit $l^r = ll_1^{r'}$, et si $r' > 1$, sit $l_1^{r'} = l_1 l_2^{r''}$, et ita porro; fiet $n^h = l^r = ll_1^{r'} = ll_1 l_2^{r''} \dots$, et hinc l_k ad r_k elevatum fit $= n^h : l_1 l_2 \dots l_{k-1}$; itaque $r_k = \frac{hl - (l_1 + l_2 \dots + l_k)}{l_{k+1}} = \frac{(r_{k-1} - 1).l_k}{l_{k+1}}$

si et r_{t-1} ut antea r_t exprimatur). Si igitur $r_{t-1} = 1$ non ~ 0 , $r_t \sim \infty$; atque tum $r_{t-1} > 1 + \text{const}$; adeoque series convergit.

Datur autem pro quovis t et α finito tale h , ut $r_t = \alpha$ sit, et quodvis r antea sit $>$ et ~ 1 ; nempe pro $h = \frac{(l_1 + l_2 \dots + l_t + \alpha l_{t+1})}{l}$ fit hoc; egr.

$$r_t = \frac{l_t}{l_1} + \frac{l_5 + l_6 \dots + \alpha l_{t+1}}{l_1} = 1 + \text{tali quod} \sim 0.$$

Si vero l_p in expressione hac ipsius h desit, $l_{p-1} \sim 0$, et divergit series; egr. si in exemplo allato defuerit l_4 in numeratore, $r_t \sim 0$.

VII. Exponente per quem U_{n-1} multiplicatur ut U_n prodeat, $(n-m):n$ posito, fit $m = n - \frac{n U_n}{U_{n-1}}$, quod, si $\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{n-1}{n}$ fuerit, fit $= 1$,

datque terminum gener. $1:n$. Si vero $U_n : U_{n-1} < (n-1):n$ tum minus subtrahitur, et $m > 1$ fit. Si m non > 1 , divergit series; at pro $m > 1$ sed ~ 1 , potest convergens, potest divergens esse, quamvis $n^h \sim \infty$. Nempe si $h = l_1 : l$, tum $r = 1$, si $h = 1 : \sqrt{l}$, tum $r = \sqrt{l} : l_1 \sim \infty$ adeoque prius divergit, posterius convergit. Patet, quod $h \sim 0$, et $n^h \sim \infty$; sed quod $m >$ et ~ 1 , sic patet: $U_n : U_{n-1}$ in priore est $= \frac{n-1}{n} \cdot [(n-1)^{L_1:L} : n^{l_1:l}]$, cujus partis parenthesi

majori inclusae logarithmus (si per L intelligatur $\log(n-1)$ et $\log L$ per L_1) est $L_1 - l_1$ quod $=$ est, adeoque per quod $(n-1):n$ multiplicatur, < 1 est, itaque $m > 1$. Quod autem $m \sim 1$, inde constat; quod si $m = (2+v):2$ ponatur (pro $v \nlessdot$ et non > 1), patebit in sequ. quod si v non ~ 0 , tum constante majus maneat h et non ~ 0 .

VIII. Si $m > 1$ et non ~ 1 , tum h constante majus est seriesque convergit. Nimirum

exponens seriei fiet $n-m) : n \equiv [2(n-1)-v] : 2n$,
et pro termino primo $\equiv 1$, erit ntus $\frac{2-v}{4} \cdot \frac{4-v}{6} \dots$

$$\frac{2(n-1)-v}{2n} \equiv \frac{1}{nn^h} ; \text{ atque } n^h \equiv \frac{2}{2-v} \cdot \frac{4}{4-v} \dots$$

$$\frac{2(n-1)}{2(n-1)-v} = \left(\frac{1+v}{2-v} \right) \cdot \left(\frac{1+v}{4-v} \right) \dots$$

$$\left(\frac{1+v}{2(n-1)-v} \right) . \text{ Et hinc } n^h > \left(\frac{1+v}{2} \right) \left(\frac{1+v}{4} \right) \dots$$

$$\left(\frac{1+v}{2(n-1)} \right) ; \text{ adeoque } h \log n > \log \left(1 + \frac{v}{2} \right) +$$

$$\log \left(1 + \frac{v}{4} \right) \dots + \log \left(1 + \frac{v}{2(n-1)} \right) ; \text{ itaque } h$$

majus est membro dextro per $\log n$ diviso; dica-
tur σ dividendus, divisor fit (pro $n \equiv 1+x$)
area curvae notae pro $y=(1+x)^{-1}$; estque (II et IV)
area ista $\equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n-1} - (\varrho < 1)$;

$$\text{atque hinc } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{2(n-1)} \equiv \frac{1}{2} (\log n + \varrho)$$

Est autem $\sigma \equiv$ (per pag. 160)

$$v \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{2(n-1)} \right) - \frac{v^2}{2} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} \dots + \frac{1}{[2(n-1)]^2} \right) + \frac{v^3}{3} \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} \dots + \frac{1}{[2(n-1)]^3} \right) \dots$$

Ubi si series
suprema s di-
catur; $\varrho > 3\delta : 4$
erit. Nam cujus
vis seriei ver-
ticalis termini

fuerint $a, -b, c, -d$, summa est $> a-b$, et $< a$;
nam ipsi $a-b$ accedit $c-d \dots$, et $a-b+c-d \equiv a-(b-c+d)$ ubi $b > c$. Estque generaliter $a \equiv v \cdot 2(n-1)$
et $b \equiv v^2$; adeoque $a-b \equiv \frac{4(n-1)v - v^2}{2 \cdot 4(n-1)^2}$

$$\equiv \frac{v}{2(n-1)} \cdot \frac{4(n-1)-v}{4(n-1)} \equiv a - \frac{av}{4(n-1)} ; \text{ cujus}$$

valor minimus est pro maximo v et $n=2$; quo pacto summa erit $> \frac{3a}{4}$; itaque $\sigma > \frac{3s}{4}$; et con-

sequ. $\sigma > \frac{3}{4} \cdot \frac{v}{2} (\log n + \rho)$; atque h quod $> \frac{\sigma}{\log n}$ erat, est $> \frac{3v}{8}$. Si igitur v non ~ 0 , nec $h \sim 0$,

itaque series per IV convergit. Potuisset quidem brevius quoque demonstrari.

IX. Ad pag. LXXXIV. Expressio per rectas utvis heterogeneorum (in idea magis intelligenda) haud innuit operationes mere geometricas: addit quidem Geometria rectam continuando, subtrahit ressecando, et rectarum a, b (etsi utraque incommensurabilis fuerit) tam factum quam quotum, imo et a^c pro $c = n:2^m$ et n, m integris, exacte exhibet. Imo et quod mensuratum datur, recta exprimere valet, unitatem dividendo, partesque accipiendo; conversimque rectam quoad unitatem mensurare potest: atque ubi exactum haud praebet (egr. dum mensurationem finire nequit, aut pro alio c) errore quantumvis exiguo approximatur. Arithmetica vero, si rectarum utraque incommensurabilis fuerit, factum earum quoque nonnisi approximare valet, uti radicem quadr. binarii geometricae prodeuntem: imo nisi mensurata dentur, prorsus haeret, uti Geometria sine unitate in omnibus operationibus a mensuratione quoad unitatem promanantibus.

Sit exemplum pro resultado operationum cum heterogeneis ad rectas reductis susceptarum. Si x et y heterogenea fuerint, et $y = k$ pro $x=1$, ac $y = qk$ pro $x=q$; tum y ut quantitas respectiva quoad valorem k ejus pro $x=1$, dicatur z , atque unitas hujus z veluti quantitatis respectivae quoad k , unitas hujus k sit, sed in tali ab x

dependentia, ut pro $x \equiv 1$ et $y \equiv 1$ fiat: tum semper $y \equiv x^x$, $x \equiv y : x$, et $z \equiv y : x$.

Talia sunt *celeritas* quoad spatium sub temporis unitate aequab. percursum. *densitas* quoad massam sub voluminis unitate, *pretiositas* quoad pretium unitatis mercium certarum... Et sit spatium S , tempus T , celeritas C , spatiique unitas sit U , temporis τ , et T egr. sit $2\tau:3$; exprimetur hoc per rectam $2U:3$; et si $C \equiv 7U:5$; fiet $S \equiv C$ per T (non T per C) multiplicato; atque $S:C \equiv$ ipsum T repraesentanti $2U:3$; quod reversum fit $2\tau:3$. Notandum in utroque casu T esse multiplicatorem, cujus resultatum nonnisi ab eo pendet quale suae unitatis mensum sit; si vero factores rectae fuerint, permutari possunt.

Area per rectanguli altitudinis $U \equiv 1$, soliditas per parallelopipedi quadrato ipsius U insistentis longitudinem, ut recta exprimitur: adeoque unitas areae erit quadratum, et soliditatis unitas cubus ipsius U erit. Et hinc quum parallelogrammum altitudinis a bascos b in rectangulum altitudinis U mutari possit, patet rectam ab aream exhibere; pariterque rectam e 3 rectis prodeuntem soliditatem exprimere.

X. Abcissa (in IV) in ordinata ad initium ipsius x accipi potest, si a fine deorsum moti puncti via u dicatur: quo pacto $y \equiv 1-u$, et ordinata e fine ipsius u usque ad curvam est $x \equiv (1-u)^{-1:(1+b)} - 1$; nam ad finem hujus x erat $y \equiv (1+x)^{-(1+b)} \equiv 1-u$; itaque $1+x \equiv (1-u)^{-1:(1+b)}$; et $x \equiv (1-u)^{-1:(1+b)} - 1$. Sit $(A)u$ area; differentiale est $\dot{u}x \equiv \dot{u}(1-u)^{-1:(1+b)} - \dot{u}$; cujus (cum $-\dot{u} \equiv d(1-u)$ sit) integrale $(B)u \equiv -\frac{1+b}{b}(1-u)^{b:(1+b)} - u$.

Itaque $(A)u - (A)o \equiv (B)u - (B)o$; et quum $(A)o \equiv 0$, fit $(A)u \equiv -u + \frac{1+b}{b} - \frac{1+b}{b}(1-u)^{b:(1+b)}$; quod

pro $u \equiv 1$, fit $1:b$ ut antea.

INTRODUCTIO.

Duae sunt indelebiles divinae effigiei lineae, *Veritas* et *amor*; lumen calorque, stamina radii solis aeterni in argilla mortali micantis, cuius nitor per nubes infiniti transmissus, in mundo tam externo, quam interno pulchritudinem Originalis ipsius absolutam indicat; relative pulchrum dicimus, quod illius sensum in nobis excitat, nubila sancta revellens, ut lux verna coelipetes alas motitet, via in beatam patriam in infinito aperta: necessario impellimur

1-o Ad instar supremi stupendum omne penetrantis oculi, sine fine ullo eo niti, ut in quantum fieri potest, totum quo penitus perspiciamus.

2-o Ad instar supremi infinitum orbem amplectentis Patris, expansis erga omnia entia sentientia, aut intelligentia, ubivis in tempore et spatio fuerint, eniti, ut amore reciproco uniantur omnia, disharmonia ad concentum beatitudinis quam maximae (tam quoad intensionem quam quoad extensionem) omnium, et singulorum perducenda. —

I. VERITAS.

Veritates dividi possunt, in aeternas id est de iis sonantes, quae in omni tempore sunt, et temporaneas, nempe de iis tractantes, quae in certis tantum temporibus sunt, (adeoque in praesenti praeterito aut futuro). Praeteritum referre *Historiae est*; evolutionem omnis generis, mundi externi internique explicando, ut intelligatur, cur praesens ita sit; superiorum intellectuum esset problema resolvere, (cum praesens filia praeteriti, materque futuri sit, et illud in effectum, hoc in causa ad praesens reducat), e dato praesente futurum et partim praeteritum reperire. —

1-o Repraesento, cogito, ratiocinor: quae sint formae activitatis hujus? et an respondeat ei ali-

quid extra repraesentationem? dependeatque ista ab eo? porro quae loca ultima, in quae repraesentationes una post aliam, et repraesentata, unum extra aliud, (nempe mundus externus) ponuntur? quaerit *Philosophia*.

In ultimariis horum locorum, temporis nimirum spatiique, uti in intuitu per abstractionem remanent, naturam inquit *Mathesis pura*, quae fiet *applicata*.

Utrumque e nexu repraesentationum segregatur, ut cogitationis objectum esse queat; nec quasi per eas positorum iisque connatorum, realitas heic praeter intuitum asseritur, negaturve,

Ratiocinari dicimur dum e propositione, vel propositionibus *A*, *B* --- quaerimus novam.

Propositio dicitur quod ad formam hanc reduci potest; *A* est (*B* vel cum *B*). Dicitur *A* *subjectum*, *B* *praedicatum*. *Conversa* eius dicitur haec: *B* est (*A* vel cum *A*). Si *B* denotet non *C*; tum ex *A* est cum *B*, fit *A* est cum non *C*.

Propositio e simplicibus componi, at composita quoque ad formam dictam reduci potest. Tam *A* quam *B* potest esse compositum, et quidem pluribus modis: collective, disjunctive, conditionate, aut certo modo determinative.

Aliquid aliqua, vel *omne* opponitur *nullo*, *omni* vero *non omne*; et *non omne* est aut *nullum*, aut *aliquid*, vel *aliqua* exclusive. Etiam ipsum *A* aliquid ex *A* est. Subjectum *A* potest denotare aliquid, aliqua, vel omne, vel non omne, etiam nullum certorum *a*, *b* --- Si *A* denotet non omne dictorum, et *B* denotet non *C*, ex *A* est cum *B* fiet non omne ipsorum *a b* --- est cum non *C*. Nullum *A* est cum *B* potest exprimi per omne *A* est cum non *B*. Potest sive subjectum sive praedicatum imo utrumque disjunctivum, imo etiam propositio esse ex gr *A* est aut cum *B*, aut cum *C*; ita aut *A* aut *B* est cum *C*. Ita *A* est cum *B*, est, cum, *C* est cum *D*; id est si *A* est cum *B*, tunc *C* est cum *D*. Varias adhuc multiplices compositiones fieri patet.

Definire est nomen dare conceptui cuidam, aut rei cujusdam qualitatem ei soli propriam exponere.

Definitio exacta est si sit quam simplicissima, nec contineat talia *A* et *B* ut per *A* ponatur *B*.

Interim, conceptus qualesvis constructos, absque eo, ut realitas eorum constet, aut asseratur, imo etiam si impossibilis sit, quovis signo aut verbo denotare licet; at signa aequalia denotent semper aequalia, nisi aliud monitum fuerit; inaequalia signa vero, ideo tantum quod inaequalia sunt, non debent inaequalia denotare. —

Axioma est talis propositio, quam ita esse quaevis mens sana humana, sine ulla ratione alia, natura sua intuetur.

Demonstrare aliquid *B*, est ostendere illud per *A*, nempe complexum axiomatum et definitionum, necessario poni, adeoque *A* esse cum *B*.

Propositio demonstrabilis *Theorema* audit.

Scientia vel potius *Systema scientiae* est complexus ordine perspicuo coordinatus definitionum exactarum, a simplicissimis conceptibus incipiendo, et ex constructis ad novos magis compositos progrediendo (donec ii prodeant, qui duntaxat omne id quod eo pertinet complectuntur); et axiomatum simplicissimorum, quorum nullum sit, quod e reliquis deduci queat, atque propositionum ex iis demonstratarum.

Nec omnia definiri queunt, nec omnia demonstrari regrediendo in infinitum (veluti spatii fundus attingi nequit). — Sunt quorum nulla ratio ulterior videtur, et sunt quae definire ulterius verba clariora non habemus; quae colligere operae pretium esset.

2-o E loco mundi externi, ad ipsam stupendum omne redeo, structuram mechanismumque perspicere studens immensi horologii cuius catena ex annulis innumerabilium viarum lactearum fluit, nec pondus fundum ullum petit, ac tabula horaria solis lunaeque orbitis, et mille aliis lucidis circulis picta est.—Opus summi mechanici, unicum mobile perpetuum.

Templum magnificentissimum, columnis variorum ordinum ornamentis variis insignitorum, de cuius fornice ardent myriades solium lucernae, sphaeris in laudem numinis invisibilibus concinnentibus. Opus summi architecti.

Liber cujus totus mundus aspectabilis non nisi compactio externa est, et admiranda illa siderum igne scripta hieroglyphica titulus operis Authoris summi est.

Mechanismum horologii intelligere, templi delinationem, columnas, lapides, caementaque, iungentia reperire, literasque ultimas cognoscere et clave scripturae arcanae reperta sententias, totumque legere desideramus. Opus per omnem aeternitatem continuandum.

Hoc quaerit *Physica* (Externa sensu lato) et quidem cum applicatione matheseos. Mathesi extruitur scala Jacobi, qua in coelos scandimus, unde igneis alis ultra omnes vias lacteas, oceanumque solium ardentem tollimur in sacro sanctam noctem penetraturi, ubi Pater summus brachiis infinitis totum orbem amplectitur, et quo immanibus per vastum jactatos procellis, redeuntes excipit liberos.

II. A M O R.

1-o E mundo externo ingredimur in internum externo respondentem, naturam ejus scrutaturi. *Psychologia pura*, seu *Physica interna* in animarum naturam inquit. Porro cum facultas volendi ad naturam animarum pertineat, leges, voluntati ab aeterno praescriptas docet scientia *moralis pura*.

2-o In unione mundi utriusque, in naturam animarum, uti in concreto sunt, quaerit *Psychologia empirica*; nempe infinitae totius divitiae in diversitatis unitate, et unitatis diversitate consistunt: stupendum omne unum est, in unione duorum systematum (Spiritus et corporum) vivum, mundus externus interni, expressio et quasi facies est,

legibusque similibus utrumque tenetur, sibi invicem respondentibus; ita animae omnes se invicem attrahentes attrahuntur a Deo tamquam centro amoris universalis; et dantur aliae vires quoque, uti in mundo externo, quae planetas in suos soles decidere haud sinentes in orbitis agunt; si nulla vis alia esset praeter attractionem, totum perpetuae quietis tumulto, quasi immensum cadaver jaceret.— Huc pertinet etiam, in notam regulasque inquirere eorum, quae nobis in dicta unione (sensu superius dicto) pulchra sunt. Objectum *Aestheticae*. Quidnam sit in ista mundi utriusque unione agendum ut omnes orbitis se mutuo haud offendentibus, celerrime curramus ad finem amoris universalis supra dictum consequendum: docet *scientia moralis applicata*; quo etiam *jura* omnis generis pertinent. *Officium* est (subjective) necessitas illa dulcis, qua quilibet undevis ad finem dictum ducitur, itque dummodo via collustrata sit, et affectuum terrestrium vincula coelestem infantem haud detineant. *Officium* (objective) est via ipsa. Officia omnium omnia consentiunt, ut veritates omnes: et quatenus cujusvis officium est alium in suo faciendo haud impedire, dicitur *jus hujus*; quod (uti officium) pro diversa determinatione vario nomine insignitur. Vita juxta normam praescriptam acta, reddit imaginem Dei visibilem, quae de originali ejus testificatur, et pallidum temporis occidentem aeternitatis aurora collustrat. Virtutis exercitium est lumen solare, quo coelestes fidei flores aperiuntur, gemmis de humi defixis vultibus lectis nitentes.

Innatum Dei, moralitatis, immortalitatisque sensum excitat, dulcique et ineffabili quadam voluptate perfundit, e puro matheseos fonte hausta veritas, atque ejus ope penitior naturae externae internaecque cognitio: adeo ut veritas prodeat in mundum vivens, nascaturque virtus. —

Majestas vultus numinis ubique praesentis, nusquam visibilis, sed per quod videntur omnia, ra-

diat e coelis et terris, atque dum e radiis ad solem, unde prodeunt, ex imaginibus in mundo expressis ad originale elevamur, inter furentes orbis procellas, tranquillitas divina descendit in pectora mortalia, et fluctibus compositis abyssus consolantia refert sidera; jactatque diu demum fessique ad oras huius mundi, clausis in infinito Patris omnium sinu oculis, conquiescimus.—

Summum itaque claudit fastigium *Theologia*; quae mundo tanquam in deserto erranti orphano Patrem ostendit, viamque per vicissitudines itineris quasvis ad eum ducentem face Sacrae Scripturae collustrat, atque detracta atroci mortis persona, angelum demissum revelat, qui fracto cortice externo coelestem volucrem tollat. Neque evenit quidquam in terris sublimius, quam dum idea Dei in homine interno evolvitur, atque in finito quasi infinitum apparet, primus novi angeli pulsus; polis quasi inversis, mutantur omnia, finis annorum omnium, fit novi initium; et senis terram petens corpus fiunt exuviae cadentes embryonis ad lucem evolaturi, amaritudo maturescentia, vulnera, ostia ad coelum aperta, dolores fluxi partus gaudiorum permanentium, et crux tetra fit lux mundi, ✠ quo — tollitur.

PRAEVIE NOTANDA

§ A). Axiomata, et inde praevie deducenda, ne incasibus iteranda sint, formulis generalibus exhibitae (intuitu spatii specialiori suo loco reservato). Mens de quovis casu, ut de flumine quaerens, unde veniat, de caussa ad caussam ascendens, subsistit ubi ulterius progredi nequit, et si ibi veritates reperit tales, quas sine ulteriori caussa ita esse in-tuetur, conquiescit; atque veritates ejusmodi incasibus repertas formulis generalibus exponit; partim ob brevitatem, partim ut clare perspiciatur, quatenam sint, quae per se asseruntur sine demonstratione; et quod sit systematis totius fundamentum.

I. Tempus est quantitas continua; sed non nisi expers ex eo adest, et semper aliud atque aliud est; atque per quodvis tale, in praeteritum et futurum undevīs et utrinque absolute aequaliter discernitur (abstrahendo a directione praeteriti et futuri).

II. Tempus quodvis finitum quod non fuit, adveniet; omne nunquam. Saepissime est, quod aliquid de quovis dici potest, de omni non

III. Id quod est, sub parte p temporis experte, aut cum *ita* aut cum *non* ipsius B (id est aut cum B , aut cum *non* B) est.

IV. Si per A et B poneretur *ita* et *non* ipsius C sub p , atque A est: tunc B non est, et si A non est tunc B est. Hoc est fundamentum demonstrationis apogogicae; et concluditur modo sequente: 1-o, si B sit propositio formae sequentis, *a non est cum x* , et A est, tunc B non est; nempe non est id, quod *a non est cum x* ; sed aliquod adesse debet (III), nempe aut *a est cum x* , aut *a non est cum x* , posterius non est, adeoque alterum nempe id quod *a est cum x* , est. Hinc etiam ubi prodibit, non esse id, quod *Q non est cum Z* , absque iteratione dictorum poterit concludi; *Q esse cum Z* . 2-o, si B sit formae, *a est cum x* . et A est; tunc B non est id significat, quod non est id, quod *a est cum x* ; id est non est *a cum x* . Itaque sicubi constiterit esse et non esse ipsius C per B et A (veritatem, aut veritates perpetuo vel per hypothesin stabilitas), simul posita, simul poni; modum relatum toties quoties iterare supervacuum erit.

V. Quidvis est id quod est, et sibi perfecte aequale est. Si autem A , et B absolute aequalia sint; atque afficiantur operationibus D et E absolute aequalibus; cuilibet resultato ipsius A cum D , adest inter resultata ipsius B cum E , resultatum aequale.

Si operatio sit unici resultati, id est talis sit, ut resultatum ipsius A sit nonnisi α , et resulta-

tum ipsius B sit nonnisi b ; tum a est aequale b . Nam datur resultatum ipsius B ipsi a aequale; sit hoc C ; hoc C erit aut b , aut non b (III); si C non b esset, per id, quod C est praeter b , et id quod praeter b aliud non est, poneretur *esse*, et *non esse* resultati alius praeter b . Si operationis indoles talis sit, ut alia quoque resultata dentur; tum id tantum dicitur, quod cuivis resultato ipsius A datur aequale inter resultata ipsius B . Si A et B aequali operatione resultati unici affecta, producant a , et b aequalia; tum etiam A , et B aequalia sunt; si ex a et b quoque aequali operatione resultati unici prodeant A et B . Si A sit aequale ipsi B ; potest B ipsi A substitui; eatenus, quod quavis operatione afficiatur A , eadem affectum B , resultatum priori aequale dabit. Ita si A sit aequale B , et B sit aequale C ; potest C ipsi B substitui, ut prodeat A aequale C . Nam sit operatio comparationis; comparationis B cum A resultatum est indiscernibilitas, et resultatum comparationis C cum A , etiam indiscernibilitati aequale est.

§ B.) Denotet $\overset{a}{x}$ heic a cum aliquo tali esse quod ipsi x aequale est; $\overset{a}{x+y-z}$ vero denotet a esse cum aliquo tali quod ipsi x aequale est, et simul cum tali, quod ipsi y aequale est, et non esse cum tali, quod aequale ipsi z est, id est esse cum non z . Interim hae denominationes brevitatis et claritatis ergo heic assumtae, non nisi hic valeant. Sit jam schema sequens

$$\begin{array}{cccccc} A & , & B & \dots & P & , & Q & \dots & U & , & W & \dots \\ x-y-z & & x-y-z & & x+y-z & & x+y-z & & x+y+z & & x+y+z \end{array}$$

Ea sub quorum quolibet litera, aut literae eadem sunt, (quavis eadem litera signo eodem $\dagger$ vel—insignita) dicuntur *eatenus generis* ejusdem; ex gr sub quovis adest x , itaque $A, B \dots P, Q \dots U, W \dots$ sunt generis ejusdem quoad x ; dicatur G hoc genus, id est nomen commune eorum sit G ; et dum dicitur G esse cum x , intelligatur (uti ejus

origo ostendit), A esse, B esse & cum x ; nempe si in propositione G est cum x , substituatur ipsi G quodvis eorum, quorum nomen commune G inde exortum est; propositionem veram manere. Quando dicitur quod D sit G (denotante G genus), non aliud significat quam quod D sit aliquod ipsorum A , B --- P , Q --- U , W ---, id est eorum quorum nomen commune datum G est. Aliud est dum dicitur, A est ipsum B . Ita sunt P , Q --- U --- generis ejusdem quoad $x+y$, quod dicatur g , et U ac W sunt quoad $x+y+z$ generis ejusdem, quod dicatur g' . Dicitur genus g' species quoad z generis g , et g dicitur species quoad y generis G ; quod ulterius continuari posse patet. Patet etiam alio respectu subdivisionem aliam esse; ex gr A , B --- P , Q --- quoad $—z$ aliam speciem ipsius G praebet, cujus item A , B --- una species quoad $—y$, et P , Q --- U , W ---, quoad y alia species est. Exemplo sit sequens; denotet x qualitatem quadrilateri rectilinei, y qualitatem quod dentur 2 latera $||la$ (non excludendo plura), z quod praeterea quod dentur 2 latera $||la$, adhuc dantur 2 latera $||la$; v quod anguli sint aequales, u quod latera sint aequalia.

quadrilater (x)			
Trapezium ($x+y-z$)		Trapezoides ($x-y$)	
Parallelogramum ($x+y+z$)			
Parall. aequiangulum ($x+y+z+v$)		Parall. non aequiangul. ($x+y+z-v$)	
aequilat	non aequilater.	aequilat.	non aequilat.
Quadratum	Rectang. oblong.	Rhombus	Rhomboides
($x+y+z+v+u$)	($x+y+z+v-u$)	($x+y+z-v+u$)	($x+y+z-v-u$)

Litterae aequales heic cum signis aequalibus genera speciesque ostendunt. Patet vero tam in hoc exemplo, quam in priore, generis tantum aliqua gaudere literis speciei; imo in exemplo posteriore e genere quoad x non nisi quadratum es-

se ($x \dagger y \dagger z \dagger v \dagger u$). Hinc si genus heic quoad x dicatur g ; in propositione quod g sit *cum* x , ipsi g quodvis allatorum substitui potest; sed ut verum sit, g esse *cum* x et y , aliqua tantum eorum quorum g nomen commune est, substitui possunt; et ut verum sit g esse *cum* ($x \dagger y \dagger z \dagger v \dagger u$), ipsi g aliquod g nempe quadratum tantum substitui debet. Si vero w denotet qualitatem eam ut 5 laterum sit; tum x excludens 5-tum latus non est *cum* w , adeoque est *cum* $\neg w$; atque ut dici possit, g est *cum* w , substitui ipsi g debet nullum g ; quod significat, quod non sit inter ea quorum g nomen commune est, tale quod sit *cum* w .

§ C). Si q sit aliquod ipsorum $A, B, C \dots$ et q non sit ipsum A , tum q est aliquod ipsorum $B, C \dots$; si q nec ipsum B sit, tum est aliquod ipsorum $C \dots$, et si ad ultimum deveniatur, tum q plane illud est. Nam si q non est inter $B, C \dots$ et q non est ipsum A ; tum q non est inter $A, B, C \dots$, adeoque q et esset inter $A, B, C \dots$, et non esset; itaque per id quod q inter $A, B, C \dots$ est, et non est inter $B, C \dots$ ponitur esse et non esse eiusdem simul; unde patet per IV. Eodem progredi modo licet ad C , et inde porro, nempe si q non sit A , nec B ; tum si q nec inter $C \dots$ sit, non esset inter $A, B, C \dots$ et simul esset; ita porro progredi licet, et si ad ultimum perventum fuerit, eodem modo patet, q illud ipsum esse.

Ita si omne quodvis sit inter $A, B \dots a, b \dots a', b' \dots$, atque q non sit inter $A, B \dots$; inter $a, b \dots a', b' \dots$ esse pari modo patet; et si nec inter $a, b \dots$ sit, esse inter $a', b' \dots$ pari modo patet.

§ D). Sint jam A, B, C qualitates aut res quaecunque, et quidem ita ut ex gr x sit nomen generale tam ipsius $\dagger y$, quam ipsius $\neg y$, (quod denotet heic *non* y), ita ut $\neg x$ denotet $\dagger y$, si x antea denotabat $\neg y$; et denotet $\neg y$ si antea $\dagger y$ denotabat; ita etiam reliqua intelligantur. Propositio vero A est *cum* B , denotetur heic brevitatis causa (sed hic tantum valeat ista denotatio) per $A \dagger B$;

ita $A-B$ denotet hic A esse cum non B ; et $-A \dagger B$ denotet non A esse cum B . An vero de omni quovis A aut aliquo $\&$ dicatur quod sit cum B , denotatione ista determinatum non sit. Quaeritur quae propositiones sequuntur ex una, quae e duabus? $\&$

1- $\circ$ Ex una, nempe ex A est A sequitur A est non A , non esse; nam per haec poneretur ita et non eiusdem, alterutrum duorum adessé debet (III) A est A adest, alterum itaque non est (IV). Ita ex A est B sequitur A est non B , non esse; quod ita quoque exprimi potest, A est non x , si x denotet non B . Ex quodvis A est non B , sequitur B est non A . Nam per A est non B , et B est A , poneretur aliquod A esse cum B et non B , et inde sequitur ut prius; Ex A est cum B , sequitur aliquod B esse cum A ; nam per A est cum B , et hoc B est cum non A , poneretur aliquod B esse cum A , et non A , unde (ut prius) patet: Ex eo quod quodvis A est cum aliquo B sequitur, quodvis non B esse cum aliquo non A ; nam per non B est cum A , et A est cum B ponitur, aliquod A esse cum B , et cum non B ; itaque patet per IV. Ex A est cum non B sequitur, B est cum non A ; nam per A est cum non B , et B est cum A poneretur aliquod A esse cum B et non B , et tum patet uti antea. Ex eo quod quodvis non A , est cum aliquo non B , sequitur, quodvis B esse cum aliquo A ; nam per non A est cum non B , et B est cum non A poneretur, aliquod non A esse cum B , et cum non B , adeoque patet per IV.

2- $\circ$ Propositiones, vel conceptus A et B aequivalentes dici possunt; si quodvis A est cum aliquo B , et quodvis B sit cum aliquo A ; quod ita quoque prodit, si demonstretur, quodvis A esse cum aliquo B , et quodvis non A esse cum aliquo non B , nam (per praec) tunc etiam quodvis B est cum aliquo A . Idem prodit demonstrando, quod non A est cum non B , et non B est cum non A ; uti etiam ex A est cum B , et B est cum A , prodit non A esse cum non B , et non B cum non A . Ex

eo quod quodvis A est cum aliquo B , non sequitur, quodvis B esse cum aliquo A ; nam (uti e typo generis superiori patet), qualitas aliqua praeter speciem ipsius A , in aliis quoque adesse potest; sed sequitur aliquod vel aliqua B esse cum aliquo A ; nempe ubi A cum B est, etiam B cum A est. Ex non omne A est cum B , sequitur aliquod A esse cum B ; nam non omne, est aut aliquod, vel aliqua exclusive, aut nullum; si nullum A est cum B , omne A est cum B ; si aliqua exclusive sunt cum B , reliqua sunt cum non B , quia B aut B adesse debet (III et IV)

3-o Sint a, b, c ; et denotet heic $a \dagger b$, esse a cum b , atque $a - b$ denotet esse a cum non b (id est sine b), eademque denotatio in aliis quoque (sed heic tantum) valeat. Quaevis litera possit sive $\dagger$ sive $-$ denotare: ex gr) b possit $-$ x quoque denotare (signum $-$ sensu non arithmetico sed superiore intelligendo). Quaeritur, ex una propositione $a \dagger b$ et alia adhuc tali, in qua una litera c est, altera vero $\pm a$ (id est a vel $-a$), vel $\pm b$ (id est b vel $-b$) est, quando et quae conclusio est? Patet combinationes omnes esse sequi:

$a \dagger b$	$a \dagger b$	$a \dagger b$	$a \dagger b$
$c \pm a$	$\pm a \dagger c$	$c \pm b$	$\pm b \dagger c$

quae, si $a \dagger b$ sensu statim dicendo convertatur, in 2-a et 3-tia, et inferior superius ponatur in 1-a et 3-tia, mutabuntur in sequi:

$c \pm a$	$b \dagger a$	$c \pm b$	$a \dagger b$
$a \dagger b$	$\pm a \dagger c$	$b \dagger a$	$\pm b \dagger c$

ubi patet ad formam eandem reducta eatenus esse, quod ubivis superioris ultima litera sit prima inferioris, quae est litera communis utriusque; patet etiam formam ultimam primae prorsus convenire; nam b potest per $-$ x exprimi, et tum $-b$ erit x ; ex gr) sit a Petrus, b mortalitas, nempe $a \dagger b$ denotet Petrus est cum mortalitate, id est Petrus est mortalis, x est immortalitas, et $a - x$ denotat Petrus est cum non immortalitate; adeoque ad formam primam reducetur ultima in illo casu quoque, ubi in hujus inferiore signum $-$ est, nempe illam in cuius superiore $-a$ est; itaque non nisi 3 priores considerandae veniunt. Denotet jam heic (sed

tantum hic) $A \dagger b$ quodvis a esse cum b vel aliquo b ; ita $b \dagger A$ denotet b vel aliquod b adesse cum quovis a , quod idem cum priori significat. Ita $C \dagger a$ denotet, quodvis c esse cum aliquo a , et $C - a$ denotet quodvis c esse cum non a ; atque $c \dagger a$ denotet aliquod, vel aliquorum c quodvis esse cum aliquo a ; et eadem denotatio alias literas maneat, quae tantum heic valeat. Conclusio e superiore et inferiore infra lineam scribetur, o ubi nulla est; forma 1^{ma} post I, 2^{da} post II, et 3^{tia} post III est; pro signis iisdem cuiusvis 4 casus sunt, uti pro signis contrariis; in schematibus rationem conclusionis exponentibus, quilibet casus pro signis iisdem uno, pro contrariis 2 schematibus exhibebuntur.

I	$C \dagger a$ $a \dagger b$	$C \dagger a$ $A \dagger b$	$c \dagger a$ $A \dagger b$	$c \dagger a$ $a \dagger b$	$C - a$ $a \dagger b$	$C - a$ $A \dagger b$	$c - a$ $A \dagger b$	$c - a$ $a \dagger b$
	o	$C \dagger b$	$c \dagger b$	o	$b - c$	$b - c$	* $c - b$	* $c - b$
II	$b \dagger A$ $a \dagger c$	$b \dagger A$ $A \dagger c$	$b \dagger a$ $A \dagger c$	$b \dagger a$ $a \dagger c$	$b \dagger A$ $-a \dagger c$	$b \dagger A$ $-A \dagger c$	$b \dagger a$ $-A \dagger c$	$b \dagger a$ $-a \dagger c$
	$b \dagger c$	$b \dagger c$	$b \dagger c$	o	* $b - c$	* $b - c$	* $b - c$	* $b - c$
III	$C \dagger b$ $b \dagger a$	$C \dagger b$ $b \dagger A$	$c \dagger b$ $b \dagger A$	$c \dagger b$ $b \dagger a$	$C - b$ $b \dagger a$	$C - b$ $b \dagger A$	$c - b$ $b \dagger A$	$c - b$ $b \dagger a$
	o	o	o	o	$a - c$	$C - a$ et $A - c$	* $c - a$	* $c - a$

Conclusio nulla est, si pro signis literae communis iisdem aut nulla litera magna est, aut non est prima in inferiore, vel ultima in superiore; alioquin semper est aliqua; cum stellula prodit, si pro signis literae communis contrariis, litera magna, aut nulla sit, aut praeter primum locum inferioris et ultimum superioris haud reperiatur, aut tantum in inferiore et sola sit; combinantur vero in conclusione literae quae praeter communem sunt, et posterioris signum — est, si litera communis signis contrariis sit. Occurrit vero litera magna in conclusione non nisi semel in I, et semel in IV, atque stat loco 1-o; in III vero 6-a est sola, ubi etiam postrema litera in magnam mutata conversio

fieri potest. In II Schemate 2-o constat etiam quodvis a esse cum b et cum c ; denique omne quod per superiora e conclusione tanquam ex una propositione sequitur, conclusioni accenseri potest. Stellula praeposita, uti $* b-c$ denotat certa quaedam b cum certis quibusdam c non esse, non asserendo dari aliquod b , quod cum nullo c esse queat. Interim I 1 convenit cum III 1, ita I 3 cum II 3, I 4 cum II 4 et cum III 4, I 5 cum III 5, I 7 cum II 7, et I 8 cum II 8 et cum III 8. Itaque pro convenientibus quibusvis unus tantum manet casus; et casus conclusionem o dantes etiam rescindi possunt.

Ut ratio conclusionum dictarum pateat, exprimat ex gr) $C \vdash a$ per $\begin{smallmatrix} c c c \\ a a a a a \end{smallmatrix}$, nempe cuius c adscribatur illud a , cum quo est, alia a adhuc ulterius quoque scribere fas est, cum haud constet, non alia a esse sine c ; si quodvis a quoque sit cum b , scribatur b sub quodvis a , si vero de quibusdam a tantum constet, scribatur b sub quaedam a tantum; et quidem sub talia, quae non sub c sunt, quia non constat, num illa sint ea quaedam, quae cum b sunt. Ita $C-a$ exprimat per $\begin{smallmatrix} c c c \\ -a-a-a-a \end{smallmatrix}$, et $b \vdash a$ exprimat per $\begin{smallmatrix} b b b \\ a a a \end{smallmatrix}$. Hoc pacto construantur casus singuli.

I	$\begin{smallmatrix} c c c \\ a a a a \\ b b \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} c c c \\ a a a a \\ b b b b b \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} c c \\ a a \\ b b b \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} c c c \\ a a a \\ b b \end{smallmatrix}$
	$\begin{smallmatrix} c c & a a a \\ -a-a-a & b b b \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} c c & a a \\ -a-a-a & b b b \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} c c c & a a \\ -a-a & b b b \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} c c c & a a a \\ -a-a-a & b b b \end{smallmatrix}$
II	$\begin{smallmatrix} a a \\ b b b \\ c c \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} a a \\ b b b b \\ c c c \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} b b b \\ a a a \\ c c c c \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} b b \\ a a a a \\ c c c \end{smallmatrix}$
	$\begin{smallmatrix} a a & -a-a \\ b b b & c c \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} a a & -a-a \\ b b b & c c c \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} b b b & -a-a \\ a a a & c c c \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} b b b & -a-a-a \\ a a a & c c c \end{smallmatrix}$
III	$\begin{smallmatrix} c c \\ b b b b b \\ a a \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} c c \\ b b b b \\ a a \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} c c c \\ b b b b b \\ a a \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} c c c \\ b b b b b \\ a a a \end{smallmatrix}$
	$\begin{smallmatrix} c c & b b b \\ -b-b-b & a a a \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} c c & a a \\ -b-b & b b \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} c c & a a \\ -b-b & b b b b \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} c c c & b b b \\ -b-b & a a a \end{smallmatrix}$

In I 1-o et 4-o patet posse b et c non in verticalem eandem cadere; adeoque non sequitur *ul-*
lum c cum b esse; in 2-o sub *quodvis* c cadit b ,
adeoque *quodvis* c cum b est; in 3-tio sub *quae-*
dam c cadit b , et *quaedam* illa tantum constat cum
 b esse. Item in I signorum contrariorum casu 1-o
patet illa b quae cum a sunt, cum c esse non pos-
se, quia cum *quovis* c est $— a$, et tum $\dagger a$ et $— a$
simul essent (Ax IV); adeoque illa, seu *quaedam*
 b cum c non sunt; id est *quaedam* b sunt cum non
 c . In casu 2-o illa b quae cum a sunt, cum c esse
pariter nequeunt; in 3-tio sub *quovis* a est b , sed
non constat *aliquod* c cum b vel *sine* b esse; nam
haud constat non dari tale b , quod non est cum a ,
adeoque tale b etiam cum tali c quod cum $— a$ est,
esse nulla contradictio; itaque illa c tantum, quae
cum $— a$ sunt cum illis b quae cum a sunt non es-
se constat.

Reliqua singillatim exponere, cum schemata, sin-
gula eodem modo exhibeant, supervacuum est.

Forma IV quae cum I convenit, continuata dat
soritem; si a 1ma propositione incipiendo, cuiusvis
litera ultima sit eadem cum prima sequentis, et in
loco primo magna sit, saltem in quavis post pri-
mam ex gr) ex $\begin{matrix} a+b \\ B+c \\ C+d \end{matrix}$ sequitur $a\dagger d$; nam expresse

ut antea per $\begin{matrix} a a a \\ b b b \\ c c c c \\ d d d d d \end{matrix}$ patet *quaedam* a esse cum b

et c et d , adeoque *quaedam* a esse cum d ; si A
fuisset loco primo, quodvis a esset cum d .

§ E) Si constet sub continui temporis T puncto
quovis adesse A , et aliquando sub t post T non
adesse: datur ab initio crescentis T in infinitum,
punctum aliquod p , ultimum punctorum illorum
temporis, de quorum quovis dici potest, quod in-
tra illud et initium ipsius T semper adest A ; post
 p vero datur tempus continuum ex p incipiens, sub
cuius puncto quovis est non A . Nam in quovis

puncto crescentis T in infinitum, quaeri potest; est ne illud ultimum vel non? alterutrum esse oportet (Ax III); nec responsio *non* sub quovis puncto temporis esse potest; nam si tempus ultra t crescat, et *non* sit responsio tum quoque, sub t quoque esset A (contra hyp). Itaque est aliquod temporis punctum de quo dici nequit, quod non ultimum sit; (p 12. n 2) adeoque cum illud aut ultimum aut non ultimum esse debeat (Ax III), et non ultimum non sit, ultimum est (Ax IV). Si porro quaeratur ultra p continuo porro in quovis puncto, est ne A vel *non* A ? responsio *ita* esse aliquamdiu nequit; alioquin p ulterius accipi debuisset.

Si vero datur ultimum tale punctum p : tum in p erit aut *ultimum* A , aut *primum non* A . Nam aliquod, aut A aut *non* A adesse debet (Ax III); si A est, *ultimum* A est; nam post p sub certo continuo ex p incipiente non est A , ante p vero ab initio ipsius T semper est; si vero sub p , sit *non* A , illud *primum non* A est; quia antea semper fuit, postea vero sub certo tempore non est.

§ F) Si A, B, C --- se invicem excipiant (sive terminentur in aliquo, sive non), et eorum quodvis K tale sit, ut (post K sequente L dicto), K est cum x sit cum L est cum x , atque A sit cum x : tum quodvis Q ipsorum A, B, C --- est cum x . Nam a certo puncto sit pars temporis continua t in plaga futura, et excipiat quodvis t aliud t in infinitum; ac cogitetur A respondere primo t , et quodvis ipsorum A, B, C --- sequens sequenti t ; atque procedatur ab A ad B , inde ad C & usque ad illud t quod ipsi Q respondet; illud t adveniet, (Ax II); adeoque et de Q ei respondente constat. Dicitur haec concludendi methodus de n ad $n+1$ saepissime usitata. E dictis ultro promanantibus, supersedere licet.

CONSPECTUS ARITHMETICAE GENERALIS.

§ 1). Animus natura sua veritatis siti impulsus, fines cognitionis semper ulterius extendere satagens; activitate indesinente, partim ex iis, quae in repraesentatione reperit, quaedam secernit, partim haec et quae adfuerint vario modo componit; atque utcunque coram posita comparat: et illa, quae digna esse retur, nomine insignit proprio, jure suo originario utens, quidvis signo quovis pro arbitrio denotandi; dummodo signa eadem, eadem ubique significant, nisi aliud monitum fuerit.

§ 2). Quidvis (modo A nominatum) intuenti, obviam venit ante omnia aliquid (modo α dictum), quod ab A *complexum* est (id est ex A est), ab eo tamen diversum (id est non idem ipsum cum A); dicitur *a pars* ipsius A et quidvis (utvis compositum sit in repraesentatione, excluso omni alio) dicitur *Totum* si parte gaudeat. Sensu hoc etiam qualitas certa ipsius A, ex gr) albedo certi parietis, ejus pars est, (albedinem ipsam quae adest intelligendo). Si *a* pars etiam ipsius B sit, dicitur *commune* ipsis A et B. Per *complexum* ipsorum A, B - - - intelligatur id, quod complectitur quodvis eorum, praetereaue necquidquam. Consideranti partes, obviam venit tale x , ut a complexu omnis ejus ex toto quod non ex x est, complexum etiam x sit; dici potest pars eiusmodi, *indivellibilis*. Potest tamen aliquid de quovis, quod ex toto praeter x est, dici, quod de x negatur. Horae 8-vae finis, et 9-ae initium, est pars temporis a hora 7 usque ad 10 effluentis, sed indivellibilis est; ita axis corporis quiescentibus 2 punctis moti; at punctum, totius ex hoc et sphaera extra illud cadente constantis, non talis pars est. Hinc talis pars p cuius ipsius pars nulla, aut tantum indivellibilis est communis cum complexu omnis ejus, quod ex toto praeter p est; dicitur *por-*

tio Ex gr) Linea e superficie prominens, totius portio est, uti punctum antea dictum; at complexus lineae dictae, et lineae in superficiem cadentis, totius e superficie et linea constantis, pars sed non portio, nec indivellibile est.

Complexus omnis quod (ex gr) praeter A est, intelligatur, uti in concreto sisti potest. Paucis tantum adhuc, ne plura nugae difficiles visa nauseam moveant, illustrare fas sit.

* Indivellibile i partis p , est indivellibile totius T. Nam si q sit complexus omnis, quod ex p praeter i est, et Q sit complexus omnis ex T quod praeter i est: patet q esse complexum a Q, adeoque i a q complexum a Q quoque complexum esse.

* Pars p partis indivellibilis i , est indivellibile totius T. Nam si q sit complexus omnis ex i , quod praeter p est, et Q sit complexus omnis ex T quod praeter i est: tum (per def) i a Q complexum est, adeoque etiam a (Q et q).

* Portio p portionis P portio totius T est. Nam sit p' complexus omnis ex P quod praeter p est, et sit R complexus omnis ex T, quod praeter P est, sitque A id quod P cum R commune habet, et Q sit complexus omnis ex P quod praeter A est, sitque a id quod R cum p , et a' id quod R cum p' commune habet: patet in A adesse a et a' , necquidquam praeterea in A esse. Sit q complexus omnis ex p praeter a , et q' complexus omnis ex p' praeter a' : patet (q et q')¹ complecti omne quod ex P praeter A est, adeoque et ipsum Q. Est vero P portio ipsius T (per hyp), adeoque A est indivellibile ipsius P (per def); adeoque a Q complexum est omne quod ex A est, itaque etiam a ; quod fieri nequit, nisi a indivellibile ipsius p sit; nam si id non sit; aliquod b ex a adesse debet, e quo necquidquam a q complexum est; si vero a q complexum non est, neque a (q et q') complexum est; nam p' adeoque q' nonnisi indivellibile ipsius p cum q commune habet (quia p portio ipsius P est); adeoque esset aliquid ex A quod a (q et q'), adeoque a Q quoque comple-

xum non esset, et P non esset portio ipsius T (contra hyp). Si p cum complexu omnis ex T praeter p nihil habeat commune, tum patet (per def).

* Si P portio ipsius T sit, et complexus omnis ex T praeter P dicatur p : tum etiam p si in concreto sistatur portio ipsius T est. Nam sit A commune ipsis P et p , et sit q complexus omnis ex p praeter A , id est omnis ex T praeter P . (nam A quoque adest in P); patet q si in concreto sistatur, esse idem cum p , adeoque cum A complexum a p sit, complexum etiam a q est; itaque etiam p portio ipsius T est (per def).

§ 3) Ex parte et portione oritur *nihilum* mathematicum, et *expers*: nempe abstrahendo omnem partem, oritur conceptus nihili, cuius signum est o . Ingens passus ab omni ad nihilum est; uno verbo quasi tollendo omne, quod ad sublime verbum *Fiat*, factum est. Quod nulla sui portione gaudet, dicitur *expers*; tale est (ex gr) punctum spatii, aut temporis supra dictum, sub quo quidem nulla mutatio fieri potest, sed Rhenus dernens, Urbs flagrans, aut actus quidam heroicus sub tali temporis puncto figuntur in tela perennes.

§ 4). Porro in partes inquirendo, tali A occurrente, ut quaevis portio A' sit eius, haec cum eo B quod ex A praeter A' est, aliquid commune habeat: tale A nominatur (*continuum*: Ex gr) spatium, tempus, linea; superficies &

§ 5). Mens porro disquirens animadvertit, varia, quae praeter A sunt, ab eo discerni quidem, sed reperiri aliquid cum A , et aliquid cum B , quae quamvis A et B praesentia considerentur, discerni nequeunt: et dicit A et B catenus *aequalia*; si aliquid illud sit A ipsum et B ipsum, tum dicitur A *identice aequale* ipsi B , quod nonnisi tunc est, si A ipsum B sit. Si aliquid illud sit A et B praeter locum, id est A et B praesentia praeter locum discerni nequeant, dicitur *aequalitas absoluta*, significata (ex gr) per $A \doteq B$. Eatenus nulla cochlea sinistra, dextrae aequalis est.

Si aliquid illud aliud sit, dicitur *aequalitas respectiva*, cuius innumerae species dantur. Globus argillaceus aureo aequalis quoad locum esse potest

§ 6). Sed ex aequalitate absoluta, et portionibus ipsius P , vel etiam p , nascitur alia aequalitas *respectiva*, atque etiam conceptus *quantitatis*; si nempe.

1-o Tale A se obtulerit; ut cum A sit tale q cuius aut nulla portio est, aut quaecvis a , et b tales sunt, ut a (ipsum vel pars eius) $\doteq b$ (ipsi vel parti eius): dicitur tum A *quantitas* quoad q ; sed si q illud, plane A ipsum sit, dicitur *quantitas absoluta*, secus *respectiva*. Absolutae exempla sunt Spatium, Tempus, Punctum utriusque, Recta, Circulus, Linea cochlearis, Planum, Sphaera, Cylinder, etiam Linea e rectis composita, ita ex arcubus eiusdem radii, et id genus alia. Respectivae, exempla varia: Pondus auri et ferri, si tantum pondera, aut volumina, aut frustra metallica considerentur. Si Linea quaedam L non e rectis composita, comparatur cum alia tali, ut complexus utriusque non sit *quantitas absoluta*, semper recta certa intelligetur per L determinata (vide infra), ita superficies quaecvis ad planum reducitur (ibidem). Imo et ipsae *quantitates absolutae* ad certas *respectivas* reducuntur inferius, ut simpliciter tractari queant. Praeter hoc potest etiam portionum acceptio certo modo determinari: ex gr) homo et vermis *quantitatem respectivam* constituunt (ad instar puncti cum puncto) si conditio sit portionem hominis aut vermis non considerate, et ex gr) non nisi id ex homine aut verme sumatur, quod mortalis, vel terrae alumnus sit.

2-o Si P constet e portionibus A, B - - -

$a, B \doteq b$, $\&$, ut quodvis par aequalium item aliud excipiat, donec nihil ex utroque supersit; ex gr) $P \xrightarrow[A]{B}$; $p \xrightarrow[a]{b}$ | oritur nova aequalitas quoad portiones.

Hoc sensu quaevis figura rectilinea est aequalis $\square to$. At quid si P , et p talia sint ex gr) circulus et $\square um$ certum, ut $A, B - - -$ et $a, b - - -$ nunquam terminentur, sed omni dabili minus superesse ex utroque possit; dari tale $\square tum$ constat, et nonnisi punctum est, quod reperire numerabilibus eiusmodi operationibus, quarum quaevis est, rectam vel circulum ducere, problema quadratoris circuli est. Dici potest haec *aequalitas quoad contentum* prior *terminata*, posterior *interminata*, nec in casu allato posse aut non posse terminari quisquam demonstravit. Denotari potest per $P \equiv p$. Vide infra quae aequalitas per $=$ denotetur; et vide inferius aequalitatem expressionum variam &.

§ 7). Quantitas cum Quantitate parit *homogeneitatem*, et majoritatem minoritatemque: nempe si quantitates A , et B tales sint, ut complexus eorum quantitas sit, dicuntur A et B *homogenea*. Ita latus $\square ti$ et diagonalis *homogenea* sunt, quamvis constet numeris quoad idem unum exprimi haud posse. Si vero $A \equiv$ portioni cuidam b ipsius B ; tum A dicitur *minus* ipso B , et B *majus* ipso A ; denotaturque per $A < B$, seu $B > A$. Denotatio eadem manere potest, et si A et B certa determinatione afficiantur (ut infra) adeo ut etiam $2 < -5$ dicatur. At ultro fit quaestio quidnam ex B ultra b superest? si hoc dicatur C , dicitur B excedere quantitatem A ipso C ; Operatio, qua quaeritur, quod superest ex D praeter d , si d ex D sit, et $A \equiv d$; vocatur *demptio* ipsius A ex D .

§ 8). Mens semper simplicitati, claritatiq; studens, cum varia se offerant, cum quibus demptionis operatio haud ita perspicua est, quam cum tempore, aut recta; de modo cogitat, quamvis quantitatem ad eiusmodi formam reducendi; et si quantitates $A, B - - -$ ad tales $A', B' - - -$ reduci queant, ut quaevis $A', B' - - -$ tales sint, ut $A \equiv A'$, $B \equiv B'$, et aliquod ipsorum A' et B' sit $\equiv$ alteri ipsi vel parti eius; tum $A, B - - -$ *ad formam temporis reducta* esse dicuntur. Per $A \equiv B$ intelligatur esse $A' \equiv B'$.

Posse id fieri, et quodvis nonnisi ad unicum reduci posse (vide infra).

Superficies quaevis ad rectangulum reducitur, cuius altitudo est ex gr) I hexapeda, solidum quodvis ad parallelepipedum, cuius et altitudo, et latitudo item I hexapeda est; et demum omnia ita reduci possunt, ut tempore vel recta exhibeatur quantitas omnium.

§ 9). *Arithmetica* est scientia, quae de quantitate, nonnisi jam ad formam temporis reducta, et omnium operationum resultata quoque ad hanc formam reducta esse spectat. *Pura* est, cuius objectum tempus est, aut huius quasi effluxi imago perpetuo manens recta, postquam deducta generataque est. Veritates hic repertae facile alibi applicantur. *Arithmetica generalis* dicitur, quae in genere tractat de quantitativibus absque eo, ut de hac vel illa speciatim diceret; at mentis natura est ab iis quae ob oculos ponuntur ad generaliora abstractaque ascendere. Primum Arithmeticae purae objectum tempus offert; ut haec quasi temporis, geometria spatii scientia dici possit; quamvis in aeterno quasi connubio una alteri opem ferat, et arbor utraque corradicata, coronis in abyssu coelorum confluat.

§ 10). *Quantitas* iam cum *qualitate* parit ita dicta *opposita*, $\oplus$ (*positivum*), et $\ominus$ (id est *negativum*), atque $\dagger$ et — .

Nimirum quantitates homogeneae occurrunt variis determinationibus positae: ex gr) sit rectae unius in puncto *p* initium, atque in recta eadem ponatur alia ita, ut initium huius cum fine prioris sit idem: quaestio varia esse potest; *quantanam tota via sit?* aut *quantanam linea sit inter p, et finem posterius positae?* atque num a *p dextrorsum*, aut *sinistrorsum cadat?* patet resultatum eatenus varium esse posse, magnum respectu quaestionis prioris, o respectu posterioris.

Hinc conceptus sequens formatur,

Si *P*, et *N* tales determinationes significant: ut

si duntaxat A fuerit determinatione P positum, et B cum determinatione N , tum sub certa conditione C , in casu quodsi $A=B$, resultatum o sit; si vero $A > B$, et supersit a , maneat a cum determinatione P ; si $B > A$ ac supersit b , maneat b cum determinatione N : tum una ex gr) A nominatur *positiva*, altera nempe B *negativa*, atque A et B dicuntur *quantitates oppositae*. Positivum signo $\oplus$, negativum signo $-$ denotari potest, quod patet non nisi determinationes dictas P , et N denotare.

Si $A=B$; tum ipsorum $\oplus A$, et $-B$ quodvis dicitur *oppositum alterius*, et per $-k$ denotatur oppositum eius quod per k denotatur, sive $\oplus$ sive $-$ denotet k ; signum $\dagger$ autem praefixum valorem non mutat; $\dagger k = k$ potest esse $= -5 = -5$, et tum $-k = 5 = \dagger 5 = \oplus 5$, ita ut e signo $\dagger$ vel $-$ literae praeposito, num valor $\oplus$, vel $-$ sit, concludi nequeat. Ex gr) Ponantur cogitatione sive in tempore, sive in recta partes continuas A, B --- una post aliam modo sequente; nominetur cuiusvis una extremitas initium, altera extremum; et illius quae sola, vel primo ponitur, initium cadat in certum punctum p , et cuiusvis alius initium sit idem cum extremo illius quod plane antea positum est; sit porro certum punctum q , intra quod terminarentur omnes, si ita ponerentur, ut cuiusvis nonnisi initium sit cum eo quod antea positum est, commune; atque dicatur p' extremum eius quod modo prius dicto ultimo positum est; et si p a p' diversum sit, dicatur p initium, p' vero extremum ipsius pp' ; et ipsorum A, B --- et illius quod inter p et p' est quodvis tale, cuius extremum propius est ipsi q quam initium, dicatur determinatione P positum; cuius initium est propius, dicatur determinatione N positum.

Patet hoc pacto si conditio C sit, pro resultato accipere p p' , prodire o , si duntaxat $\oplus A$, et $-B$ posito, sit $A=B$; ita $\oplus a$ manere, si $A > B$, et a supersit; et $-b$ manere, si quantitate b sit $B > A$.

Potest etiam illud quod tantum initium habet cum antea posito commune, determinationis eiusdem dici cum eo, secus vero diversae (Tab I. Fig 1).

§ 11). Sed quaelibet quantitates possunt modo sequente ad definitionem revocari.

Si B respectu A poni dicatur, ut sit index demtionis; significet operationem sequentem: quod si A iam positum sit, et detur tale b ex B, ut in A adsit ei $=$ nec $>$ tale b ex B sit: tum dematur b ex A; atque si $b = B$, *indici demtionis* satisfieri dicatur; si vero praeter b adsit b' in B, tum ex indice demtionis mansisse b' ; et si nullum b demi potuit, B ipsum mansisse, cui satisfactum non est; et in quovis casuum dictorum *indici demtionis satisfactum esse quoad fieri potuit* dicatur.

Si jam determinatio N qua B ponatur, id significet, quod B ponatur index demtionis quoad quamvis quantitatem quae certa determinatione P posita est, aut poneretur postea; et conditio C sit, ut si A iam positum est cum determinatione P, et $A =$ vel $>$ B, accipiatur id quod ex A remansit, postquam *indici demtionis satisfactum est*; si vero satisfieri non potuit, accipiatur id quod ex indice demtionis remansit, postquam ei in quantum fieri potuit satisfactum est; et semper quod ex indice demtionis remansit, retineatur etiam ulterius pro indice demtionis, quoad quantitates cum eo homogeneas, quae determinatione P ponerentur. Patet et hic determinationem P signo $\boxplus$ et alteram signo $\boxminus$ insigniri posse. Nam si $A = B$ resultatum o est, si $A > B$ resultatum est a cum P positum, si vero $B > A$, remanet b ex indice demtionis,

adeoque b cum determinatione N. Ex gr) $\boxplus A$

$$\frac{\boxplus A}{\boxminus B} \quad a$$

$$\frac{\boxplus A}{\boxminus B}$$

$$\frac{\boxplus A}{\boxminus B}$$

$$\frac{\boxplus A}{\boxminus B}$$

$$\frac{\boxplus A}{\boxminus B} \quad b$$

Ita potest A certos homi-

nes ad certum finem positos denotare, et B item certos homines pro indice demtionis quoad A po-

sitos; aut A certam pecuniam, et B quoque certam pro indice demtionis quoad A expositam &

§ 12). Operatio qua disquiritur, quod sit resultatum sub conditione C, si adfuerint inter A, B --- et $\oplus$ et $-$; secus vero quid prodeat, si A, B --- simul sumantur, (in quovis casu quovis eorum zerum denotante omisso): dicitur *additio*, et resultatum vocatur *summa* additorum A, B ---

Imo potest conceptus summae extendi, dicendo etiam S et s summam, realium A, B ---, et imaginariorum a, b --- si illorum summa sit S, horum sit s; (vide infra): quoad casum priorem, patet superius esse o, $\oplus a, - b$ summas ipsorum A, B; ita patet $\oplus A \oplus B$ summam ipsorum $\oplus A, \oplus B$ esse.

§ 13). Quaestio heic ultro oritur: num in (10) quocunque ordine ponantur A, B --- idem extremum ultimo positi prodeat? ita demtio utcunque fiat, per partes hinc vel illinc demtas, aut e summa omnis $\oplus$ vi dematur summa omnis $-$ vi (vide infra). Addendorum summae etiam commoda notatio quaeritur. Complexus signorum, quibus quantitates denotantur, signorum $\dagger, -, \oplus, -$ quolibet praefixo affectorum; denotet quantitatum earum (cum signo praefixo acceptarum) *summam*: dicitur hic complexus *quantitas complexa*; et quantitas post ultimum signorum $\dagger, -, \oplus, -$, aut ante primum scripta, veluti quaevis inter proxima eiusmodi signa dicitur cum signo praefixo accepta *terminus quantitatis complexae*. Interim si alia quaedam operatio ad plures extendatur, signa dicta terminos in iis quae conjuncta sunt non distinguunt. Ex gr ipsius $a \dagger \sqrt{(c-d)}$ non est d terminus, sed a, et $\sqrt{(c-d)}$.

§ 14). Sicubi summa S, ex A et B reperitur; quaestio ultro fit, num ex S et A, socius B ipsius A reperiri posset? Operatio ista vocatur *substractio* ipsius A ex S, et B vocatur *differentia* ipsius A ab S. Patet in schemate (§ 11, et § 12) S esse prius o, postea $\oplus a$ tum $- b$, et demum

$\mp A$ et $\mp B$: ita esse posse $\neg A \neg B$; atque $S \neg (\mp A)$ esse $\neg B$ in § 11 et $S \neg (\neg B)$ esse $\mp A$, atque in proximo casu $S \neg (\pm B)$ esse $\pm A$. Unde patet subtrahendi oppositum esse addendum summae suppositae, ut socius subtrahendi, nempe differentia prodeat; prodit vero oppositum, si signum praefixum immutetur, nempe si ex $\mp$ fiat $\neg$, seu ex $\neg$ fiat $\mp$; adeoque subtrahendus signo mutato additur. Sed heic adhuc tantum de monomio sermo est; de quantitate e pluribus terminis complexa inferius erit.

§ 15) Porro adhuc talia ex gr p et s obviam venire possunt, ut d differentia ipsius p ab s sit = differentiae ipsius P ab S . Hinc passus eo quod si P ipsum s sit, et detur post quodvis, aliud a quo differentia praecedentis sit eidem d aequalis. Vocatur hoc, *series arithmetica*: nempe hic oritur conceptus *seriei*; quo nomine insignitur quantatum complexus se lege certa excipientium; nam simulac lex una patuit, campus de legibus innumeris cogitandi aperitur. Vocatur quaevis quantatum lege certa se excipientium, *terminus seriei*.

§ 16). Tum facile in mentem venit $p = 0$ ponere, et seriem $0, A, B \dots$ condere, cuius termini cuiusvis differentia a sequente sit $= u$; item aliam quoque seriem $0, a, b \dots$, cuius termini cuiuslibet differentia a sequente sit $= v$, cogitare: ita ut 0 cum 0 , A cum a , simul ponantur, et quosvis terminos simul positos, excipientes (in illa et hac serie) simul ponantur: quivis terminus harum serierum dicitur *numerus* in serie priori quoad u , in posteriori quoad v ; ac cuilibet nomen proprium dare libet, et quidem terminis simultaneis idem, praeterquam quod in serie priore quoad u in posteriore quoad v dicatur; ex gr 0 dicitur 0 quoad u etiam 0 quoad v ; A vero 1 quoad u , et a dicitur 1 quoad v &c &c; seu 0 dicitur breviter ou et ov , A vero $1u$, et a $1v$, &c &c, et id ex gr F quod numerus nominis n est quoad u , dicitur nu , et terminus f cum eo simultaneus dicitur nv ; atque ad quaestionem,

F quot u sit? respondetur, nu ; atque F dicitur continere ipsum u n ies, et ex F et n reperire u dicitur F per n *partiri*. Nulla tamen heic mentio multiplicationis divisionisque est, quarum sensus latior est.

Tam u , quam v dicitur *unum*, quod distingvendum ab *unitate* est (§ 22).

$$\begin{array}{l} \text{fo} \quad A \xrightarrow{u} \quad B \xrightarrow{u} \xrightarrow{u} \quad C \xrightarrow{u} \xrightarrow{u} \xrightarrow{u} \dots \\ \text{eu} \quad 1u \quad 2u \quad 3u \end{array}$$

$$\begin{array}{l} o \quad a \xrightarrow{v} \quad b \xrightarrow{v} \xrightarrow{v} \quad c \xrightarrow{v} \xrightarrow{v} \xrightarrow{v} \dots \\ ov \quad 1v \quad 2v \quad 3v \end{array}$$

$$\begin{array}{l} [q \quad * \quad * \quad *** \\ o* \quad 1* \quad 2* \quad 3* \end{array}$$

$$\begin{array}{l} o \quad o \quad o \quad o \\ o \text{ zerus} \quad 1 \text{ zerus} \quad 2 \text{ zerus} \quad 3 \text{ zerus} \end{array}$$

Patet, si *unum* zerus sit, quemvis terminum esse o ; nam e quovis prodit o , nempe $o \div o = o$ (per § 12).

§ 17). Heic statim quaestiones oriuntur: 1^{mo} quo possent modo simplicissimo nominari numeri? 2^{do} si N et M nomina numerica sint, Nu et Mu simul quot u efficiunt? et si $Nu < Mu$, et illud ex hoc dematur, quot u manent? 3^o si $U = Nu$, MU quot u facit? sit nu ; quaerebatur ex N et M nomen n , quaeri ex n et aliquo ipsorum N et M eorundem alterum potest.

Haec sunt, numeratio, et quatuor operationes numericae: at quamvis conceptus hi necessarii sint; conceptus 4 operationum latior est; duarum priorum iam determinatus est, ubi patebat summam ipsorum A, B ob oculos poni posse, etsi numero expressa non sit, imo si ex gr A sit latus $\square ti$, et B diagonalis, neque possunt A et B quoad idem numeri esse.

§ 18). Variarum adhuc praeter haec oriuntur quaestiones.

1mo Potestne quantitas quaevis esse numerus nominis cuiusvis? **2do** Potestne idem quoad idem u esse numerus diversi (id est nunc huius mox alius) nominis? **3tio** Estne quoad quamvis portionem a ipsius A , tale nomen numericum n , ut $na > A$ &c. Si quantitatis q aut nulla sit portio, aut quaevis talis sit, ut detur tale n , dicitur *quantitas finita*, de quali tractat Arithmetica. Si u denotet punctum temporis, $2u$ non potest esse numerus nisi nominis 2 et 1, nempe posterius, si unum sit $2u$; item o potest esse, si pro uno sumatur o , numerus nominis cuiusvis, sed id quod non est o , nequit esse numerus nominis o .

§ 19). Nova porro fit quaestio; num B sit numerus quoad A , et si ita, cuiusnam nominis sit? et casu se offerente ubi B non est numerus quoad A , quaestio oritur, num aliquod u sit, quoad quod tam A quam B numerus est, et cuiusnam nominis numerus sit A , cuiusnam sit B ? Unde fit conceptus sequens. Sive sit B numerus quoad A sive non; reperire cuiusnam nominis numerus sit A et B vel $-B$ quoad idem u , dicitur *mensurare* B per (vel quoad) A ; et A dicitur *mensura*, B vero *mensum* ipsius A ; atque si (ex gr) $A = 3u$, $B = 2u$ vel $B = -2u$, ad quaestionem, qualenam mensum sit B ipsius A , respondetur in casu priore, quod sit 2 (3)*tum*, in posteriore quod sit 2(3)*ti* oppositum. Ita A , si pro mensura eius ponatur u , dicitur 3 (1)*tum* ipsius u , adeoque hoc et $3u$ idem significant.

§ 20). At talia A et B obviam venire possunt, ut quamvis homogenea sint, nullum u reperiatur tale, ut quoad id tam A quam B numerus sit: hinc facile cogitatur, quid si nullum sit? cum non liqueat dari debere, (mox patebit in Arithmetica quoque dari, ex gr $\sqrt{2}$): eiusmodi quantitates dicuntur inter se *incommensurabiles*. Interim facile patet (quod infra demonstrabitur) u semper per 2 partiendo, quovis dabili x remanere minus ex B , et alteram partem quoad A mensurari posse.

§ 21). Hic primum oritur conceptus, *variabilis*

atque *limitis*. Si p sit nomen generale eorum finitorum, quae sub certa conditione generari queunt, et $\pm$ vel $-p$ quovis dato ei homogeneo $>$ fieri potest, aut differentia ipsius p a K nunquam quidem fit 0 sed quovis dato $\approx$ minor fieri potest: tum dici solet in casu 1mo *infinitum* (denotatum per ∞), in 2do vero K , *limes* ipsius p , et *tendentia ista ad limitem* potest denotari in casu 1mo per $\pm$ vel $-p$ $\sim \pm \infty$, in 2do per $p \sim K$; nempe ubi $\pm \infty$ stat post signum $\sim$, denotet casum 1mum; si finitum stet post $\sim$, denotetur casus 2dus. Maius et minus intelligitur hic a $\pm$ et $-$ abstrahendo. Arithmetica quidem finita tractat, nec calculus infinitesimalis dictus indiget ∞ ti; sed cum a pluribus etiam ∞ pro limite accipiatur, fas est conceptum limitis eo extendere; (in Geometria dantur infinita (ex gr) complexus omnium punctorum, quae cum certis 2 punctis in recta sunt, est recta utrinque infinita &). Sit (ex gr). $A = nu$, $B = mu$ $\dagger$ ($t < u$), et sit $t \sim 0$; ad quaestionem qualenam mensum sit B ipsius A , respondetur $m(n)$ tum praeter aliquid, quod ~ 0 ; sed patet heic n , et m prouti $\approx$ minus accipitur, eatenus mutari; interim ubi pluries occurrunt, aequalia signa simul variata, aequalia significant; inaequalia signa (nisi aliud monitum fuerit) possunt aequalia significare.

§ 22). Posteaquam B , mensuratum per A est, facile succurrit, etiam C per idem A mensurare: atque tum dicitur quodvis ipsorum B et C *fractio* alterius;

$$B \frac{u}{u} = 2u$$

$$B * *$$

$$A \frac{u}{u} \frac{u}{u} = 3u$$

$$A *$$

$$A \frac{v}{v} \frac{v}{v} \frac{v}{v} \frac{v}{v} = 5v$$

$$A *$$

$$C \frac{v}{v} \frac{v}{v} \frac{v}{v} \frac{v}{v} = 4v$$

$$C * * *$$

et quidem in casu priore B dicitur 2 (3) 4 (5) tum

ipsius C, ita $C\ 4(5)\ 2(3)_{tum}$ ipsius B, in altero casu vero B dicitur $2(1)\ 3(1)_{tum}$ ipsius C, et C dicitur $3(1)\ 2(1)_{tum}$ ipsius B, sive in hoc casu B dicitur breviter $2(3)_{tum}$ ipsius C, et C dicitur $3(2)_{tum}$ ipsius B.

Demonstrabitur mox etiam casum priorem ad formam posteriorem reduci, et idem modo communi scribi posse; patetque B esse $2(3)_{tum}$ ipsius A, et A esse $5(4)_{tum}$ ipsius C, adeoque B esse $2(3)_{tum}\ 5(4)_{ti}$ ipsius C.

At quid si B vel C, vel utrumque sit incommensurabile cum A? tum quoque et semper, ad quaestionem qualisnam fractio sit B ipsius C; respondeatur quod sit $n(m)\ p(q)_{tum}$, si nomina numerica n, m, p, q talia sint, aut ita simul variari queant, ut $n(m)_{tum}$ ipsius A sit = vel $\frown$ B, et $p(q)_{tum}$ ipsius A sit = vel $\frown$ C (§ 21)

§ 23). Hinc posteaquam B et C per idem A mensurata sunt, pronum est etiam D, et tum D, E --- denique omnia homogenea per idem A mensurare; atque mensuram istam omnibus communem nominare *unitatem*; nec semper repetere mensuram in mensuratorum nuncupatione; ut ex gr $2(5)_{tum}$ unitatis dicatur tantum $2(5)_{tum}$, haud nominando mensuram; ita si A sit unitas, $2(1)_{tum}$ ipsius A idest $2A$ dicatur tantum 2, ita -1 denotet $-1A$.

Reflectendo ad superius dicta varia aequalitatis genera, heic quoque aliquod se offert: si nempe r sit recta, et t tempus, atque utrumque sit suae unitatis $2(3)_{tum}$, eatenus aequalia sunt. Ita si L et l rectae sint, patebit factum e quotvis lineis esse lineam; sed si unitas areae sit $\square_{tum}$ cuius latus unitas lineae est, et factum ex L et l sit ex gr $n(m)_{tum}$ unitatis linearum; et rectangulum ex L et l erit $n(m)_{tum}$ unitatis arearum. Ita sit factum ex L, l, l' (tribus rectis), $N(M)_{tum}$ unitatis linearum; parallelepipedum ex L, l, l' etiam $N(M)_{tum}$ unitatis solidorum est, si haec cubus is ponatur, cuius latus unitas linearum est; uti infra demonstratur. Itaque ista hoc respectu sunt aequalia.

Unitatem $\text{†}vam$ (et non zerum) figere libuit, atque utcunque mutetur *unum*, *unitas* eadem prius arbitrarie posita pro omnibus homogeneis retineatur, donec expresse aliud monitum fuerit; si ex gr unitas sit 1 hexapeda, sive 1 dicatur, sive 6 pedes, quantitas eadem est. Si *o* assumeretur pro unitate, linea expressio indeterminata esset, nam prouti acciperetur *u*, esset pro quovis *n* linea *n(o)tum*.

§ 24). Id quod $\angle 1$, dicitur *fractio vera*: et id quod numerus est quoad unum unitati aequale; dicitur *numerus integer*. In serie- - - — 3, —2, —1, 0, 1, 2, 3 - - - est (per § 7.) $2 \angle -3$, sed $1 \nless 0$, neque $-1 \angle 0$; at potest dici quemvis terminum esse *paucius* quovis ab eo ad dextram sito, et *plus* quam quivis ab eo ad sinistram situs est; quod etiam ad non integros extendatur. Designari potest per $0 \nless -1$; $1 \nless 0$; $1 \nless -1$; $-1 \nless -2$.

* Facile patebit (per inferiora); quod si $A \angle B$, etiam aequalibus additis semper prodeat $A \text{†} C \angle B \text{†} C$; at si $A \angle B$, non semper sequatur $A \text{†} C \angle B \text{†} C$; at tamen sive $\angle$ et $\angle$, sive $\angle$ et $\nless$ stet post A , idem etiam post $A \text{†} C$ maneat, (si $A \text{†} C$ et $B \text{†} C$, neutrum sit *o*, nec sit $A \text{†} C = -(B \text{†} C)$); excepto 1mo si $A \angle$ et $\angle B$, atque $B \text{†}$ est cum A ac C utroque $-vo$, aut summa utraque $-$ est; (tunc enim fit $A \text{†} C \angle$ et $\nless B \text{†} C$). 2do si $A \angle$ et $\nless B$, atque aut $A -$ est cum B et C utroque $\text{†}vo$, aut summa utraque † est; (tunc enim fit $A \text{†} C \angle$ et $\angle B \text{†} C$). $A \text{†} C = B \text{†} C$ esse nequit, nam tum esset $A = B$, cui repugnat $A \angle B$; sed pro quibusvis A, B , datur tale C , ut sit $A \text{†} C = -(B \text{†} C) = -B - C$; nam tunc $A \text{†} 2C \text{†} B = 0$; et tum $C = - \left(\frac{A \text{†} B}{2} \right)$; adeoque $A \text{†} C = \frac{A - B}{2}$, et $B \text{†} C = \frac{B - A}{2}$ quae opposita sunt. Singulos casus exhibentia schemata percurrendo patet.

$$\frac{-2 \angle \angle 3}{1 = 1}$$

$$\frac{-1 \angle \angle 4}{-1 \angle \angle 4}$$

$$\frac{-2 \angle \angle 3}{5 = 5}$$

$$\frac{3 \angle \angle 8}{3 \angle \angle 8}$$

$$\frac{-2 \angle \angle 3}{-1 = -1}$$

$$\frac{-3 \angle \nless 2}{-3 \angle \nless 2}$$

$$\frac{-2 \angle \angle 3}{-5 = -5}$$

$$\frac{-7 \angle \nless -2}{-7 \angle \nless -2}$$

$$\begin{array}{r}
 -3 \lessgtr 2 \\
 1 = 1 \\
 \hline
 -2 \lessgtr 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 -3 \lessgtr 2 \\
 5 = 5 \\
 \hline
 2 \lessgtr 7
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 -3 \lessgtr 2 \\
 -1 = -1 \\
 \hline
 -4 \lessgtr 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 -3 \lessgtr 2 \\
 -5 = -5 \\
 \hline
 -8 \lessgtr -3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -3 \lessgtr -2 \\
 1 = 1 \\
 \hline
 -2 \lessgtr -1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 -3 \lessgtr -1 \\
 5 = 5 \\
 \hline
 2 \lessgtr 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 -6 \lessgtr -3 \\
 4 = 4 \\
 \hline
 -2 \lessgtr 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 -3 \lessgtr -2 \\
 -1 = -1 \\
 \hline
 -4 \lessgtr -3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2 \lessgtr 5 \\
 1 = 1 \\
 \hline
 3 \lessgtr 6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2 \lessgtr 5 \\
 -1 = -1 \\
 \hline
 1 \lessgtr 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2 \lessgtr 5 \\
 -3 = -3 \\
 \hline
 -1 \lessgtr 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2 \lessgtr 5 \\
 -7 = -7 \\
 \hline
 -5 \lessgtr -2
 \end{array}$$

* Nempe ut $A \lessgtr B$ sit; aut tam A quam B $\equiv$ est, aut $A \equiv$ et B $\neq$ est, aut A, B utrumque $\neq$ est, et A (in praec) semper ad sinistram cadit. Quivis casus parit duos, prouti C $\neq$ aut $\equiv$ est; si ipsorum A et B aliquod $\equiv$ est, tunc A esse $\equiv$ patet: si utrumque $\neq$ sit, C aut $\neq$ aut $\equiv$ est; si $C \equiv$ est, tres casus sunt, prouti C summam utramque $\neq$ *nam* relinquit, aut unam vel utramque $\equiv$ *nam* reddit; adeoque 4 casus fiunt; et pariter 4, si A, B utrumque $\equiv$ sit. Si vero unum $\equiv$ alterum $\neq$ sit, aut A erit $\lessgtr B$, aut $A \gtr B$; quivis horum 4 casus habet, nempe C aut $\neq$ aut $\equiv$ est; si $\neq$, tum aut utraque summa redditur $\neq$ aut non; si $\equiv$, aut utraque summa redditur $\equiv$, aut non. Itaque 16 casus sunt.

* Si $A \lessgtr B$ vel $A \gtr B$, et A, B utrumque per C (non 0) multiplicetur; signum $\lessgtr$ (vel $\gtr$) manet uti est, sed $\lessgtr$ mutatur in $\gtr$, si multiplicator $\equiv$ sit: etiamsi non percurrantur schemata, facile patet, tum e $\neq$ fieri $\equiv$, et e $\equiv$ fieri $\neq$, atque e majori $\neq$ maius $\equiv$, et e majori $\equiv$ majus $\neq$ fieri; adeoque signum $\lessgtr$ inverti; casus sequentes tantum considerandi veniunt $-2 \lessgtr -1$; $-2 \lessgtr 1$; $1 \lessgtr 2$; ubi patet oppositis acceptis signum $\lessgtr$ in $\gtr$ mutari. Patet etiam non mutari $\lessgtr$ si C $\neq$ sit, uti $\lessgtr$ vel $\gtr$ semper manere, cum a determinatione $\neq$ vel $\equiv$ independens sit.

* Pro exponente n integro $\neq$, quoque manet $\lessgtr$; sed $\lessgtr$ si A et B non sit utrumque $\neq$, mutatur in $\gtr$ pro n pari si $A \lessgtr B$; in aliis casibus semper manet: ex gr

$$\begin{aligned} -2 < > -1; (-2)^2 = 4 > > 1; (-2)^3 = -8 < > -1; \text{E} \\ -1 < < 2; (-1)^2 = 1 < < 4; (-1)^3 = -1 < < 8; \text{E} \\ -3 < > 1; (-3)^2 = 9 > > 1; (-3)^3 = -27 < > -1; \text{E} \end{aligned}$$

Unde etiam patet radicum exponentis paris e $\times$ vis, illam signo $>$ gaudere posse, cuius potentia signo $<$ praedita erat; at radicum exponentis imparis e $-vis$ illam cum $<$ manere, cuius potentia cum $<$ fuit; imo posterius valere etiam si potentia una $\times$ altera $-$ sit, aut utraque $\times$, facile patet; $-27 < 8$, $\sqrt[3]{-27} < \sqrt[3]{8}$, nempe $-3 < 2$.

§ 25). Id quod cum unitate incommensurabile est, dicitur breviter *incommensurabile*. Prius de commensurabilibus fiet disquisitio specialior.

§ 26). Ita etiam si mentio unitatis non fieret, dum quaeritur B quale mensum sit? subintelligatur *Unitatis*: sit (ex gr) $2(3)tum$; quaestio facile oritur quantitate a se offerente, num si a esset unitas, detur tale b , de qua si quaereretur, quale mensum sit, item per $2(3)tum$ responderetur; aut poterant tales a et b obviam venire, ut etiam b per a mensum, sit huius $2(3)tum$. Hinc sequens conceptus oritur: si ad quaestionem quale mensum sit b ipsius a , ita responderetur (§ 20 et 21), quam ad quaestionem, qualenam mensum est B (nempe unitatis A): tum reperire b ex a et B, dicitur *multiplicare* (sensu strictiori, qui mox fiet latior) a per B; et a dicitur *multiplicandus*, B *multiplicator*, uterque vero nominatur *factor*, et b *factum*, quod proprie *aequimensum* est.

§ 27). Hinc facile quaestio oritur, e posito facto b et ex a quaerere huius socium B, seu ex b et B huius socium a ; nempe talem socium quaerere, ut si alteruter eorum multiplicandus et alter multiplicator sit, factum b prodeat. Reperire talem factorem socium ipsius a (vel ipsius B), dicitur *dividere* b per a (vel per B). Dicitur b *dividendus*, is cuius socius quaeritur *divisor*, socius vero *quotus* audit. Denotatur quotus qui prodit p

per q diviso, per $\frac{p}{q}$ vel $p : q$; factum vero quod prodit a per B multiplicato denotatur per $B.a$ aut simpliciter per Ba , (nisi aliud monitum fuerit).

§ 28). Imagines multiplicationis, et divisionis generales patet esse sequentes

$$\begin{array}{llll} A = nu, & B = m u; & a = nv, & b = mv \\ A = nu, & m u \curvearrowright B; & a = nv, & m v \curvearrowright b \\ A = nu, & B = m u; & a = nv, & b = mv \\ A = nu, & -m u \curvearrowright B: & a = nv, & -m v \curvearrowright b \end{array}$$

§ 29). Ubi patet in quavis linea horizontali imagines mensurationis ipsius B per A , et ipsius b per a esse aequales. Facile est cogitare loco A quamvis quantitatem, non tantum unitatem, (nec zero excepto), dummodo pro certis n, m, u, v , aliqua istarum imaginum prodeat; adeoque ut ad quaestionem quale mensum sit B' ipsius A' (sive unitas sit A' sive non)? et ad quaestionem quale mensum est b' ipsius a' ? eadem responsio sit. Dicuntur tum A', B', a', b' in *proportione geometrica* esse.

§ 30). Patet 4 imagines priores huc quoque applicari. Quaestio se offert, quid si duo priora ambo $\boxplus$, vel ambo $-$ sint, aut quidsi opposita sint, futurum est? facile patet in casu priore, quale a est, tale fore b ; nempe si a sit $\boxplus$ etiam b $\boxplus$, si a $-$ etiam b $-$ fore; in casu posteriore vero etiam a et b opposita fieri. Nam (ex gr) sit imago $3tia$, sit $n=2$, $m=3$, et u sit $-$, tum $2u$ ita $3u$ etiam $-$ est, itaque $B = -3u$ erit $\boxplus$ (nempe oppositum ipsius $3u$, quod $-$ erat); tum $a = 2v$, et $b = -3v$; iam v aut $\boxplus$ est, aut $-$; si $\boxplus$, tum $2v$ et etiam $3v$ $\boxplus$ est, itaque $-3v$ est $-$; si vero v $-$ est, tum $2v$, et $3v$ etiam $-$ est; et $-3v$ est $\boxplus$: adeoque hae 2 imagines exsurgent $- \boxplus \boxplus - \quad - \boxplus - \boxplus$; similiter prodeunt casus omnes: nempe A vel $\boxplus$ vel $-$ est, pro quovis horum 2 casuum, B etiam aut $\boxplus$ aut $-$ est; et pro quolibet horum 4 casuum, a aut $\boxplus$ aut $-$ est, adeoque 8 casus sunt.

§ 31). Si nonnisi de multiplicatione quaestio

sit, tum A est $\times$, nempe unitas (§ 23); adeoque 4 tantum casus erunt

$$\begin{array}{cccc} \times & \times & \times & \times \\ \times & - & \times & - \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \times & \times & - & - \\ \times & - & - & \times \end{array}$$

Nam (ex gr) in ultima imagine cum B et A opposita sint, etiam b et a opposita esse demonstratum est. Si unitas $-$ esset, vel ponatur; erit $- \times \times -$ & per eandem rationem.

Quantitates quarum realitas multiplicationi quoad—1 innixa est, dicuntur *imaginariae* (vide infra).

Cum vero literis (ex gr) a, b tam $\times$ quam $-$ denotare liceat, atque cuilibet fas sit signum $-$ praefigere: quaestio oritur, quodnam sit signorum $\times$ et $-$ signum facti e factoribus $\pm a$ et $\pm b$ vel $\mp b$? Res facile in casus distingvitur: nempe si $\times a$ sit, tum est aut $\times b$ aut $-b$, et si $a \times$ sit, erit item b aut $\times$ aut $-$, pariter si $a -$ sit; itaque $\times a$ habet si $a \times$ sit, 4 casus, nempe 2 pro $\times b$, et 2 pro $-b$; pariter habet 4, si $a -$ sit; adeoque $\times a$ habet 8 casus; pariter $-a$ habet 8; adeoque 8×8 casus sunt, quos singulos construere facile est, et Tyronibus relinquatur; ac percurrendo singulos, patet regulam generalem prodire, quod *signa aequalia dant $\times$, signa inaequalia $-$* ; nempe si facto e literis ipsis signum ita praefigatur, factum prodibit $\times$ vel $-$ ita uti re ipsa est: (ex gr) sit $a \times$, et $b -$, et sit multiplicator $-a$, et multiplicandus $\times b$; erit ista imago $\times - - \times$, nempe factum $-a \cdot -b$ (per dicta) $\times$ erit; at $-a b$ quoque $\times$ est, nam ab tanquam factum ex $\times$ et $-$ est $-$, itaque $-ab$ est $\times$. Pariter si $a \times$ et $b -$ sit; $\times a \cdot \times b$ est $\times ab$, nam tunc factum e $\times$ et $-$ est $-$, et $\times ab$ quoque tantum denotat ac ab . De pluribus terminis infra.

Quoad divisionem quoque eadem quaestio oritur. Dividendus sit $\times b$ vel $-b$, divisor $\times a$ vel $-a$; tam $\times b$ quam $-b$ duos casus habet, prouti divisor $\times a$ vel $-a$ est; qui singuli facile percurruntur; (ex gr) si $\frac{b}{a} = c$, adeoque $ac = b$; tum $\frac{-b}{-a}$ non potest esse

$-c$; quia tum $-a. -c$ esset $= \dagger b$; $-a'.c$ vero $= -b$.

Ita percurrento casus, generaliter patet (sensu dicto), *signa aequalia dare tam in multiplicatione quam in divisione monomiorum* †, *inaequalia vero* — (de complexis infra).

§ 32). Hic ultro sequitur, etiam praeter signa in casus multiplicationis divisionisque speciales inquirere, eosque ob oculos sistere.

I. Si multiplicator integer sit, schema sequens est; sit (ex gr)

$$A=1=\frac{U}{1}, B=\frac{U}{2}=\frac{U}{2} \quad 2; a=\frac{v}{1}, b=\frac{v}{2}$$

$$\text{sive } A=\frac{U}{1}, B=\frac{U}{2} \quad ; \quad a=\frac{v}{*}, b=\frac{v}{*}$$

$$\text{id est} \quad 1U \quad 2U \quad 1v \quad 2v$$

$$\text{seu } A=1=\frac{u}{*}, B=\frac{u}{*}=\frac{u}{*}=3; a=\frac{v}{*}, b=\frac{v}{*}$$

$$1u \quad 3u \quad 1v \quad 3v$$

Ubi patet toties contineri multiplicandum in facto quam unitas in multiplicatore (§ 17); ita si b dividendus sit, et B integer sit divisor, quotum toties contineri in dividendo, quoties unitas in divisore continetur; adeoque nomina multiplicationis et divisionis, prius ex hoc casu depromta, ad hos etiam valere; alioquin *non juxta vocum sed definitionis sensum intelligenda*.

II. Si multiplicator aut divisor B fractio vera sit:

$$\text{sit } A=\frac{u}{*}, B=\frac{u}{*}; a=\frac{v}{*}, b=\frac{v}{*}$$

$$\text{vel } A=\frac{u}{*}, B=\frac{u}{*}; a=\frac{v}{*}, b=\frac{v}{*}$$

$$\text{id est} \quad 3u \quad 2u \quad 3v \quad 2v$$

Patet factum esse < multiplicando, et si B sit divisor, quotum esse dividendo maiorem; nempe si divisor loco 2do fractio vera sit (ex gr) 2(3) tum,

et quaeratur tale, cuius b sit $2(3)tum$, erit a quotus; ita si quaeratur pecunia cuius sit ducatus $2(3)tum$? Aliud est si quaeratur (ex gr) linea b lineae a quale mensum sit; quod item divisionis obiectum est; nempe b dividendus, a divisor ($3tium$ locum tenens) B quotus est. Si a sit divisor, patet in I. in exemplo primo quidvis quod 2, in altero quidvis quod 3, in II quidvis quod $2(3)tum$ quoad suam unitatem (cuiusvis speciei sit ea), quotum esse; omnes hos quotos tamen eatenus aequales esse (vide infra). Notandum vero nomen *quoti*, vel quotientis inde venire; quod in casu ubi divisor loco $3tio$ stat, ad illam quaestionem respondet, quale mensum (quasi quotum) sit b ipsius a (nempe hic $2(3)tum$); si vero quaestio est, quid sit, cuius si quaeratur quotum sit b , respondeatur, $2(3)tum$; tum divisor $2dum$ locum tenet. Pro $2(3)to$ erat antea $3(1)tum$; et b ibi in tres partes (quarum quaevis $= a$ est) partitur, atque b est quoad a numerus nominis 3.

III. Sit multiplicator o , multiplicandus non o ; tum sit multiplicandus o , multiplicator non o ; demum sit factor uterque o : erunt schemata sequi:

$$A = \frac{u}{\quad}, B = o; a = \frac{v}{*}, b = o$$

$$\text{id est } 1U \quad oU \quad 1v \quad ov$$

$$A = \frac{u \ u}{\quad}, B = \frac{u \ u \ u}{\quad}; a = o, b = o$$

$$\text{id est } 2u \quad 3u \quad 2v \text{ (pro } v = o), 3v$$

$$A = \frac{U}{\quad}, B = o; a = \frac{v}{o}, b = o$$

$$\text{id est } 1U \quad oU \quad 1v \quad ov$$

Ubi patet factum esse o , si factorum aliquis o sit; et si dividendus o sit, et divisor non o , quotum o esse; si vero divisor o sit, quotum esse quantitatem quamlibet, adeoque $\frac{o}{o}$ habere valores innumerabiles; nec factum non o esse unquam,

si unus factorum o sit; adeoque $\frac{1}{0}$ esse quantita-
tem impossibilem; ubi valor ipsius $\frac{0}{0}$ quaeritur
in expressione E per e divisa, quaeritur valor cui
fit = vel ad quem limitem tendit expressio $\frac{E}{e}$, dum
tam E quam e $\sim o$.

* Interim tamen communiter accipi solet q pro
valore ipsius $@r$ (vide infra), si $@$ $\sim q$
dum x $\sim r$; si alioquin valor ipsius $@r$ non
detur: imo q insignitur nomine quoad r eodem,
quo $@x$ quoad x gaudet. Ita fas est si x $\sim o$,
adeoque $\frac{1}{x} \sim \infty$ (§ 21), dicere, quod $\frac{1}{0} =$
 ∞ ; ita $\frac{1}{n} \sim o$, si $n \sim \infty$, et potest
dici hoc sensu $\frac{1}{\infty} = o$. Ita $\log o$ esset quanti-
tas impossibilis (vide infra); sed hoc sensu fiet $-\infty$;
nempe $e^{-n} = \frac{1}{e^n}$ quod $\sim o$, si $e > 1$; (his tamen
mathesis carere etiam facile posset; quamvis hae
loquendi formulae nullum errorem inducant).

IV. Si multiplicator aut multiplicandus unitas
sit, sunt schemata sequi:

$$\text{sit } A = \frac{u}{*} = 1, \quad B = \frac{u}{*} = 1; \quad a = \frac{v}{1u}, \quad b = \frac{v}{1v}$$

id est $1u \quad 1u \quad 1v \quad 1v$

$$A = \frac{u \ u \ u}{3u} = 1, \quad B = \frac{u \ u}{2u}; \quad a = \frac{u \ u \ u}{3(v=u)}, \quad b = \frac{u \ u}{2v} = B$$

id est $3u \quad 2u \quad 3(v=u) \quad 2v$

Ubi patet si factor unus unitas sit, factum esse
= factori alteri, et si unitas sit divisor, quotum
esse = dividendo, si vero divisor = dividendo, quo-
tum esse unitatem cuiusvis speciei: nempe $1.a = a$,
et $b.1 = b$, et $\frac{b}{1} = b$, et $\frac{b}{b} = 1$.

§ 33). Sed intuendo schemata haec, et reflectendo variae adhuc oriuntur quaestiones: 1o num semper detur factum? et in genere terminus *4tus* in proportionem? et an semper idem prodeat? (etsi permutentur factores, aut aliter utcumque). Si unitas sit una hexapeda, et multiplicator sit 4 pedes; atque multiplicandus 2 puncta temporis (ex gr), factum nullum (imago impossibilis) est; ita si dividendus sit 2 puncta, et divisor sit integer 3; (pro quavis unitate generaliter) quotus non datur, et nonnisi pro illo casu datur, si unitas ipsius 3 sit n puncta, et divisor loco *3tio* stet: nempe tunc schema sequens est:

Aliq $1 = 3nu$, quot $= 2u$; div $3 = 3n$ punct, divd $= 2$ puncta ubi patet multiplicandum $= 3n$ punctis per $2u$ multiplicatum dare pro facto 2 puncta; neque posse divisorem 3 loco *2do* stare; quia tunc esset in 2 locis prioribus 1 et 3, et duo puncta deberent ad minimum per 3 partiri, ut sit $3v$.

Alioquin praeter excepta, etsi incommensurabilia adfuerint, dari factum, quotum, et *4tum* in proportionem, et unicum prodire utcumque sumantur u , et v , et resultata operationum additionis, subtractionis, multiplicationis, divisionis (praeter excepta) unica esse demonstrabitur, ut (Ax V) applicari queat.

§ 34). De uno tantum casu hic sermo sit; si factores permutentur. Patet ex schematibus, in quibus non est o , factum esse cum multiplicando homogeneum, atque prodire idem, si $n(m)tum$ sit multiplicator, (cuiuscunque unitatis $n(m)tum$ sit); at si multiplicandus linea sit, multiplicator tempus, et permutentur, factum tempus quidem erit, sed quoad suam unitatem expressum erit aequale facto priori; quod ad divisionem quoque applicatur.

Sint prius factores integri homogenei (ex gr) 2 et 3, et sit $1 = *$; patet ex I multiplicatorem 2 dare $* * *$ in quo stellula quaevis superior poni-

tur deorsum 2ies, adeoque * toties ponitur, quot stellulae supra sunt, adeoque idem factum esse factum etiam pro multiplicatore 3. Itaque in hoc casu factores permutati etiam factum idem praebent; (de pluribus factoribus infra).

Sint factores heterogenei, etsi non sint integri: (ex gr) Celeritas est quantitas respectiva cuius index est spatium sub tempore t percursum; mens simplicitati studens pro t unitatem temporis ponit. Sit haec $= 2u$, et describatur sub quovis u spatium v , describetur $2v$ sub $2u$, et erit haec celeritas mobilis illius; dicatur haec C , et s tempus $T=3u$; patet ex imagine sequente, esse s spatium sub

$$1=2u, T=3u; C=\frac{v}{v}, S=\frac{v}{v} \frac{v}{v};$$

T percursum, atque esse $S=T.C$, et esse $C=\frac{S}{T}$. Interim si pro t non unitas temporis sed (ex gr) $4u$ poneretur, C esset $4v$ essetque $T.C=6v$, (pro unitate priori $2u$), et non spatium sub T celeritate illa percursum prodiret. At etiam $\frac{S}{C}=T$, et etiam T multiplicatum per C est $=S$, sed eo tantum sensu, quod $\frac{S}{C}$ est quantitas ita quoad suam unitatem expressa, uti T quoad suam est; ita T multiplicatum per C quidem dat tempus, sed tale, quod quoad unitatem suam expressum est eatenus aequale ipsi S quoad suam unitatem expresso. Nam sit (ex gr) $5v$ unitas spatii, et $2u$ temporis unitas, $T=3u$ sit multiplicandus, et $C=2v$; dividatur u per 5 (juxta $1=5v$), et fiat schema sequens.

$$1=5v, C=2v; T=3u = \begin{array}{ccccc} v & v & v & v & v \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array} = 5ies \begin{array}{c} v \\ * \\ * \\ * \end{array} x = \begin{array}{cc} v & v \\ * & * \\ * & * \end{array}$$

ubi patet x esse tempus 3(5)um unitatis temporis ipsius $2u = \begin{array}{ccccc} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array}$, nam v toties ponitur in x , quoties v in C , hoc vero toties, quoties u in $2u$,

adeoque tot stellulae sunt in x in linea superiori quot sunt deorsum in $2u$, ponuntur autem superiores stellulae in x toties, quoties u in T , nempe 3ies; in $2u$ autem ponuntur item 2 stellulae deorsum positae toties; quoties v in 1 continetur, nempe 5ies. Sed factum erat antea $S=3v$, quod unitatis $=5v$ item $3(5)$ tum est.

Notandum vero est, celeritatem esse quantitatem respectivam, cuius index spatium est, adeoque licet quodvis spatium poni arbitrarie possit pro unitate sive spatii sive celeritatis, si pro uno posita sit, iam alteri aliam dare nefas est. Sit (ex.gr.) celeritatum Unitas illa celeritas qua sub unitate temporis (nempe $2u$) percurratur (ex.gr.) $5v$, tum spatii quoque unitatem $5v$ esse oportet; et si spatii unitas $5v$ sit, celeritatum unitatem illam esse oportet, qua sub unitate temporis percurritur $5v$. Ita prodit spatium e celeritate multiplicata per tempus, uti prius; imo et schemate (pro $T=1$).

$$1=2u; \quad T=2u; \quad C=5v=1, \quad S=5v=1$$

prodiere spatii unitatem, si celeritatis unitas per temporis unitatem multiplicetur, et spatii unitatem per temporis unitatem divisam dare unitatem celeritatis patet.

Talis est conceptus *densitatis*; et ibi quoque densitatis (quae pariter respectiva quantitas est, cuius index massa est, sub unitate voluminis), et massae eadem unitas est.

Plures quoque eiusmodi conceptus dantur; qui sub hoc generali comprehenduntur: si A et B certo respectu eodem quoad unitatem U omnium cum aliquo eodem homogeneorum, gaudeant quantitatibus a et b ; et qualitas ista ipsorum A, B dicatur generaliter q ; dum de q ipsius A et q ipsius B sermo tanquam de quantitatibus est, intelligantur a et b .

Schemata multiplicationis divisionisque Tyronibus iuxta varia exempla cum lineis, aliisque ob oculos ponenda sunt; ut ipsi factum quotumque

exhibeant. In multiplicatione, si multiplicator n (m)tum sit, multiplicandum per m partiendo (§ 16), una pars accipitur *nies* (§ 32). In divisione vero duo sunt schemata

unitas	divisor= d	quotus= x	Divid= D	
3u	2u	3v	2v	et
unitas	quotus= x	divisor= d	Divid= D	
5U	7U	5V	7V	

In prima imagine, D partiendo per 2, quotus e 3 eiusmodi partibus constat; in 2da, Unitate partita per 5, quotus e 7 eiusmodi partibus constat.

Hactenus factum e duobus tantum factoribus fuit: facile cogitare est, adhuc unum accedere, ut (ex.gr.) factum ex b et c , per a multiplicetur, et factum hoc per abc exprimatur; unde ad plures quotvis progredi via est. Sed factores aequales (si ex.gr. quilibet= a) occurrere possunt (ex.gr.) *nies*, quod simplicius per a^n denotatur; et ab na omnino distinguendum est.

Porro succurrit facile ponere (aut obviam venire potest), quidsi factum eiusmodi quorum quilibet= a et in quo factores numero n essent, dividendus, et aliud in quo factores a numero m essent, divisor esset; tum facile adhuc aliud factum eiusmodi cogitatur, in quo factor quilibet= A , et numerus factorum N est, divisum per item eiusmodi factum, cuius quilibet factor= A , et factores numero M sunt. Tum ultro sequitur quotos hos comparare; et si aequalia sint, tam ipsi A quoad a , quam ipsi a quoad A nomen dare. Unde sequens conceptus oritur; quoscunque integros denotent n, m et N, M , dummodo $N=M$ non sit (pag 37).

Si $\frac{a a \dots}{a a \dots} = \frac{A A \dots}{A A \dots}$, et numerus factorum, quorum quilibet= a sit superius n , inferius m , et numerus factorum quorum quilibet= A , sit supra N ,

inferius M , atque $\frac{n-m}{N-M}$ sit $=$ vel $\sim q$; et A sit $=$ vel $\sim B$: tum dicitur B *potentia* (dicatur elementaris, mox extendenda) *exponentis* q ipsius a , et denotatur per $B = a^q$; ipsum a vero dicitur *radix exponentis vel gradus* q ipsius B , denotaturque per $a = \sqrt[q]{B}$. Reperire a ex B et q , dicitur *radicem gradus* q *extrahere*, reperire B ex a et q , dicitur *elevare* a ad q . Unde ultro quaestio se offert; etiam ex B et a reperire q ; adeoque quaeritur 1o num detur pro datis P et a tale p , ut $a^p = P$ sit? Unde via aperitur, pro omnibus cum P homogeneis idem a retinere quaestione eadem: atque hic oritur *logarithmus elementaris*; nimirum p dicitur *log. elem.* P . quoad basim a : quomodo vero ad nomenclationem

ipsius B $\frac{n-m}{N-M}$ perveniri potuerit, exemplum sequens monet: sit $\frac{aaaa}{aa} = \frac{AAA}{AA}$, patet ad sinistram 4—2 factores manere, et ad dextram 3—2, et esse $a^2 = A = \frac{4-2}{3-2}$. Quomodo autem conceptus iste in analysi extendatur paulo inferius exponetur.

§. 35. Sit fas heic hucusque promissorum quibusdam complendis, filum paulisper interrompere, postea item continuandum.

I. De summis aequalibus ad aequalitatem additorum concludere minime licet; cum resultata sub conditione certa accepta, e datis inaequalibus aequalia esse queant: proventus expensaeque aequales, etsi utrumque millionesies augeatur, certo respectu zerum producant, quamvis status mirum in modum differant; nulla cupido nec ulla explendi facultas, atque ∞ ta voluntas cum facultate ∞ ta, discrimine ∞ to conveniunt in eo, quod neutri desit quidquam. Ita valde diversi factores factum (saltem respectu certo) aequale producant: veluti cum mensa et vita comparatum est, ut non dapes

aut panis siligineus, sed appetitus ad id quod cuique est, dulcem elaborent saporem.

II. Si ex aequalibus demantur aequalia, residua possunt esse, prouti hinc vel illinc fiat demtio, valde inaequalia, si ita uti remanent considerentur; omnibus vero ad formam temporis reductis (§ 8.) absolute aequalia esse demonstrabitur.

Omnia ad formam temporis rectaeque reduci dictum est (ibidem); potest etiam circulus adjici, ad quem etiam plura quantitatum genera commode reducuntur; interim et circulus ipse ad rectam reduci potest. Quamobrem ut simul plura sint, quae oculis subjecta fidelibus, conceptum faciliorem clarioremque reddant, quum ita cum mentis natura comparatum sit, ut ab iis quae cernuntur ad abstracta ascendatur; ad finem generalis conspectus Geometriae, recta planumque generabuntur, ut haec quoque in postmodum specialius tractanda Arithmetica praesto sint.

Quantitatem autem ad formam temporis reductam liceat brevius *reductam* dicere.

* III. At quaestio fit: num quantitas quaevis unica reducta gaudeat? Arithmetica de *finitis* tractat (§. 18.), nempe de talibus, quorum quodvis T tale est, ut si qua portio u eius detur, sit tale nomen numericum n , ut nu sit semper $> T$, nec unquam sit $nu =$ vel $< T$; qualia esse tempus rectamque inter quaevis 2 puncta demonstrabitur; eatenusque etiam reductam quantitatem, finitam esse, si et quantitatis iam reductae partes exinde omnes eiusmodi accipiantur: multum nempe inde pendet, qualesnam et quomodo accipiantur partes; (ex.gr. Fig.1) Si v, z , angulos, u fasciam inter parallellas denotet; T quoad qualemvis angulum v quantitas *respective finita* est, ipsis v ad verticem primum juxta se invicem positis; at cum quoad u haud detur tale n , ut $nu > T$ sit, T *absolute finita* quantitas non est. (§. 18).

Num portio quaevis spatii et superficies quaevis undique clausa quantitas sensu dicto finita sit? vide inferius

IV. Per P constat (§6. 2) ex $A, B \dots F$, intelligitur $A, B \dots F$ esse tales portiones ipsius P , quarum nulla cum ulla alia earundem portionem communem habet, et praeter quas necquidquam ex P est. Per Q continetur a P vero intelligitur aut ipsum P aut portionem aliquam ipsius P esse $\subseteq Q$. Si T constet ex $a, b \dots f$, et idem T habeat eiusmodi portiones $a', b' \dots f'$, ut $a \subseteq a'$, $b \subseteq b'$ & $f \subseteq f'$; tum si T finitum sit, demonstrari potest, nulla id praeter $a', b' \dots f'$ portione gaudere; at generaliter verum non est, uti (Fig 2) ostendit.

Sed quaeritur (§.13) si T finitum sit, et constet ex aliis partibus $\alpha, \beta \dots$ etiam; num quocunque ordine additae partes quaevis e quibus constat, summam eandem dent? Generaliter *addita etsi adfuerint $\oplus$ et $\ominus$ quoque, summam quocunque ordine posita eandem edunt.*

* Exprimantur quantitates rectis, et generetur summa juxta (§.10); atque donec aliud monitum fuerit, dum recta una dicetur alia minor, concipiatur illa extremo communi in hanc cadente, parte ex hac prominente superari. Considerentur prius tantum A et B , quavis determinationum $\oplus, \ominus$ affecta; et tum fiat conclusio ab n ad $n+1$ (pag 16.) Sit (Fig.4.) in p initium primum, et extremum ultimum sit p' , sitque prius $A \subseteq B$; erit aut utrumque $\oplus$, aut utrumque $\ominus$, aut unum $\oplus$ alterum $\ominus$; si utrumque $\oplus$ sit, sive A ponatur prius, sive B , cum congruant, idem est; ita quodvis postponatur, idem p' prodit ad dextram; idem fiet ad sinistram, si utrumque $\ominus$ fuerit; si opposita sint, et A ponatur ex p ad dextram, atque ab eius extremo sinistrorsum ponatur B , rectae etiam ita congruunt (vide infra), adeoque p et p' coincident, et summa est 0 ; atque manifesto idem fit prius B sinistrorsum, et ab eius extremo dextrorsum posito A . Si vero A superet ipsam B recta k (Fig. 5.), et ponatur ex p prius A dextrorsum, et inde B sinistrorsum, cadet p' a p ad distantiam k , et idem p' prodibit, prius ex p ad sinistram posito B , atque in-

de dextrorsum posito A (ex B et k constante). Si $A \times$ et $B =$ manente, A superetur a B recta k ; erit (Fig.6.) summa k ad sinistram a p , manifesto in utroque casu. Itaque duae rectae qualicunque determinationum $\times$, $=$ affectae fuerint, sive eadem sive diversa, quovis ordine summam eandem prae-bent. Si vero hoc de quantitibus numero n valeat, valet etiam de $n+1$. Nam valeat de $A, B \dots D$, et accedat E ; erit E aut $\times$ aut $=$, est etiam resultatum priorum aut $\times$ aut $=$; adeoque quivis casuum priorum cum quovis posteriorum combinandus est. Sit prius $\times E$, et resultatum prius quoque sit $\times$ (poterit quidem hoc esse aut o aut $>$ aut $<$ E , at quilibet casus modo sequente evidens fit). Ponatur primo $\times E$, terminetur in P , sit p' resultatum priorum, et cogitetur $A, B \dots D$ ex P incipiendo plane ita poni, uti antea ex p incipiendo ponebatur, manifesto cadet extremum ipsius D in p'' , nempe ad distantiam k dextrorsum; adeoque eo, quo caderet extremum ipsius E , si $\times E$ ex p' (resultato ipsorum $A, B \dots D$) poneretur, cum E constet ex k et r . Idem ergo resultatum dant $E, A, B \dots D$ et $A, B \dots D, E$; dant vero etiam $E, A, B \dots D$ (excluso D) quolibet ordine resultatum idem (per hyp.), unde positi D extremum determinatur. Itaque omnes imagines in quibus D ultimum est, summam eandem dant; et cum ipsorum $A, B \dots D$ quodvis ultimo poni, et ut prius, E anteponi postponique possit; idem et de $A, B \dots D, E$ valet.

Si vero resultatum priorum fuerit $= k$ (Fig.8.), et prius ponatur $\times E$; erit $A, B \dots D$ ex P ponendo extremum ultimum in p'' , nempe item sinistrorsum ad distantiam k a P , adeoque idem, quam si e p' (extremo priorum ultimo) poneretur $\times E$, (ex r et k constans).

Sit iam $= E$, et resultatum $\times k$ (Fig.9), patet et hic eodem modo, extremo priorum ultimo et hic p' et extremo ipsius E inde positi p'' dicto, sive primum sive ultimum sit $= E$, idem prodire.

Pariter ostendent (Fig. 10; 11. 12) casum, quodsi

pro $\vdash E$ resultatum priorum quoque $\vdash$ sit; dummodo significationes literarum priores retineantur, et observetur hunc casum tres casus habere; nempe E aut $\vdash$ aut $>$ aut $<$ k est.

Conseq. quotcunque fuerint addenda et sive mere $\vdash$ va sive mere $\vdash$ va, sive mixta fuerint, quocunque ordine, etiamsi prius omnia $\vdash$ va dein omnia $\vdash$ va ponantur, summam eandem prodire manifestum est. Unde etiam patet, resultatum idem esse, si summa $\vdash$ vorum ponatur prius ex p , et ex extremo ultimo horum (quod dicatur P') ponatur sinistrorsum s summa $\vdash$ vorum; nam si ex P' post se invicem ponantur, aequale prodit ei, quod esset, si ex p ponerentur (Ax V.), posterius vero summam $\vdash$ rum daret. Patet etiam demum summam istam satisfacere, etiamsi illa quorum summa s est, pro indice demtionis quoad illa quorum summa S est, posita fuerint.

Quaeritur tamen, num undevis fiat demtio, atque in genere num additionis (adeoque subtractionis quoque) resultatum unicum sit, id est ex aequalibus semper eidem aequale prodeat? At prius de aequalitate quoad portiones (§. 6.) uberius agendum est, et antea de limite (§. 21.) quaedam dicenda sunt.

VI. *Si q ita crescat, ut post quodvis incrementum adveniat novum, maneat tamen semper $< Q$: tum q limite gaudet, (Fig. 13.)*

Nam sit q tempus (idem ad rectam per punctum descriptam, imo omnes quantitates reductas applicari potest); sitque temporis, a P incipiendo crescentis in ∞ , nomen generale x ; atque fiat in quovis puncto temporis quaestio, num q maius illo x quod eousque generatum est, esse queat? et denotet (pag. 16) A id, quod $q >$ illo x esse queat: item exinde patet, dari ultimum aliquod punctum p , intra quod et P semper A est, et post quod (aliquamdiu saltem) non est, atque tunc aut ultimum A aut primum non A esse. Ultimum A non est quia si tunc $x \vdash x$ sit, et ad quaestionem, num $q >$ x' esse queat? responsio ita sit: tum aliquod

$q > x'$ erit, et certum tale q erit (certa quantitate $q') > x'$, adeoque p ulterius potuisset debuissetque accipi; nam ultra x' quoque ante finem temporis $x' + q'$ responsio semper *ita* fuisset. Est igitur in p *primum non* A; adeoque x' est primum tale x , quo quidvis sit minus, eo maius fieri q potest, sed quo (nempe ipso x') q maius fieri nequit. At neque $q = x'$ fieri potest; nam dum id fieret, cum q quantumcunque fiat, novum (per hyp.) incrementum capere debeat, postea $q > x'$ fieret (contra plane demonstratum). Itaque $q \sim x'$. (§. 21).

Patet hinc etiam quantitatem *ita* decreascentem ut post decrementum quodvis item novum adveniat, nunquam tamen fiat 0, limitem habere. Nam accipiatur (in praec.) q pro decremento ipsius Q; remanet $Q - q$, id est ex Q fit $Q - q$; quod crescente q , sine fine minuitur, et pro limite habet id quod inter p et * est; si vero * nempe extremum ipsius Q plane in p sumatur, limes 0 fit; qui in neutro casu attingitur, cum q nunquam fiat $= x'$, quamvis ipsi p dato quovis propius terminari queat.

* VII. *Tempus quodvis continuum p q gaudet 2 partibus absolute aequalibus. Fig. 14.*

Nam accipiatur punctum eius aliquod a , et aliud b inter a et q ; erit aut $pa = bq$, aut alterutrum $=$ parti alterius; si non prius sit, cogitetur ex p positum illi $=$ quod $<$ altero est, terminetur in a ; et in quovis puncto a p usque in q quaeratur; estne tempus a p usque ad illud, tale, ut si ei $=$ adjungatur, ante q terminetur, vel non? Dicatur prius (pag. 16) A; patet pa (veluti partem quamvis eius) tale, pq vero tale non esse; adeoque dari in aliquo puncto c aut *ultimum* A aut *primum non* A. Ultimum esse nequit: quia si ipsi $pc =$ adjungatur, terminetur in b , (cum eatenus ante q terminari debeat); cogitetur punctum d inter b et q , et e inter d et q ; erit aut $bd = de$, aut alterutrum $=$ parti alterius; vocetur z illud quod $<$ est, alterum v ; manifesto est $pc + z < pc + v$, et $p + z$

$+pc+z < pq$; adeoque z adjuncto ipsi pc , punctum quaestioni respondens ulterius accipiendum, in c non esset. Est igitur in c primum non A ; adeoque aut $pc+ep \doteq pq$, aut $pc+pc > pq$; posterius esse nequit; nam terminetur $pc+pc$ in r ; cogitetur punctum aliquod s inter q et r , et qs, sr dicantur x, x' ; erit aut $x=x'$, aut alterutrum altero majus; sit $x \doteq x' + k$; erit $pc+pc \doteq pq + x' + x' + k \doteq pq + k + x' + x'$ (V); atque $pc+pc - x' - x' \doteq pc - x' + pc - x' = pq + k$; itaque iam ante c fuisset non A ; idem patet, si $qs \doteq sr$. Manet igitur $pc+pc = pq$.

* VIII. Si temporis Q accipiatur dimidium, et cujusvis dimidii item dimidium accipiatur, ac nomen eorum generale sit z ; tum $z \sim o$.

Nam crescente q (in VI Fig. 13) a B usque ad $*$, fiet ultimo $Q - q = o$. Quaeratur a P incipiendo in cujusvis q puncto extremo (imo ultra $*$ quoque ubi quodvis punctum tale est, ante quod datur tale $Q - q$ in $*$, quo (cum $id = o$ sit) $z <$ fieri nequit), num z quovis $Q - q$ quod antea fuit, $<$ fieri possit? erit ultimum aliquod punctum p , in quo responsio ita erit (p. 16). Si p ante $*$ esset, tum eo quod inter p et $*$ est, a dicto, aliquod z est $< a + (\omega < a)$; quia hoc $Q - q$ ante a fuit; huius vero

dimidium est $\frac{a}{2} + \frac{\omega}{2}$, quod $< a$ esse patet; itaque punctum p ulterius versus $*$ accipiendum fuisset. Fit itaque $z <$ quovis quod a p ipsi $*$ quantumvis propissimo usque ad $*$ est, o vero fit nunquam. Conseq. $z \sim o$.

* IX. Sit u tempus quoddam continuum inter 2 puncta, et multiplicetur u per factum e factoribus numero n , quorum quivis $= 2$; erit factum numerus quoad u .

Respondeat enim cuivis u numeri nu , aliquis e factoribus dictis ipsi 2 aequalibus, et cuivis respondeat alius; atque ab aliquo puncto temporis p ponatur cogitatione in futurum, $2u$ sub primo u ipsius nu , tum sub 2do u ipsius nu adjungatur item

$2u$, et sub quovis novo u ipsius nu ab extremo novissime positi ponatur cogitatione in futurum aequale ei quod a p eousque positum est (per Ax I); ultimum u ipsius nu adveniet (Ax II), et tum $2.2 \dots 2u$ positum erit. Est autem quivis numerus quoad u bis positus, numerus quoad u ; adeoque $2.2 \dots 2u$ quoque (pag. 16. F).

* X. *Temporis continui Q quod inter 2 puncta est, quaevis portio k certo numero accepta superat ipsum Q.*

Nam quaeratur (in VIII.) in quovis puncto a P incipiendo usque ad $*$, (imo ultra quoque); num α certo dimidiationum numero $<$ quovis $Q - q$ quod antea fuit, fieri potest? et hic datur ratiocinio iam saepius repetito (pag. 16) punctum aliquod p , in quo ultimo ita respondetur; quum prius omnino ita sit, aliquando vero, si nempe ultra $*$ eatur, detur tale $Q - q$ quod antea fuit, nempe dam $Q - q = 0$, quo α nunquam $<$ fieri potest. Patet vero (ut in VIII), p nullibi ante $*$ fieri posse. Itaque α dato quovis k minus fieri certo dimidiationum numero potest, et conseq. $k > \frac{Q}{2.2 \dots 2}$, seu cum $2.2 \dots 2$ (per praec) numerus sit (ex gr n), est $k > \frac{Q}{n}$, adeoque $Q < nk$.

* XI. *Tempus continuum T per quemvis integrum n dividi potest.*

Nam pro quovis n dari tale $2.2 \dots 2$, ut $2.2 \dots 2u > nu$, facile patet, si cuivis u ipsius nu aliquis (et cuivis alius) factor 2 respondeat; semper enim accedente novo factore 2, ipso u quod in nu ponitur, majus accedit, et quidem majori, nam primo u ipsius nu respondet $2u$.

Pro $n=1$ aut $n=2$, aut $n=2.2 \dots 2$, dictum iam est; quaestio de aliis est. Dividatur T per $2.2 \dots 2 > n$, sitque quotus a , et dicatur d dimidium ipsius T; erit $nd > T$ (cum n ad minimum 3 sit), et $na < T$, nam a si nies accipiatur ex T, adhuc supererunt tot a , quo numero superat $2.2 \dots 2$ ipsum n . Quaeratur ad initio ipsius a por-

ro usque ad finem ipsius nd eundo, in quovis puncto p ; num (si illud tempus quod ab initio ipsius a usque ad p est, nomine generali x dicatur); sit $nx < T$? erit (pag 16) aliquod punctum P in quo aut ultimo erit $nx < T$, aut primo erit nx non $< T$. Prius esse nequit; nam sit tum $x = x'$; si $nx' < T$ esset, tum sit $nx' + b = T$; dicatur b' quotus ex b per 2. 2 --- 2 $> n$ diviso, erit (2. 2 --- 2 $b' = b$) $> nb'$ (ut supra); adeoque $nx' + nb'$ manifesto est $< (nx' + b$ quod erat $= T)$, itaque etiam $n(x' + b')$ est $< T$, adeoque daretur aliquod $> x'$, quod n ies acceptum $< T$, et in P non esset, ultimo $nx < T$. Est igitur in P prima vice nx non $< T$; itaque tum nx' aut $= T$, aut $nx' > T$ est; posterius esse nequit; nam sit $nx' - b = T$, et denotet b' id quod antea, erit nb' item $< b$, adeoque $nx' - b < nx' - nb'$; id est $T < n(x' - b')$ (uti statim patebit); et in P non esset primum tale x , ut $nx > T$ sit, nam antea iam $x' - b'$ tale fuit. Consequenter $nx' = T$ est. Enimvero heic quantitatum comparatio quoad aequalitatem, vel maioritatem minoritatemve ita in proxime dictis intellecta est, uti (pag 45 *) dictum est; nempe etsi de tempore sermo sit, et (ex gr) α, β, γ sint tempora continua, atque $\alpha - \beta$ (pro α, β, γ $\neq$ vis atque $\beta < \alpha$) cum γ comparctur; ponatur cogitatione e certo temporis puncto p , tempus α in futurum, et ab extremo huius dematur e praeterito tempus $= \beta$, sit extremum huius p' , cogiteturque ex p item in futurum, tempus $= \gamma$; atque per id quod alterutrum ex gr. $\gamma > \alpha - \beta$ est quantitate q , intelligatur in dictis, usque ad extremum temporis $= \gamma$ ex p positi, post p' tempus q esse. Mox $>$ et $<$ et $=$ generalitate superiori accipientur. *Omnia dicta* vero ad *rectam* applicari patet.

Quod vero si n numerus integer sit, et α, β $\neq$ va sint, (tempora aut rectae), $n(\alpha + \beta) = n\alpha + n\beta$ facile patet. Nam dum $(\alpha + \beta)$ accipitur n ies, ponitur tam α quam β numero eodem n , necquidquam ponitur aliud. Ita si accedat 3^{ium} γ , $\alpha + \beta$ dicatur κ ,

et inde via de n ad $n+1$ progredi usquequo libu-
erit licet.

Pariter $\frac{\alpha+\beta}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n}$. Nam sit $\frac{\alpha}{n} = u$, et
 $\frac{\beta}{n} = v$; patet u in α , et v in β , adeoque u et v
in α et β poni nies. Ita $\frac{\gamma+B}{n}$ (pro $B=\alpha+\beta$) est
 $= \frac{\gamma}{n} + \frac{B}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{n}$; et ita
de n ad $n+1$ progredi licet.

Si omnia $-va$ fuerint aequae patet. Si vero $k=\alpha$
 $-\beta$ sit per n multiplicandum, aut per m dividen-
dum; tum e quovis α erit unum β demendum, a-
deoque si nies ponatur, ex nies α demetur $n \beta$, et
totidem k nempe numero n prodibunt. Ita si $\frac{\alpha}{m}$
 $=u$, et $\frac{\beta}{m}=v$, erit $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{m} = u-v$, et $m(u-v)$
 $=mu-mv=\alpha-\beta$, nam $mu=\alpha$, et $mv=\beta$; itaque
 $u-v = \frac{\alpha-\beta}{m} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{m}$.

Unde (ut prius) ad plura quotvis et qualiavis
progrediendo, patet idem prodire; sive summa di-
vidatur per m , sive singula divisa addantur; item
sive quotus prior per n multiplicetur, sive quoti
singuli multiplicati per n , addantur.

* XII. Si ω recta (vel tempore) possint nu ac-
cipi ita ut $\omega (=0$ vel $< n)$ supersit: ex eodem
($n+1$)u accipi nequeunt. Nam partes quaevis ipsi-
us $nu+\omega$ quocunque ordine post se invicem posi-
tae ex p incipiendo in eodem puncto terminantur,
(V); adeoque etsi u ponatur nies post se invicem,
et ad finem eorum adjungatur ω ; pariter si ($n+1$)ies
quoque adesset u , et toties post se invicem pone-
retur, ac si quod R superesset, postponeretur;
manifesto autem ($n+1$)um u ultra ω terminatur.

* XIII. *Quaevīs quantitas A ad unicum reduci potest; (talem ut in (III.) intelligendo, et quae tam ipsa, quam quaevis portio eius reduci potest, aequalitate terminata, aut interminata per limitem (§ 6 et 8.)*

Nam possit (Fig 15) tam ad $\mathcal{P}^*$ quam ad $\mathcal{P}^{*'}$ reduci; tum $\mathcal{P}s = nu$ (pro $u < st$) est $> A$; $\mathcal{P}s + st$ vero esset $< A$; adeoque nu esset $> A$ et $< A$ (contra III).

* XVI. Si $A \sqsubseteq B$; est etiam $A = B$, id est $A' = B'$ (§.8.)

Nam ponantur partes utriusque congruae ex P incipiendo post se invicem ad rectam; si terminata sit aequalitas, manifeste simul terminabuntur; cum quaevis (per praec.) unica reducta gaudeat; si interminata fuerit aequalitas, tum reducta semper crescendo, manens tamen certo dato minus, gaudebit limite, et quidem utrique communi. Nam si A' in $*$ et B' in $^{*'}$ terminaretur; manerent omnes partes ex A depositae intra $*$, ipsi tamen quam propissime euntes; partes vero ipsius B iis congruae semper simul ponerentur; et utriusque differentia a suo limite quovis dabili u minus fieret; sit $\frac{\mathcal{P}s}{n} = (u < st)$; differentia partium ex B positarum (cum semper intra $*$ terminentur simul cum partibus congruis ex A positis) ab eius limite supposito $\mathcal{P}^{*'}$ semper $> st$ manebit; adeoque cum haec $< u$ fieri debeat, erit etiam $st < u$; itaque cum $st > u$ erat, in uno casu neque unum u posset ex st accipi, in altero praeter u adhuc superesset. Itaque hoc pacto reducta eodem limite gaudent; quodvis autem ad unicum tantum reduci potest.

Conversim quoque si $A' \sqsubseteq B'$, etiam $A \sqsubseteq B$. Nam ex gr circuli A reducendi partibus certis in rectangula altitudinis α ordinatis, haec ex $\mathcal{P}$ incipiendo post se invicem junguntur; et si baseos limes $\mathcal{P}^{*'}$ sit, pro quovis dato ω licet ipsi $^{*'}$ tam prope ire ex gr in s , ut rectangulum ex α et $s^{*'}$ sit

$\leq \omega$, et etiam quod ex A superest $\leq \omega$ sit; si pro B propius eundem in t est, ut quod ex eo superest $\leq \omega$ sit, tum ex A adhuc $\leq$ supererit; respondet vero cuivis parti a $\mathfrak{P}$ usque in t pars aliqua ipsius A et aliqua ipsius $B \equiv$ et cuivis alii alia. (IV).

Hinc etiam signorum $>$, $<$, $\equiv$ quaecvis duo exclusiva ponunt 3tium, et quodvis excludit reliqua duo. Nam si A non $>$ nec $<$ B , tum A' neque ulterius neque interius terminatur quam B' ; quia si (ex gr) ulterius terminaretur, sit a' pars ipsius A' cum B' congrua, erit tum $a \equiv B$, et a pars ipsius A erit, quia ei quoque, quod in A' praeter a' est respondet aliquid ex A praeter a ; itaque $B < A$ esset (contra hyp); ita nec interius terminatur; conseq A' et B' simul terminantur; adeoque $A' \equiv B'$, et inde $A \equiv B$. Si A non $>$ nec $\equiv B$; tum A' item non terminatur ulterius quam B' ; neque simul, quia tum $A \equiv B$ esset; itaque interius terminari debet; adeoque A' est pars ipsius B' , et id ex B quod huic parti respondet, est $\equiv A$, reliquo ipsius B' vero respondet aliquid ex B , et eo superat B ipsum A . Ita patet, esse $A > B$, si A non $<$ nec $\equiv B$. Si vero $A \equiv B$, tum A non $>$ nec $<$ B ; quia tum $A' \equiv B'$, et si $A >$ vel $<$ B esset, A' aut ulterius aut interius terminaretur. Ita si $A > B$, tum A non $\equiv$ nec $<$ B ; quia tunc A' ulterius quam B' terminatur, si vero $A \equiv$ vel $<$ B , tum A' simul aut interius terminaretur. Ita si $A < B$, tum A nec $\equiv$ nec $>$ B esse patet. *Nempe*.

* XVII. Si A constet ex a, b , est $A' \equiv a' + b'$ (etsi interminata sit reductio) Fig. 16. Sit enim a' in p terminatum ex $\mathfrak{P}$ incipiendo, et b' sit $p *$; si A' non in $*$ terminetur, terminabitur aut ultra aut intra. Si in $*$ terminetur; dividatur $\mathfrak{P}p$ per talem integrum, ut quotus u sit $< p *$ et etiam $< \frac{**}{2}$ transferatur u ex p incipiendo usquequo aliquod u ipsum $*$ primo transgrediendo in h terminetur; primum u post p terminetur in h ; erit $ph + *h <$ aut $\equiv 2u$, quia $*h$ ad summum $\equiv u$ est; $h\mathfrak{P}$ est $> u$, et

$ph > b$; ponatur $pk + * h$ post $*$, terminetur in s , (patet nempe $2u$ esse $< * *$), erit $\mathcal{P}s > a + b$; itaque cum $\mathcal{P}s = \mathcal{P}h + u = nu$ (nempe certo numero ipsius u); est $nu > A$ (cum A ex a et b constet); item nu esset $< A$, si A' in $*$ terminaretur, quia tunc A etiam $> \mathcal{P}t$ esset. Itaque ex A possent una vice plura u quam altera accipi (contra XII). Si vero, A' intra $*$ terminaretur in l ; ex initio $n-1$ ti u in h terminati, ponatur unum u versus p ; patet n ita accipi posse, ut hoc inter $*$ et finem ipsius A' terminetur in i ; concipiatur $\frac{u}{2}$ demi ex p versus $\mathcal{P}$; reliquum ex a erit; ita demto $\frac{u}{2}$ ex $*$ versus p , reliquum usque ad p ex b erit; itaque demto u ex $*$ versus p , omne ex $\mathcal{P}i$ ex a et b adeoque ex A esset; sit q inter l et i , aderunt in $\mathcal{P}q$ omnes partes ipsius A ; et ex $\mathcal{P}i$ (pro $q i = v$) plura v accipi poterunt, quam ex $\mathcal{P}q$, adeoque ex A in uno casu plura quam in altero accipi poterunt (contra XII). Itaque neque intra neque ultra $*$ terminari A' potest, sed in $*$ terminari debet.

Si plures quotvis certo numero m fuerint partes ipsius A ; tum nominentur a et b una litera α , et si B constet ex α, c , erit $B' = \alpha' + c'$; et ita de n ad $n+1$ progrediendo, patet partes componentes reductas post se invicem junctas totum reductum exhibere.

XVIII. Posteaquam (in XIII) demonstratum est, quantitatem reducibilem unica reducta gaudere; si ubi de quantitate sermo in Arithmetica est, semper ut reductae tractentur: patet (ex V) *additionis* (adeoque etiam *subtractionis* § 14) *resultatum unicum* esse. Interim tamen si quantitates ita uti sunt, considerentur; ex.gr. sit circulus $C \equiv$ quadrato Q , et $\Delta a \equiv$ circulo c ; dubium subvenit, num etiamsi undevīs dematur a ex C et c ex Q , residuum R ex C sit $\equiv$ residuo r ex c ? Erunt omnino; nam (per praec.) $a' + R' = C'$, et $c' + r' = Q'$, atque $C' = Q'$, et $a' = c'$; unde patet a' et c' si ex eodem

initio ponantur, simul terminari, et inde posita R' et r' quoque simul terminari; itaque $R'=r'$, adeoque $R=r$. Supponitur hic circulum, et reliqua finita (sensu III) esse: de hoc tamen aliquid hoc respiciens statim addetur.

Si $a'=c'$, ac $R=0$, erit et $r=0$. Non tamen generaliter dici potest, si ex aequalibus demtis aequalibus, ex uno nihil supersit, neque ex altero superesse quidquam. Ex.gr. (Fig 3) $a=a'$, $b=b'$, $f=f'$, et praeter a, b, f nihil, praeter a', b', f' vero g superest: at de talibus quantitativibus in Arithmetica sermo est, uti (in III) dictum est; cuius nulla portio omnidabili pluries e toto ipso accipi potest. Nempe si e tali possit u accipi n ies, et supersit $\omega=0$ vel $<u$; ex eadem $(n+1)$ ies accipi u nequit. Nam sit ω' id, quod in priori casu adjiciendum esset, ut $(n+1)$ tum u compleatur; tum e partibus ipsius $nu+\omega$ deberet $nu+\omega+\omega'$ exstrui; dematur ω' , repleatur vacuitas eius ex $nu+\omega$, et nova vacuitas exorta item e residuo ipsius $nu+\omega$, et quaecvis nova vacuitas item inde expleatur in infinitum; vacuitates istas expleantur sunt partes ipsius $nu+\omega$ (ex iis e quibus $nu+\omega$ constat); itaque ω' accipi ex A omnidabili pluries posset.

* XIX. Adjicere adhuc quaedam de aequalitate terminata liceat; quantitativibus heic, uti sunt (sine reductione) consideratis.

1^o Si $A=B=C$, est etiam $A=B$ (aequalitatem heic terminatam nisi aliud monitum fuerit intelligendo). Nam constet A ex $a, a' \dots u$; B ex $b, b' \dots v$, item ex $\beta, \beta' \dots v'$; et C ex $c, c' \dots t$, ac $a=b$, $a'=b'$, $\dots$ et $u=v$, atque $\beta=c$, $\beta'=c'$, $\dots$ et $v'=t$ (accento iam non sensu XVI et sequ. accepto). Fiat initium cum β , progrediendo usque ad v' ; est β aut aliquod ipsorum $b, b' \dots v$, aut constat ex aliquo vel aliquibus, aut simul etiam (vel tantum) portione vel portionibus eorundem; cuivis tali autem, quod aut aliquod ipsorum $b, b' \dots v$ aut portio alicuius eorum est, respondet aliquod ipsorum $a, a' \dots u$, aut in casu posteriore

aliqua portio alicujus ipsorumdem absolute aequalis. Itaque si c in illas portiones discriptum cogitetur, quum $c \doteq \beta$ sit, cuivis earum datur in A absolute aequalis. Pariter $c' \doteq \beta'$ considerato, ipsi c' , aut portionibus ejus omnibus reperientur in A absolute aequales, et quidem cum prioribus nullam portionem communem habentes; nam si aliqua portio bis occurreret, tum α, α' --- portionem haberent communem (contra IV). Ita percurrento singula c, c' --- t et β, β' --- v' , ubi ad t adeoque ad v' perventum est, atque ex C nil superest, neque ex B supererit (XVIII), adeoque neque ex A . Conseq. $A \doteq C$ aequalitate terminata.

* 2do. Si $P \doteq Q$, et portio quaevis p ipsius P dematur undevis, atque portio quaevis q ipsius Q dematur, et $p \doteq q$; erunt illa quae ex P et Q remanent, aequalitate terminata aequalia. (Fig. 17).

Nam dicatur P' id quod superest ex P praeter p , et Q' id quod praeter q ex Q est, et sit p' id quod congruentibus P et Q ipsi p ex Q congruit, et q' id quod tum ex P ipsi q congruit; et dicatur R complexus omnis ejus, quod praeter p et q' ex P est, et R' complexus omnis, quod ex Q praeter q et p' est. Aut habebunt p et q' portionem aliquam communem, aut non.

I. Si non habeant (Fig. 17. I) manifeste constat P' ex R et q' (nam P constat ex p, q', R), et Q' ex R' et p' ; atque $R \doteq R'$, et $q' \doteq p'$; adeoque Q' ex P' extrui potest, q' ex P' in p' , et R in R' positus. Imo aequalitas absoluta restituitur inter residua; si in Q' , in locum demti q ponatur item ex Q' exemptum p' ; aut in P' in locum demti p ponatur item ex P' exemptum q' .

II. Si vero p et q' in P portionem communem habeant: tum si pars communis dematur, residua ex P et Q erunt abs. aequalia; fitaque id tantum quaeritur, num ex p et q remaneant aequ. terminata aequalia. Quaestio igitur huc redit.

Si (Fig. 17, II) $A \doteq B$, et pars K ipsius A cum parte k ipsius B (ut in figura trium prima) coin-

eidat: id quod ex A praeter K est, ei quod ex B praeter k est, aequ. terminata aequale est.

Dicatur enim quaevis pars ipsius k , illi parti ipsius K respondens, cum qua tunc congruit; ponaturque A super B, ut congruant; atque id ex A, quod praeter K est, et nunc in k cadit, dicatur K' , id ex A vero quod nunc extra K et k cadit, sit A' ; ita id ex B quod praeter k est, et nunc in K cadit sit k' , id ex B vero quod nunc extra k et K cadit, sit B' ; atque id ex k quod nunc cum K' coincidit, sit b , et id ex K quod nunc cum k' coincidit, sit a ; atque id ex K quod praeter a est sit K'' , et id ex k quod praeter b est, sit k'' .

Dematurque a ex K, et ei respondens a' ex k , ac ponatur k' quod sub a erat, in locum demti a' (juxta I); atque residuis ex A, B, K'' , k'' , b , (restituta per I aequalitate abs.), generaliter A, B, K, f, b dictis, post quamvis operationem, si quid u ex k' (migrante in B semper eo ex k' quod extra b cadit), sub K cadat, dematur ex K illud a , quod supra u cadit, et e complexu ipsorum b et f dematur a' ipsi a ex k respondens, ponaturque u in locum demti a' (juxta I), continuando, donec nulum u sub K cadat. Erit residuum ex A abs. aequale residuo ex B, atque ex A nonnisi per partes resectum K, ex B vero demtum k erit.

Nempe K constat ex K'' et ex a supra k' cadente; k constat ex k'' et ex b sub K' cadente; A constat ex K' , K'' , a , A' , et B constat ex k' , k'' , b , B' .

K'' et k'' (ita K et f) coincidunt. Nam nullum punctum ipsius K'' extra k'' cadit; nam illud in B cadens, in k' vel b aut B' caderet; in k' vero non cadit, quia k' extra K'' est, in b non, quia b cum K' coincidens extra K'' est, nec in B' , quia hoc extra K et k est. Pariter nullum punctum ipsius k'' extra K'' cadit; idemque ad K et f applicatur.

Hinc $b = a$; nam $K = k$, $K = K'' + a$, et $k = k'' + b$, et K'' et k'' coincidunt.

Semper residuum illud u ex k' , quod ex b prominet, migrat in B; nempe si quod u ex k' extra b cadat, illud sub K cadet, quia ex k nonnisi b

et $\mathfrak{f}$ superest, $\mathfrak{f}$ vero cum $\mathfrak{K}$ coïncidit; atque hoc novam demtionem parit. Si vero nullum u extra b cadat; tum jam totum k' in b positum (in loca demtorum) erit, necquidquam ex parte b idsius k supererit; quia semper aliae partes aliis respondentibus demtae sunt, et $k'=b$. Eritque residuum ex k nonnisi $\mathfrak{f}$, adeoque residuum ex K erit $\mathfrak{K}$; nam $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{K}$ coïncident, nisi utrumque o sit; neque ex K majus vel minus residuum quam ex k est. Consequenter, etsi utrumque o sit, ex abs. aequalibus demta, abs. aequalia relinquent. In fig. allata patet.

Si vero supponatur; quotvis operationibus haud unquam evenire, ut nullum u extra b cadat: tum quodvis u sub K'' cadet, adeoque nisi u (residuum ex k') $\sim o$, fieret $K' \sim \infty$: atque tum etiam residuum v ex ($b=k'$) $\sim o$; nempe si u dicatur, quod sub $\mathfrak{K}$ cadit, k' demto u sub b cadit, atque ex b dabili quovis minus supererit. Dari igitur oportet, in concreto partem certam ipsius k' , adeoque ipsius a , item ei ex k respondentem partem ipsius b , quae semper minuerentur; sed hae partes (per I) demi possunt; et tum necessario majus demitur, quam per operationes numero aliquo factas relinquitur. Unde quivis casus ad operationum numerum finitum reduci potest.

XX. *Ut resultatum multiplicationis divisionisque unicum esse probetur, de proportionem quaedam, et prius fractionum commensurabilium primaria referenda sunt.*

Imo. In (§ 22) 2(3) tum ipsius C , solet per $\frac{2C}{3}$, et si $C=1$ sit, per $\frac{2}{3}$ exprimi, quod signum quoti erat. Est nempe valor uterque aequalis. Sit enim $C=* * *$; ponetur $*$, (nempe tot $*$ quot C), in illis C toties, in quot partes C partitum est; itaque $* = \frac{2C}{3}$; et idem prodit, C per 3 partiendo, et 2 partes ejusmodi sumendo.

Patet etiam (p. 36) idem prodire, si C per $\frac{2}{3}$ multiplicetur. Est igitur $2(3)$ tum ipsius $C = \frac{2C}{3} = \frac{2}{3} \cdot C$ Vocantur (§ 22) $\frac{n}{m}$ et $\frac{p}{q}$ termini fractionis; prior numerator, posterior denominator audit. Sint prius termini integri.

2do. Si numerator per integrum multiplicetur, valor novus priore toties evadet major; si dividatur, toties minor fiet; si denominator multiplicetur, toties minor, si dividatur toties major fiet: si vero terminus uterque per eundem integrum multiplicetur, aut uterque per eundem dividatur, valor non mutatur.

Nam valor prior ipsius $\frac{2}{3} \cdot c$ erat $= * *$, quia si $\frac{C}{3} = *$, hoc 2ies accipitur; si vero pro 2 ponatur 5.2, tum 5.2ies $*$, idest 5ies $* *$ accipietur. Hinc vicissim patet, si ipsius $\frac{5.2}{3}$ numerator per 5 dividatur, valorem fieri 5ies minorem; (de casu, ubi quotus haud integer est, inferius).

Sit item $C = \begin{cases} * = * * * * * \\ * = * * * * * \\ * = * * * * * \end{cases}$; et sit $\frac{2C}{3.5}$; patet

$\frac{C}{3.5} = *$ esse, quum $*$ in quovis $*$ ponatur 5ies, adeoque in toto ($C = 3*$), ponatur 3.5ies; accipiuntur vero tales tot, quot prius; itaque valor novus erit $*$, qui in priore $* = * * * * *$ ponitur 5ies. Unde etiam evidens est, quod si et numerator per 5 multiplicetur, adeoque 5.2 tales partes accipiantur, valor $*$, 5ies positus, valorem primum restituat; adeoque $\frac{5.2}{5.3} = \frac{2}{3}$; itemque aequale prodeat, tam 5.2 quam 5.3 per 5 divisis; solo denominatore 3.5 per 5 diviso autem fiat $\frac{2}{3}$ majus 5ies ipso $\frac{2}{3.5}$.

3tio. Regula hinc etiam fractiones ad denominatorem eundem reducendi sequens fluit. Cujusvis fractionis terminus uterque per factum e reliqua-

rum denominatoribus omnium multiplicetur: prodibit enim ita (per praec.) cuivis aequalis; nam factum ex integris manifesto integer est; denominator quoque idem erit, nam eosdem factores quotvis quocunque ordine factum idem dare mox demonstrabitur.

Patet etiam *fractionum ad denominatorem eundem reductorum, illam esse maiorem, cuius numerator maior est.*

4^o Si $\frac{2}{3} \cdot C$ per $\frac{4}{5}$ multiplicandum sit; erit (facto x dicto) $1=5u, \frac{4}{5}=4u; \frac{2}{3} \cdot C=5v, x=4v;$

itaque v prius reperiendum et factum est $4v$. Ex 2^o est $\frac{2}{5 \cdot 3} \cdot C=v$, quia $\frac{2}{3} \cdot C=5 \cdot \frac{2C}{5 \cdot 3}=5v$, et $\frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} \cdot C=4v$. Unde factum numeratorum per factum denominatorum divisum, factum est; quod item 4(5)ti 2(3)ti ipsius C , adeoque fractionem fractionis esse manifestum est.

Unde si $\frac{2}{3} \cdot C$ in fractionem ipsius b mutari debeat, et C sit $=\frac{4}{5} \cdot b$; erit 2(3)ti ipsius C ; (seu 4(5)ti ipsius b , multiplicando $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$) $=\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot b$.

5^o Hinc etiam si $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$ dividi debeat; erit $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4}$. Nam $\frac{4}{5} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 5}{5 \cdot 3 \cdot 4}$ (per praec), quod dividendo per 5 et 4 terminum utrumque (per 2^o) $=\frac{2}{3}$.

6^o Unde etiam in casu terminorum non integrorum, fractionem quotum esse sequitur. Sit enim $B=**$, $A=***=$ etiam $5v$, et $C=4v$, adeoque B ipsius C dicatur 2(3) 4(5)ti (§ 22); sit $*=$

$***$, adeoque $A=\begin{pmatrix} * = * * * * * \\ * = * * * * * \\ * = * * * * * \end{pmatrix}$ et $v = *$,

quia ponitur 5ies in A; itaque illud • , quod in $4v = C$ continetur 4.3ies, in $B = \frac{2}{3}$ continetur 2.5ies (uti 2 superiores lineae ostendunt). *Reducetur itaque fractio huiusmodi quoque ad formam priorem, si numerorum extremorum factum per factum me-*

diorum dividatur; quod $= \frac{\frac{2C}{3}}{\frac{4}{5}}$ est.

7^o Hinc etiam ad qualemvis denominatorem aut numeratorem datum reduci fractio potest; valore immutato. Sit datus denominator $\frac{n}{m}$; est

$$\frac{\frac{2n}{3m}}{\frac{n}{m}} = \frac{2nm}{3mn} = \frac{2}{3}. \text{ Sit } \frac{n}{m} \text{ numerator datus; est } \frac{\frac{2n}{3m}}{\frac{n}{m}} = \frac{2n}{3m} = \frac{2}{3}.$$

Itaque $\frac{n}{m}$, per datam fractionem, si numerator quaeratur, multiplicari, si denominator, dividi debet.

8^o Patet etiam, quod si numerator sit $\frac{n}{m}$, denominator $\frac{p}{q}$, et uterque per $\frac{r}{s}$ multiplicetur, vel uterque per $\frac{r}{s}$ dividatur (literis nunc integros denotantibus); prodire in casu priore $\frac{nr}{ms} : \frac{pr}{qs} = \frac{nrqs}{mspr}$,

in posteriore $\frac{ns}{mr} : \frac{ps}{qr} = \frac{nsqr}{mrps}$, utrumque (terminis per rs divisus) $= \frac{nq}{mp}$ nempe fractioni priori). Reliqua de fractionibus in Arithmetica specialiori dicentur.

XXI. De *resultato multiplicationis unico* iam disquirendum, at prius de *possibilitate mensurationis et proportionalis* 4^{tae} agendum est.

Sint A, B rectae (aut tempora), et n sit integer, atque $\frac{A}{n}$ sit $= u$; erit $A = nu$, B vero aut $=$ aut

$\leq \text{aut} > u$; in primo casu est $B = 1u$, in 2do est $B = 0u + (\omega < u)$, in 3tio datur talis integer $M, (X)$ ut $Mu > B$ sit; itaque cum $1u$ non sit $> B$, datur primus integer ab M incipiendo versus 1 talis m , ut mu non $> B$; itaque mu aut $= B$, aut $B = mu + (\omega < u)$. Datur porro (per VIII) talis $2.2 \dots 2 = n'$, ut sit $\frac{u}{n'} < \frac{\omega}{2}$; sit $u' = \frac{u}{n'}$; erit tum $A =$

$\frac{n n' u}{n'} = n n' u'$; sit $B = m' u' + \omega'$; erit nempe

$mu = mn' \frac{u}{n'} = mn' u'$, et quia $u' < \frac{\omega}{2}$, ipsi mn' ad minimum 2 accedunt; estque ω' aut 0, aut non; si non, repetatur eadem operatio, ut prodeat $u'' < \frac{\omega'}{2}$, et fiat $B = m'' u'' + (\omega'' < u'')$; continuando idem

semper porro, si semper superfuerit aliquid; manifesto $\omega \sim 0$; nam ω' quod primo superest, est $< u' < \frac{\omega}{2}$, ita $\omega'' < \frac{\omega'}{2}$, adeoque $< \frac{\omega}{2.2}$, et ita

porro, ut $< \frac{\omega}{2.2 \dots 2}$ supersit. Hinc cum hoc dato quovis $< \text{esse possit}$, $mu \sim B$; nempe $mu - B \sim 0$. Patet etiam $B = (m' u' + \omega' = m'' u'' + \omega'' \dots)$ esse $< (m+1)u$, adeoque $m' u'$, $m'' u'' < (m+1)u$; sed $m' u' > mu$, $m'' u'' > m' u'$ & ; unde $m' \frac{u}{n'} < (m+1)u$,

ita $m'' \frac{u}{n''} < (m+1)u$, et ita porro; adeoque $\frac{m'}{n'}$,

$\frac{m''}{n''} \dots < m+1$, sed $m' \frac{u}{n'} > mu$, $m'' \frac{u}{n''} > m' \frac{u}{n'}$

$\dots$, adeoque $\frac{m'}{n'} > m$, $\frac{m''}{n''} > \frac{m'}{n'}$ et ita porro; sunt

autem $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''} \dots$ fractiones, per quas semper

idem u multiplicatur, ut $m' u'$, $m'' u'' \dots$ prodeant, quod statim applicabitur.

XXII. 1^o. *Dari hinc 4^{ta} proportionalem patet* sic: si B cum A commensurabilis sit; tum $A = nu$, $B = mu$; adeoque (pro $\frac{C}{n} = v$) erit 4^{ta} proportionalis $D = mv$. Si vero B cum A incommensurabilis sit; erit $A = nu$, $B = mu + (\omega < u)$, et pro $C = nv$, quaeritur tale $D = mv + (\lambda < v)$; ut $\omega, \lambda \sim 0$, adeoque $mu \sim B$, et $mv \sim D$. Accipiat (e praec.) $m'v'$, tum $m''v'' \dots$; erit (inde) $m'v' = \frac{m'}{n'} v$,

atque $\frac{m'}{n'} > m$, et idem $\frac{m'}{n'} < m+1$; itaque crevit

prius mv manendo $< (m+1)v$: quo continuato patet (VI) limitem dari; cum mv semper crescat (per praec.), maneatque primo $(m+1)v$ minus

2^o Verum *etsi non constaret in imagine sequi*. $A = nu$, $B = mu + \omega$, $C = nv$, $D = mv + \lambda$, esse $\omega < u$, et $\lambda < v$; dummodo $\omega, \lambda \sim 0$, nunquam e B plura u quam v ex D accipi possunt.

Nam sit $B = (m+1)u + (\omega' < u)$, et $D = (m+1)v - \alpha$, (ubi $\alpha \mp$ sit, si $v \mp$, et $-$ si $v -$ est), tunc $(m+1)u$ ex ω est (adeoque et $\omega' \mp$ est si $u \mp$, $-$ si $-$); cum $\omega, \lambda \sim 0$, decrescat utrumque, et fiat $\omega'' < \omega'$, et $\lambda' < \alpha$; erit tunc $A = Nu$, $B = Mu' + (\omega'' < \omega')$; $C = Nv'$, $D = Mv' + (\lambda' < \alpha)$; quod si B ipsum u pluries contineat, quam D ipsum v, fieri nequit; nam $nu = Nu'$, adeoque $u' = \frac{nu}{N}$, ita $v' = \frac{nv}{N}$; erit-

que $A = \frac{Nnu}{N}$, $B = N \frac{(m+1)u}{N} + (\omega' < u) = \frac{M}{N} \frac{nu}{N} + (\omega'' < \omega')$; et hinc manifesto $\frac{u}{N}$ continetur in B ad

minimum $N(m+1)$ ies, et plane Mn ies praeter $\omega'' < \omega'$; quapropter Mn necessario $> N(m+1)$. Itaque

tum $D = Mv' + \lambda' = \frac{Mnv}{N} + \lambda' > \frac{N(m+1)v}{N} + \lambda' > (m+1)v + (\lambda' < \alpha)$ esse deberet, contra hypothesin; erat

enim $D = (m+1)v - \alpha$. Nimirum cum $\omega'' < \omega'$ sit, si ex gr. (pro $u, \omega', \mp$ vis), et $\omega'' \mp$ sit; tum ex B praeter ω'' maius quam praeter ω' superest; si vero $\omega'' =$ sit, tum $\frac{Mnu}{N}$ adhuc $>$ esse debet, ut immi-

nutum $= (m+1)u + \omega'$ prodeat. Neque vero $(m+1)v - \alpha > (m+1)v + (\lambda' < \alpha)$ esse potest; nam si α simul cum $v \mp$ est, erit λ' aut $\mp$ aut $=$; si $\mp$, tum si ex $(m+1)v$ dematur α , manebit minus quam si idem augeatur; si vero $\lambda' =$ sit, tum si ex $(m+1)v$ dematur $< \alpha$, maius manebit, quam si totum α dematur. Si vero v cum $\alpha =$ sit, erit $-(m+1)v \mp \alpha < -(m+1)v \mp \lambda'$, et etiam $< -(m+1)v - \lambda'$,

Nec si ω, λ simul $= o$ sint, potest B pluries continere $u' = \frac{A}{N}$, quam D ipsum $v' = \frac{C}{N}$. Nam sit mu

$= Mu'$; erit $\frac{Mn}{N} = m$; sit $D = M'v' = \frac{M'nv}{N}$; erit $m = \frac{M'n}{N}$; itaque $\frac{M'n}{N} = \frac{Mn}{N}$; adeoque $M' = M$. $\frac{M'n}{N} = \frac{Mn}{N}$

Hinc etiam patet; quod si $nu = A, \pm mu = \text{vel } \sim B, nv = C, \pm mv = \text{vel } \sim D$ (signorum $=$ vel $\sim$) item $+ \text{vel } -$ eodem pro B et D accepto); tum $A = nu, B = \pm mu + (\omega = o \text{ vel } < u), C = nv, D = \pm mv + (\lambda = o \text{ vel } < v)$ (in expressione ipsorum B, D post ω, λ , signorum $=, <$ idem in utroque accipiendo); itaque A, B, C, D, si ita sit, in proportionem sunt. Nam tum casus praecedens locum habet; atque inde sequitur pro quovis n , si A, C in n partes aequales u, v partita sint, neutrum ipsorum B, D pluries suam quam alterum continere, uti ex hoc sequitur imago superior; adeo ut et harum quaevis, definitio proportionis esse possit, (affectionibus $\mp$ et $=$ posteriori quoque adnexis). Neque autem posterius locum habere potest, si aliquod ipsorum ω, λ sit $= o$, alterum non; quia tum posset, si ω non o , et $\lambda = o$ sit, u' per partitionem ipsius u accipi $< \omega$, et tum plura u' acciperentur ex B quam v' ex D.

Itaque in proportione 2 priora et 2 posteriora sunt simul commensurabilia vel simul incommensurabilia.

XXIII; *Est etiam proportionalis 4ta unica; (excepto si 1ma et aliqua reliquarum sit 0). Nam sint duae imagines; (in quibus $\omega, \lambda, \omega', \lambda' \sim 0$, pro A cum B incommensurabili); $A = nu$, $B = mu + \omega$, $C = nv$, $D = mv + \lambda$; et $A = Nu'$, $B = Mu' + \omega'$, $C = Nv'$, $D' = Mv' + \lambda'$; est tunc $mu + \omega - Mu' - \omega'$ (nempe $B - B') = 0$; sed $\omega - \omega'$ (si non $= 0$), dato quovis minus fieri posse manifestum est, sive destruat ω' ex ω , sive augeat; itaque est aut $= 0$, aut omni dabili minus adeoque (pro quovis integro k) $< \frac{u}{k}$ fieri po-*

test; itaque $mu - \frac{Mnu}{N}$ id est $\frac{Nmu - Mnu}{N}$, seu $\frac{(Nm - Mn)}{N} \cdot u$ (si non sit 0) $< \frac{u}{k}$, adeoque $\frac{Nm - Mn}{N}$

$< \frac{1}{k}$ fieri potest; nam si $=$ vel $>$ esset, tunc etiam $\frac{(Nm - Mn)}{N} \cdot u =$ vel $> \frac{u}{k}$ esset. Est igitur etiam

iam $\frac{(Nm - Mn)}{N} \cdot v$ (seu $mv - Mv'$) $< (\frac{1}{k} \cdot v = \frac{v}{k})$;

adeoque $mv + \lambda - Mv' - \lambda' < \frac{1}{k} + \lambda - \lambda'$; seu $D - D'$

$< \frac{1}{k} + \lambda - \lambda'$, quod item ad limitem 0 tendere statim

ostendetur. Conseq. D nec $>$ nec $<$ D'; adeoque $D = D'$. Si vero A cum B commensurabile sit, tunc etiam D cum C commensurabile est; (per praec); adeoque etsi prodeat $D = mv$, et $D' = Mv'$; erit $B = mu = Mu' = \frac{Mnu}{N}$, adeoque $\frac{Mn}{N} = m$, consequ $\frac{Mnv}{N}$

$= Mv' = mv$. Patet hinc etiam, multiplicationis pro certo multiplicando et certo multiplicatore,

resultatum unicum esse (§. 28.) cum loco Imo non o sed 1 sit.

XXIV. Unum adhuc de proportionem (infra specialius tractanda) addere libet, ne elegans *definitio Euclidea* (unum plurimorum, quae Horatii verba *Grajis ingenium dedit* - probant) silentio praetereatur. Etsi aliis verbis referat, A, B, C, D in *proportionem esse dicit Euclides*, si pro quibusvis integris N, M, sit $NA = MB$, si $NC = MD$, $NA > MB$, si $NC > MD$, $NA < MB$, si $NC < MD$.

Conceptum hunc (exclusis oppositis et o), cum (§. 29.) dato, aequivalentem esse (pag. 11. 2o) probatur sic. Sit imago Euclidea I, et (§. 29.) data sit i. Demonstratur *per i poni I*, et *per non i poni non I*; unde (pag. 11. 2o) patebit, per quodvis poni alterum.

1o *I ponitur per i*. Est i sequens; (XXII) aut $A = nu$, $B = mu$, $C = nv$, $D = mv$; aut $A = nu$, $B = mu + (\omega < u)$, $C = nv$, $D = mv + (\lambda < v)$. Quoad prius, si $Nnu = Mmu$, tum $Nn = Mm$, adeoque $Nnv = Mmv$, si $>$ vel $<$ sit pro $=$, manifesto idem utrinque erit.

In imagine posteriori, erit NA vel $>$ vel $<$ vel $= MB$; quaeritur, num inter NC et MD quoque idem signum erit?

Si $NA < MB$; sit d excessus ipsius MB super NA ; erit $Nnu + d = Mmu + M\omega$; sunt heic d M, N constantes, u vero ita accipi posse facile patet, (et demonstrabitur statim) ut $M\omega < d$ sit; tum vero demto d ab una parte, et $M\omega$ ab altera; manebit $Nnu < Mmu$; nempe ex aequalibus demendo aequalia, manent aequalia, sed si ex aliquo residuo adhuc dematur, inde minus remanebit. Si vero tunc $Nnu < Mmu$ sit, erit $Nn < Mm$, adeoque $Nnv < Mmv$ (pro illis n, m, u, v , pro quibus $M\omega < d$ factum est). Est itaque etiam $Nnv < Mmv$, adeoque etiam $Nnv + M\lambda < Mmv + M\lambda$; id est $NC < MD$.

Si $NA > MB$, sit $NA = MB + d$; erit $Nnu = Mmu + M\omega + d$; itaque $Nnu > Mmu + d$, adeoque cum

$Mu < d$ fieri queat, erit tunc $Nnu > Mmu + Mu$; et hinc $Nn > M(m+1)$; adeoque $Nnv > M(m+1)v$, conseq. $NC > MD$, quia $D < (m+1)v$.

Si vero $NA = MB$, tum NC non est $>$ nec $< MD$. Nam si $>$ aut $<$, tum et $NA >$ vel $< MB$ esset.

2^o. Per non i poni non I , patet sic: casus ipsius non i sunt sequ. $nu, mu, nv, mv \pm h$; vel $nu, mu + (\omega < u)$; $nv, mv \pm h$ (ita ut h constans maneat, ω vero ~ 0). Quoad casum primum dantur talia N, M (nempe m, n), ut $mnu = nmu$, sed mnv non $= nmv \pm nh$.

In casu posteriori; si $-h$ sit, est $mnu < nmu + n\omega$; sed $mnv > nmv - nh$. Si vero $+h$ sit, accipiat $m+1$ pro N , et n pro M ; erit $(m+1)nu$ id est $mnu + nu > nmu + n\omega$; sed $mnv + nv < nmv + nh$, nam $\omega < u$ est, et $v < h$ fieri potest.

XXV. 1^o. Si $\omega \sim 0$; pro quovis integro k , etiam $k\omega \sim 0$. Nam tum pro quovis integro N , fit $\omega < \frac{1}{N}$; idem de singulis ω usque ad k tum va-

let; adeoque etiam summa omnium ω est $<$ summa omnium respondentium $\frac{1}{N}$, nempe $k\omega < \frac{k}{N}$;

et cum N utvis augere liceat, si in locum eius ponatur kN , fiet $\omega < \frac{1}{kN}$. et $k\omega < (\frac{k}{kN} = \frac{1}{N})$. Hinc

etiam si a', n integri fuerint, et $\frac{a'}{n} < k$ maneat;

tum quoque $\frac{a'}{n}\omega \sim 0$. Nam sit $\frac{a'}{n} = i + f$ (pro

i integro et f fractione vera); est $i + f < k$; itaque

$(i + f)\omega < k\omega$. Ita si $\frac{a'}{n} = f$ sit, aut etiam si $\frac{a'}{n} \sim 0$

etiam $\frac{a'}{n}\omega \sim 0$. Unde si novus factor $\frac{b'}{n}$ eius-

modi (uti $\frac{a'}{n}$) accedat, et $(\frac{a'}{n}\omega \sim 0)$ nomenetur λ ;

et item de quotvis ad uno plures progrediendo, manifesto, e quotvis eiusmodi factoribus factum ~ 0 , si aliquis ~ 0 .

2o. Si tam ω quam $\lambda \sim 0$; etiam $\omega \pm \lambda \sim 0$ (nisi $\omega \pm \lambda = 0$ sit). Nam tum $\omega < \frac{1}{N}$ et $\lambda < \frac{1}{N}$ fieri potest: itaque aut destruet alterutrum ex altero, et evadet minus, aut summa manebit $< \frac{2}{N}$; et si ipsi N (ut antea) substituatur $2N$; fiet eadem $< (\frac{2}{2N} = \frac{1}{N})$.

Notandum vero per quantitatem, quae ~ 0 , et saepius omni dabili minor fieri dicitur, minime omni dabili minorem intelligi, sed talem quae si detur quaevis α , hac minor fieri potest. Omni dabili minor quantitas non existit; cum si expers esset, continuo minus non esset: si continuum, portio eius adhuc minor esset. Aliud est ∞ (§. 21).

Si $\omega \pm \lambda$ dicatur x , et $x \sim 0$; eodem modo patet, quod $x \pm x \sim 0$; unde ulterius (modo de n ad $n+1$ progrediendo) quotvis numero certo fuerint ad limitem 0 tendentes, eorum summa quoque ~ 0 .

3o. Si $x \sim a$, et $y \sim b$; tum $x \pm y \sim a \pm b$. Nam sit $x + \omega = a$, et $y + \lambda = b$; tum $\omega, \lambda \sim 0$, atque $a + b = x + \omega + y + \lambda$; ubi (per praec.) $\omega + \lambda \sim 0$; itaque differentia ipsius $x + y$ ab $a + b$ fieri omni dabili minor potest. Pariter (ut in praec.) progrediendo, patet quotvis quantitatum (certo numero) ad limitem tendentium summam, ad summam limitum tendere.

4o. Si $x - y = (\omega = \text{vel } \sim 0)$, et $x \sim a$, atque $y \sim b$, tum $a = b$. Nam sit $a = b + \alpha$; est $a - x \sim 0$, adeoque $b + \alpha - x \sim 0$; et (quia $x = y + \omega$), $b + \alpha - y - \omega \sim 0$; quod fieri nequit, nisi $\alpha = \text{vel } \sim 0$; nam $b - y \sim 0$, adeoque etiam $b - y - \omega \sim 0$, quia et $\omega \sim 0$, et si $b - y$ di-

catur λ , etiam $\lambda - \omega \sim 0$ (per 2do). Idem patet, si $\omega = 0$, et idem, si $x = a$.

5o. Si $p > x > q$, et $p - q \sim 0$; etiam $p - x \sim 0$, (et $x - q \sim 0$). Nam $p - x < p - q$.

6o: Si n integer sit, et $n \sim \infty$: tum $\frac{n \pm 1}{n} \sim 1$. Nam differentia ipsius 1 ab $\frac{n \pm 1}{n}$ est $\frac{\pm 1}{n}$, quod ~ 0 . Patet loco 1 quodvis finitum a poni posse: nam accipiat integer $k > a$, et ponatur kn pro n ; erit $1 - \frac{kn + k}{kn} = \frac{kn}{kn} - \frac{kn + k}{kn} = \frac{1}{n}$.

7o. Ita $\frac{n}{n \pm 1} \sim 1$. Nam differentia ipsius 1 ab $\frac{n}{n \pm 1}$ est $\frac{n \pm 1 - n}{n \pm 1} = \frac{1}{n \pm 1}$ quod ~ 0 . Patet etiam (ut in praec.) quod $\frac{n}{n \pm k} \sim 1$.

8o. Si a constans sit, et integer $s \sim \infty$, atque $\frac{r+1}{s} \cdot a > x > \frac{ra}{s}$; tum $x - \frac{ra}{s} \sim 0$ (per 5).

Nam $\frac{r+1}{s} \cdot a - \frac{ra}{s} = \left(\frac{a}{s} \right) \sim 0$. Hinc etiam (per

4) si $x \sim a$, $\frac{ra}{s} \sim \beta$, est $a = \beta$.

9o. *Ordo factorum non mutat factum. Sint prius factores integri.* De duobus demonstratum est; unde via de n ad $n+1$ ad quotvis assurgere licet modo sequi. Si constet de numero n integrorum a, b, c, d , et accedat novus e , qui sit claritatis gratia $= 3$; erit loco 1o aut e aut alia litera; sit prius e loco 1o. Erit $abcde = eabcd$ (multiplicationem a dextra sinistrorsum peragendo); sit enim $abcd = P$; erit $eabcd = 3P$, de vero $= ed = 3d = d + d + d$; et multiplicando per sequens c , prodibant 3 eiusmodi imagines, quarum una solum fuisset, si e non adfuisset; et idem continuando usque ad a ,

prodibunt $abcd + abcd + abcd = 3P$; prodit autem (per hyp) P ex $abcd$ quocunque ordine; itaque si factor $(n+1)$ us primum vel ultimum locum teneat, utcunque permutentur ceteri, factum idem est. Sit iam quaevis alia ex gr. c loco primo; reliquae numero n , utvis dispositae, idem factum dant, ac si e loco ultimo esset; erit igitur factum et tum $3P$.

Imo utcunque discerpta factorum imagine, factum idem est. Sit ex gr. $ab = \alpha$, $cde = \beta$; est $\alpha \beta f = abcdef$. Ponatur enim α ad finem; erit $cdef\alpha = bd.efab$ (multiplicationem item a dextra incipiendo); est vero $cdef\alpha = \alpha cdef$; ita $\alpha fcde = \alpha f\beta = \alpha \beta f$; inde semper ad uno plura concludendo patet, quicunque e factoribus post se invicem ponantur, ut hoc pacto novi factores $\alpha, \beta \dots$ exoriantur, vel omnes vel aliqui, et hos utvis dispositos factum idem dare.

Verum *etiamsi non fuerint integri, factum idem erit*. Sint prius 2 factores a, b . Aut est uterque cum unitate commensurabilis, aut non; si non, aut unus tantum, aut neuter est. Mensuratis quoad 1,

sit in casu 1mo, (pro a', b', n integris) $a = \frac{a'}{n}$, $b =$

$\frac{b'}{n}$, in 2do $a = \frac{a'}{n}$, $b = \frac{b'}{n} + (t < \frac{1}{n})$, in 3tio $a =$

$\frac{a'}{n} + (x < \frac{1}{n})$, $b = \frac{b'}{n} + (t < \frac{1}{n})$; et constru-

antur schemata (§ 28.) pro 2 posterioribus; (prius enim ex (XX. 3o 4o) etiam liquet). Sit prius b multiplicator, dein multiplicandus, et n, u

sint in singulis 4 casibus $n, \frac{1}{n}$, m vero sit b' ubi

b (et a' ubi a) multiplicator est, v autem sit $\frac{a}{n}$

ubi a , ($\frac{b}{n}$ ubi b) multiplicandus est. Erit (per § 28.)

$$n \cdot \frac{1}{n} = 1, \quad b' \cdot \frac{1}{n} \sim b; \quad n \cdot \frac{a}{n} = a, \quad b' \cdot \frac{a}{n} \sim b \cdot a$$

$$n \cdot \frac{1}{n} = 1, \quad a' \cdot \frac{1}{n} = a; \quad n \cdot \frac{b}{n} = b, \quad a' \cdot \frac{b}{n} = a \cdot b$$

$$n \cdot \frac{1}{n} = 1, \quad b' \cdot \frac{1}{n} \sim b; \quad n \cdot \frac{a}{n} = a; \quad b' \cdot \frac{a}{n} \sim b \cdot a$$

$$n \cdot \frac{1}{n} = 1, \quad a' \cdot \frac{1}{n} \sim a; \quad n \cdot \frac{b}{n} = b, \quad a' \cdot \frac{b}{n} \sim a \cdot b$$

Est vero (substitutis valoribus) $b' \cdot \frac{a}{n} - a' \cdot \frac{b}{n}$ in

2 prioribus $= \frac{b'}{nn} \frac{a'}{n} - a' \left(\frac{b'}{nn} + \frac{t}{n} \right) = -\frac{a't}{n}$, in 2 po-

sterioribus autem est $= b' \cdot \left(\frac{a'}{nn} + \frac{z}{n} \right) - a' \cdot \left(\frac{b'}{nn} + \frac{t}{n} \right)$

$= \frac{b'z}{n} - \frac{a't}{n}$; ubi $\frac{a'}{n}, \frac{b'}{n}$ manent integro quodam

minora; secus enim a, b continerent unitatem omnidabili pluries; (est nempe $a = \frac{a'}{n} + (z = \text{vel} \sim o)$); itaque differentia utraque $\sim o$ (1mo. 2do), conseq. (4to.) 2 priora facta sunt aequalia, et pariter 2 posteriora.

Est etiam $b' \cdot \frac{a}{n} - \frac{b'a'}{nn} \sim o$; quia $\frac{b'a}{n} =$

$b' \left(\frac{a'}{nn} + \frac{z}{n} \right)$, adeoque pro a incommensurabili

differentia $\frac{b'z}{n} \sim o$, quia (ut antea) $\frac{b'}{n} < \text{inte-}$

gro certo manet, z vero $\sim o$; itaque differentia $\sim o$ (1mo.), aut $= o$ pro $z = o$; conseq. (per

4to.) $\frac{a'b'}{nn} = \text{vel} \sim ab$; atque factum aut $\frac{a'b'}{nn}$

aut huius limes unicus (XXIII.) est.

Ita de 2 ad 3, et de quotvis ad uno plura progredi-
endo; si $\frac{a' b' \dots g'}{n n \dots n} = \text{vel} \sim ab \dots g$; etiamsi no-

vus h accedat, (retinendo modum demonstrationis) erit $\frac{a'b' \dots g'h'}{nn \dots nn} = \text{vel } \sim ab \dots gh$. Nam $a'b' \dots g'$ dicatur α , et $nn \dots n$ sit β , et $ab \dots g$ sit γ ; erit $\frac{\alpha}{\beta} = \text{vel } \sim \gamma$, et $\frac{\alpha}{\beta} \frac{h'}{n} = \text{vel } \sim \gamma h$.

Si $a'b' \dots g'$ aliter ordinentur, manifesto etiam a dextra literae eiusdem nominis eodem ordine valebunt; et cum factores integri utvis permutati factum idem dent; patet factores quotvis (*etsi omnes incommensurabiles sint*) quocunque ordine factum idem dare. Interim factum e commensurabili et incommensurabili incommensurabile, ex incommensurabilibus vero et commensurabile et incommensurabile esse posse facile patet; ex gr. inferius $\sqrt{2}$. $\sqrt{2} = 2$, et $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$, et $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ incommensurabilia esse mox dicetur.

10^{mo} Sed a (*excepto si o sit*) cum nullo factore $b+c$ (pro c non o) factum illi, quod cum b producit, = le efficit. Nam in schemate 1^{mo} pro $\frac{b'a}{n} = \text{vel}$

$\sim ab$, prodiret $b' \cdot \frac{a}{n} + b' \cdot \frac{c}{n} = \text{vel } \sim ab$.

Crescit vero $\frac{b'}{n}$ sine fine, manens tamen certo in-

tegro minus (ut in 9), adeoque $\frac{b'c}{n}$ gaudet limite

(VI.); sit is l ; erit (per XXV.2.) $b' \cdot \frac{a}{n} + b' \cdot \frac{c}{n} =$

$\text{vel } \sim ab + l$, l vero non est o ; nam $\frac{b'c}{n}$ crescit, non fit quovis dabili minus.

11^{mo}. Si $x = \text{vel } \sim a$, et $y \sim b$; tum $xy \sim ab$. Nam sit $x = a + \omega$, $y = b + \lambda$, atque (ut in 9^{no}) $\omega = \frac{\omega'}{n} + r$, $\lambda = \frac{\lambda'}{n} + s$, adeoque $x = \left(\frac{\omega' + \omega}{n}\right)$

$+ r$, $y = \left(\frac{b' + \lambda'}{n}\right) + t + s$; ubi cum $x, r, t, s \sim o$,

ponatur $p \sim 0$ pro $x+r$, et $q \sim 0$ pro $t+s$; et construantur schemata (ut in praec); a'' pro $a'+\omega'$ et b'' pro $b'+\lambda'$ ponendo; erit pro quibusvis certis valoribus ipsorum x, y , et ipsorum n, m, u, v vices $n, a'', \frac{1}{n}, \frac{y}{n}$ subeuntibus.

$$n \cdot \frac{1}{n} = 1, \quad a'' \cdot \frac{1}{n} \sim x; \quad \frac{n \cdot y}{n} = y, \quad \frac{a'' \cdot y}{n} \sim xy.$$

Ubi item $\frac{a'' \cdot y}{n} - (\frac{a' b'}{n n} \text{ e praec}) \sim 0$; nam substi-

tutis valoribus, erit hoc $= (a' + \omega') \left(\frac{b' + \lambda'}{n n} + \frac{q}{n} \right)$

$$- \frac{a' b'}{n n} = \frac{a' \lambda'}{n n} + \omega' \left(\frac{b' + \lambda'}{n n} \right) + (a' + \omega') \cdot \frac{q}{n} \text{ ubi manifesto}$$

$\frac{a'}{n}$, ita $\frac{a' + \omega'}{n}$, atque $\frac{b' + \lambda'}{n}$ manet (ut in praec.)

$\prec$ certo integro, q vero ~ 0 ita etiam $\frac{\omega'}{n} \sim 0$

dum $x \sim a$, nam tum $\omega \sim 0$; ita $\frac{\lambda'}{n} \sim 0$,

dum $y \sim b$; eritque differentia (XXV, 1, 2,) ~ 0 ; conseq etiam xy (seu per praec yx) $\sim ab$; nempe pro dato quovis integro N , potest tale x, y, n accipi, ut $ab - xy \prec \frac{1}{N}$ sit.

Si $x = a$, tum $\omega = 0$, et idem patet. Unde etiam de quotvis ad uno plura (ut supra) progrediendo; evidens fit, quotvis factorum ad limites tendentium, facti limitem esse factum limitum.

12mo. Si A per B dividendum sit, erit quotus q unicus (excepto si divisor 0 sit); et $\frac{A}{q} = B$, at-

que $A = Bq$, et $\frac{A}{B} \cdot B = A$, item $\frac{A}{q} = A \cdot \frac{1}{q}$.

Mensuretur enim A per B, sitque $\frac{B}{m} = v$, et $nv =$ vel $\sim A$, ac construatur schema (§ 28.); erit (pro n, m integris, et $u = \frac{1}{m}$, $v = \frac{B}{m}$);

$$\frac{m \cdot 1}{m} = 1, \quad \frac{n \cdot 1}{m} = \text{vel } \sim q; \quad \frac{m \cdot B}{m} = B, \quad \frac{n \cdot B}{m} = \text{vel } \sim A;$$

ubi q dari constat ex (XXII.), et patet ex (§ 27.), esse $q = \frac{A}{B}$, et $Bq = A$, et $\frac{A}{q} = B$; neque B cum ullo factore alio factum A efficit, etsi loco 2do stet (10.); item cum idem q per B multiplicatum, sit $= A$, est (in casu incommensurabilitatis quoque) $\frac{A}{B} \cdot B = A$.

Quod vero $\frac{A}{q} = B$ sit $= \frac{A \cdot 1}{q}$, patet sic. Mensuretur 1 per q et sit $\frac{M \cdot q}{n} \sim 1$; erit schema seq.

$$\frac{n \cdot 1}{n} = 1, \quad \frac{M \cdot 1}{n} \sim \frac{1}{q}; \quad \frac{n \cdot q}{n} = q, \quad \frac{M \cdot q}{n} \sim 1,$$

nempe loco 2do quotus ex 1 per q diviso prodit; multiplicetur iam A per $\frac{1}{q}$; erit

$$\frac{n \cdot 1}{n} = 1, \quad \frac{M \cdot 1}{n} \sim \frac{1}{q}; \quad \frac{n \cdot A}{n} = A, \quad \frac{M \cdot A}{n} \sim \left(\frac{A}{q} \right)$$

$= B$); erat enim superius $A = Bq$, adeoque $\frac{MA}{n} = \frac{MBq}{n}$; sed $\frac{Mq}{n} \sim 1$; conseq. $\left(\frac{Mq}{n} \cdot B = \frac{MA}{n} \right) \sim B$ (11.). Patet etiam $B : A$ esse $= \frac{1}{q} = 1 : \frac{A}{B}$.

13mo. Si $mu =$ vel $\sim B$, et $nu = A$, atque $mv =$ vel $\sim D$, et $nv = C$; tum $A : B = C : D$ adeoque proportio ita designari, atque si $B : A = Q$ sit.

B per AQ, et D per CQ exprimi poterit. Conversim quoque si $A:B=C:D$, aut $B=AQ$ et $D=CQ$; proportio est.

Nam mensurato A per B, construat schema divisionis (pro $A:B=q$, et pro $B:A=Q=\frac{1}{q}$ in praec).

$$m \cdot \frac{1}{n} = 1, \quad n \cdot \frac{1}{m} \sim q; \quad m \cdot \frac{B}{m} = B, \quad n \cdot \frac{B}{m} \sim A;$$

$$n \cdot \frac{1}{m} = 1, \quad m \cdot \frac{1}{n} \sim Q; \quad n \cdot \frac{A}{n} = A, \quad m \cdot \frac{A}{n} \sim B;$$

$$\text{Nempe } \frac{nB}{m} = \left(\frac{nm\mu}{m} = n\mu \right) + \frac{n\omega}{m} \text{ (pro } B = m\mu + \omega),$$

ubi item $\frac{n}{m}$ manet $<$ certo integro (ut supra), ω

vero adeoque et $\frac{n\omega}{m} \sim o$ (XXV.1.). Est igitur in

hoc casu $q=A:B$, et idem q prodit pro $C:D$, cum (ut antea) q unicum sit. Si $\omega=o$ sit, tum pro $\sim$ erit $=$, et $q = \frac{n}{m} = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Conversim quoque, si $A:B=q=C:D$; proportio est. Nam si q loco 2^{do} stet, schema prius esse debet; ubi patet esse $m \cdot \frac{B}{m} = B, \quad n \cdot \frac{B}{m} = \text{vel } \sim A$;

adeoque $m\mu' = B, \quad n\mu' = \text{vel } \sim A$ (pro $u = \frac{B}{m}$);

ita pro C, D, prodit $mv' = D$, et $nv' = \text{vel } \sim C$ (pro $v' = \frac{D}{m}$).

Patet etiam e schemate 2^{do}; quod si proportio sit, Q sit quotus ex B per A, et pariter ex D per C divisus; atque $B=AQ, D=CQ$. Conversim si $B=AQ$ sit, schema posterius esse debet; pariter si $D=CQ$; adeoque cum sit $A = \frac{n \cdot A}{n}, \quad \frac{m \cdot A}{n} = \text{vel}$

$\sim B; \frac{n C}{n} = C$, et $\frac{m C}{n} = \text{vel } \sim D$; proportio est.

Si q loco 3^{to} stet; tum quoque factorem alterum eundem esse oportet. (10).

14o Si $x \sim a$, $y \sim b$, et nec y nec $b = 0$; tum $\frac{x}{y}, \frac{x}{b}, \frac{a}{y} \sim \frac{a}{b}$. Nam denotationibus (11.) retentis, construantur schemata divisionum, quotis A, B, C, D pro $\frac{a}{b}, \frac{x}{b}, \frac{a}{y}, \frac{x}{y}$ dictis. Erit

$$\frac{b' \cdot 1}{b'} = 1, \quad \frac{a' \cdot 1}{b'} \sim A, \quad \frac{b' \cdot b}{b'} = b, \quad \frac{a' \cdot b}{b'} \sim a$$

$$\frac{b' \cdot 1}{b'} = 1, \quad \frac{a'' \cdot 1}{b'} \sim B, \quad \frac{b' \cdot b}{b'} = b, \quad \frac{a'' \cdot b}{b'} \sim x$$

$$\frac{b'' \cdot 1}{b''} = 1, \quad \frac{a' \cdot 1}{b''} \sim C, \quad \frac{b'' \cdot y}{b''} = y, \quad \frac{a' \cdot y}{b''} \sim a$$

$$\frac{b'' \cdot 1}{b''} = 1, \quad \frac{a'' \cdot 1}{b''} \sim D, \quad \frac{b'' \cdot y}{b''} = y, \quad \frac{a'' \cdot y}{b''} \sim x$$

Nempe (in 11mo) erat $x = \frac{a'' \cdot 1}{n} + p = \frac{a' + \omega'}{n}$

$+p$, et $y = \frac{b'' \cdot 1}{n} + q = \frac{b' + \lambda'}{n} + q$; inde dum x

certum (omnino determinatum aliquod) cum ei respondente y dividitur, juxta integros b'' , a'' construi schema potest, pro n, m, u, v accipiendo b'' ,

a'' , $\frac{1}{b''}, \frac{y}{b''}$; quod vero semel prodit, ei inaequa-

le nullo alio modo prodire potest (10.). Si vero in aliqua linea alicubi = loco $\sim$ est, in tota linea = est (p. 65), et tum quoque facile patet. Considerentur singulorum ad limitem B, vel C vel D

tendentium, differentiae (ab $\frac{a'}{b'}$ quod $\sim A = \frac{a}{b}$);

necnon eorum quae ad a, x tendere dicuntur, dif-

ferentiae ab a, x . Est $\frac{a' b}{b'} = a' \left(\frac{b'}{n b'} + \frac{t}{b'} \right) = \frac{a'}{n}$

+ $\frac{a' t}{b'}$, cuius differentia ab $(a = \frac{a'}{n} + x)$ est $x - \frac{a' t}{b'}$

quod ~ 0 (ut supra). Ita est $\frac{a'' \cdot b}{b'} = (a' + \omega') \left(\frac{b'}{n b'} + \frac{t}{b'} \right)$

$= \left(\frac{a' + \omega'}{n} \right) + \left(\frac{a' + \omega'}{b'} \right) \cdot t$, cuius differentia ab $x \sim 0$,

quia $p, t \sim 0$, et $\frac{a' + \omega'}{b'}$ manet certo finito minus, (se-

cus enim $\left(\frac{a' + \omega'}{n} = x - p \right) : \left(\frac{b'}{n} = b - t \right)$ quovis integro

maius fieret, et hoc ab eo omni dabili pluries con-

tineretur). Ita $\frac{a' y}{b''} = \frac{a' (b' + \lambda')}{(b' + \lambda') n} + \frac{a' q}{b' + \lambda'}$, cuius dif-

ferentia ab $(a = \frac{a'}{n} + x)$ est $x - \frac{a' q}{b' + \lambda'}$, ubi item

$q, x \sim 0$, et (ut prius) $\frac{a'}{b' + \lambda'}$ manet integro quo-

dam minus, adeoque differentia (ut supra) ~ 0 .

Atque demum $\frac{a'' y}{b''} = \frac{(a' + \omega')}{b' + \lambda'} \left(\frac{b' + \lambda'}{n} + q \right)$, cuius dif-

ferentia ab $(x = \frac{a' + \omega'}{n} + p)$ est $p - \frac{a' + \omega'}{b' + \lambda'} \cdot q$, ubi

item $p, q \sim 0$, et $\frac{a' + \omega'}{b' + \lambda'}$ manet (ut prius) integro

quodam minus. Consequenter tendentiae 4torum ad
limitem rite positae, et A, B, C, D quoti et qui-
dem unici sunt (10.) exceptione ibidem facta.

Sunt autem A, B, C, D aequalia. Nam (pro $\alpha, \beta,$
 $h, k \sim 0$) est $A = \frac{a'}{b'} + \alpha$, $B = \frac{a''}{b'} + \beta$, $C =$

$\frac{a'}{b''} + h$, $D = \frac{a''}{b''} + k$; atque $D - A = \frac{a' + \omega'}{b' + \lambda'} + k$.

$\frac{a'}{b'} - \alpha = \frac{\omega' b' - a' \lambda'}{b'(b' + \lambda')}, + k - \alpha$; ubi $\frac{\omega'}{b'}, \frac{\lambda'}{b'} \sim 0$,
dum $x \sim a$, ac $y \sim b$; $\frac{b'}{b' + \lambda'}$ vero et $\frac{a'}{b' + \lambda'}$ ma-
net $<$ certo integro; itaque differentia ista ~ 0 ,
quia et $k, \alpha \sim 0$; pariter quotorum ceterorum li-
mitēs ipsi $\frac{a}{b}$ esse aequales patet.

*XXVI. In praec. schem. Imo, divisor b non erat
 0 ; si tamen y non sit quidem 0 sed ~ 0 ; mani-
festo quotus omni dabili maior fiet: ponatur nem-
pe in sch. 3tio ex y fieri $\frac{y}{n}$, fiet $\frac{a'y}{b''} = \frac{na'y}{nb''}$; ita-
que ex a' fiet na' , et ex $\frac{a'}{b'}$ fiet $\frac{na}{b'}$, quod si n
 $\sim \infty$, fiet omni dabili maius. Et hinc sensu
(p. 38) fit $\frac{1}{0} = \infty$.

Ita si y crescat, fiatque ny ex y ; fiet $\frac{b''ny}{nb''}$ ex
 $\frac{b''y}{b''}$, ac $\frac{a'ny}{nb''} \sim a$; et loco 2do fiet $\frac{a'}{nb''}$, quod ~ 0 ,
si $n \sim \infty$; et $nb'' \cdot \frac{1}{nb''} = 1$, atque $\frac{a}{\infty} = 0$, sensu
(p. 38).

Posset quidem definitio ita extendi, ut omnia
haec, aliaque comprehendantur; si quid elegantiae
simplici labem aliquam adferre deprecaret.

Quaestio alia est; si tam x quam $y \sim 0$; num
 $\frac{x}{y}$ limite et quonam gaudeat? Ex gr sit $x = \frac{1}{n}$ et
 $y = \frac{1}{n+1}$; est $\frac{x}{y} = \frac{n+1}{n}$, quod ~ 1 , si $n \sim$
 ∞ , quamvis tunc $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \sim 0$. Etiam tunc

quidem verum est, limitem ipsius $\frac{x}{y}$ esse quoto

limitum aequalem: in quantum $\frac{o}{o} = \text{cuilibet} (§ 32)$;

sed quisnam sit valorum innumerabilium quæsitus, infra dicetur. De casu tantum maximi momenti speciali, ubi $\frac{x \sim o}{y \sim o} \sim 1$, aliquid heic prævie addere libet.

* XXVII. Si lege certa simul variatorum u, u', v, v', t, t' plura occurrant, simultanea intelligantur, et maioritas sensu (§ 21.) accipiatur.

1mo Si $\frac{u}{u'} \sim 1$, id est pro quovis utvis magno N dentur talia u, u' , ut $\frac{u}{u'} - 1$ sit $< \frac{1}{N}$; tum $\frac{u - u'}{u'} < \frac{1}{N}$, et $u - u' < \frac{u'}{N}$. Hinc si $u - u'$ dicatur ω , datur $\omega < \frac{u'}{N}$, et tum $N\omega < u'$, atque $\frac{\omega}{u'} < \frac{1}{N}$.

2do Si $\frac{u}{u'} \sim 1$; etiam $\frac{u'}{u} \sim 1$. Erat enim $u - u' = \omega$, adeoque $u = u' + \omega$ et $u' = u - \omega$; itaque $\frac{u'}{u} = \frac{u - \omega}{u}$ et $\frac{u'}{u} - 1 = \frac{-\omega}{u' + \omega}$. Sed $u' > N\omega$, itaque $u' + \omega > (N - 1)\omega$, (etsi ω et u' opposita essent). Consequenter $\frac{\omega}{u' + \omega} < \frac{1}{N - 1}$ est, et cum N utvis augere liceat, $\frac{u'}{u} - 1 \sim 0$.

3tio Si ω' pro dato quovis N potest $< \frac{u}{N}$ fieri ac $\frac{u}{u'} \sim 1$; tunc etiam $\frac{u + \omega'}{u'} \sim 1$. Nam $\frac{u + \omega'}{u'}$

$= \frac{u' + \omega + \omega'}{u'}$; unde subtracto 1, manet $\frac{\omega + \omega'}{u'}$; sed

$\frac{\omega}{u'} \sim 0$ (ex 1mo), et $\omega' < \frac{u}{N}$, adeoque $\frac{\omega'}{u'} <$

$(\frac{u}{Nu'} = \frac{1}{N} \cdot \frac{u}{u'})$, quod (p. 73) ~ 0 ; nam $\frac{1}{N}$

~ 0 ; $\frac{u}{u'} \sim 1$; conseq. (p. 69) $\frac{\omega + \omega'}{u'} \sim 0$.

4to. Hinc (per 2do) etiam $\frac{u'}{u + \omega} \sim 1$. Imo si et $\lambda < \frac{u'}{N}$ fieri potest; etiam $\frac{u' + \lambda}{u + \omega} \sim 1$ (per praec.).

5to. Si $\frac{u}{u'} \sim 1$, ac $\frac{v}{v'} \sim 1$; etiam $\frac{u + v}{u' + v'} \sim 1$. Nam $v - v'$ dicatur k ; erit $\frac{u + v}{u' + v'} = \frac{u' + \omega + v' + k}{u' + v'}$,

unde subtracto 1, manet $\frac{\omega + k}{u' + v'}$; sed $\omega < \frac{u'}{N}$, ita k

$< \frac{v'}{N}$ fieri (ex 1mo) potest; et hinc $\frac{\omega + k}{u' + v'} < (\frac{u'}{N} + \frac{v'}{N})$:

$(u' + v')$, id est $< (\frac{u' + v'}{N(u' + v')} = \frac{1}{N})$ fieri potest.

Si vero de m eiusmodi quotis valet, valet etiam de $m + 1$. Sit enim $(m + 1)$ tus $\frac{p}{p'}$, et $\frac{x}{x'}$

quod ex m quotis prodiit; tum quoque $\frac{x + p}{x' + p'} \sim 1$.

6to. Si $\frac{u}{u'} \sim 1$, ac $\frac{v}{v'} \sim 1$; etiam $\frac{uv}{u'v'} \sim 1$.

Nam $\frac{uv}{u'v'} = \frac{u' + \omega}{u'} \cdot \frac{v' + k}{v'} = \frac{u'v' + \omega v' + u'k + \omega k}{u'v'}$;

unde subtracto 1, manet $\frac{\omega v' + u'k + \omega k}{u'v'} = \frac{\omega}{u'} + \frac{k}{v'} + \frac{\omega k}{u'v'}$, quod ~ 0 ; nam $\frac{\omega}{u'} \sim 0$ (ex 1mo), ita $\frac{k}{v'} \sim 0$, adeoque et $\frac{\omega}{u'} + \frac{k}{v'} + \frac{\omega k}{u'v'} \sim 0$ (p. 73).

Et hic (ut in praec.) de m ad $m+1$ progrediendo, patet quotcunque quotorum ad limitem tendentium factum, ad limitem 1 tendere.

7mo. Si $\frac{u}{u'} \sim 1$, ac $\frac{u'}{v} \sim 1$; etiam $\frac{u}{v} \sim 1$. Nam tunc etiam $\frac{uu'}{u'v} \sim 1$, conseq. $\frac{u}{v} \sim 1$.

XXVIII. Saepe quotus formae $\frac{\alpha\beta\gamma \dots}{abc \dots}$ occurrit:

sive plures sive pauciores fuerint superius literae quam inferius, et sive omnes commensurabiles fuerint, sive non, utcunque discerptis permutatisque factoribus superius inferiusve, quotus idem prodit. Ex gr.

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{abc} = \frac{\beta}{a} \cdot \frac{\alpha}{cb} \cdot \gamma = \frac{\beta}{c} \cdot \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\gamma}{a} = \gamma\alpha\beta \cdot \frac{1}{abc}$$

Nam si (pro integris $\alpha', \beta', \gamma', a', b', c', n$), $\frac{\alpha'}{n} \sim \alpha$,

$$\frac{\beta'}{n} \sim \beta, \dots \frac{a'}{n} \sim \alpha, \dots; \text{ tum } \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{nnn} \sim$$

$$\alpha\beta\gamma \text{ (p. 73), ita } \frac{a'b'c'}{nnn} \sim abc; \text{ et } \left[\left(\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{nnn} : \frac{a'b'c'}{nnn} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{a'b'c'} \right) \right.$$

$$= \left(\frac{\beta'}{n} : \frac{a'}{n} \right) \cdot \left(\frac{\alpha'}{n} : \frac{c'b'}{nn} \right) \cdot \frac{\gamma'}{n} = \left(\frac{\beta'}{n} : \frac{c'}{n} \right) \cdot \left(\frac{\alpha'}{n} : \frac{b'}{n} \right)$$

$$\left(\frac{\gamma'}{n} : \frac{a'}{n} \right) = \frac{\gamma'a'\beta'}{nnn} \cdot \left(1 : \frac{a'b'c'}{nnn} \right) \sim \frac{\alpha\beta\gamma}{abc} \text{ (p. 77);}$$

nempe tot n prodibunt ut factores superius, quot inferius, iis qui sub literis inferioribus sunt, supra, et iis qui sub superioribus sunt, infra cadentibus; atque literae superiores accento insignitae constituunt dividendum, inferiores divisorem; adeoque

utcumque discerpantur, prodibit quoto ad limitem dictum tendenti aequale. Idem ad quotvis extendi patet.

At quaeritur; quidsi integrorum dictorum quilibet aliquo signorum $+$, $-$ afficiantur?

1mo. $\frac{-\alpha'}{n}$ gaudet limite $= v_0$; nam si $\frac{-\alpha'}{n} \sim \mp \alpha$,

$$\mp \alpha - \left(\frac{-\alpha'}{n} \right) = \mp \alpha \mp \frac{\alpha'}{n} \text{ non } \sim 0.$$

2do. $\alpha', \beta', \gamma' \dots$ quocumque signo afficiatur quodvis eorum; quovis ordine, signum facti idem prodibit. Nam quae signo $+$ gaudent, factum reliquorum non mutant, quocumque illa inserantur; itaque nonnisi de $-$ quaeritur; si numero pari adsit, cum reliqui utcumque misceantur, signum non mutant; erit factum idem, quam si post omnia $+$ ponerentur omnia $-$, ita si praeter signo $+$ gaudentia maneant signo $-$ gaudentia numero impari.

3tio. In tali quoto vero, (qui sit ex gr. $-$, ita si $+$ sit patet) erunt quoti dicti, (factores partiales novi) aut aliqui signo $-$ gaudentes, aut non; in casu primo, erunt hi aut numero pari aut impari; fit vero hoc quoties dividendi divisorisque signa contraria sunt; si hoc numero pari sit, factum dividendorum illorum, et factum divisorum illis respondentium signo eodem gaudebunt; nam ubi dividendus $+$ habet, divisor $-$ habere debet, et ubi is $+$, hic $-$ habet, ut quotus $-$ habeat; adeoque si $+$ sit numero m , et $-$ numero m' superius, erit $-$ numero m , et $+$ numero m' inferius; et si m par sit, etiam m' par, si m impar, etiam m' impar esse debet, (ut numerus eorum par prodeat); si m par sit, factum et supra et infra $+$ habebit, si m impar sit, factum superius ex m' prodibit $-$, manens $-$ etiam per m , infra pariter ex m (impari) prodibit $-$, manens per m' . Signum quoti vero, ex his quotis tanquam factoribus prodeuntis, per factores reliquos signo $+$ gaudentes relinquitur; uti etiam signum facti e dividendis, cum signo facti e

divisoribus manet idem; (nam in quovis reliquorum supra et infra signum idem est); atque adeo factum superius primum per factum inferius primum divisum daret + (contra hyp); quamobrem quoti dicti (ut factores partiales) signo—gaudentes, numero pari esse nequeunt; sunt igitur numero impari, et tum etiam hoc pacto signum —prodit. Beliqua pariter patent.

XXIX. *Quod (pag 43.) potentia possibilis sit, sive commensurabile sit q sive non, et sive $\mp$ sive $-$; patet sic.*

1mo. Si q integer sit; erit ex gr. $a^2 = aa$, si $\frac{aaaa}{aa}$
 $= \frac{AAA}{AA}$ (seu $aa = A$); et dicitur (per def) $a^{\frac{4-2}{3-1}} = A$,
 atque $a = \sqrt[2]{A}$ (seu brevius $\sqrt{A}$); ita $a = A^{\frac{3-2}{4-2}}$
 $= A^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A}$. Ita pro m integro $\mp$, est $\sqrt[m]{A} = A^{\frac{1}{m}}$
 si $a^m = A$. Est etiam $\sqrt[m]{(a^m = A)} = a$.

Si vero $a = \frac{b}{c}$; tum $a^m = \frac{b^m}{c^m}$; nam, tum $\frac{b}{c}$
 adeoque tam b superius, quam c inferius (per praecc.)

ponitur m ies. Est etiam conversim $\sqrt[m]{\frac{b^m}{c^m}} = \frac{\sqrt[m]{b^m}}{\sqrt[m]{c^m}}$
 $= \frac{b}{c}$; nam $(\frac{b}{c})^m = \frac{b^m}{c^m}$.

2do Si $\frac{aaa}{aa} = \frac{AAA}{AA}$, adeoque $a = A$; tum $a^{\frac{3-2}{3-2}} = A$
 $= a = a^1$; et $\sqrt{a} = a$. Patet autem quocunque fa-
 ctores sive ad sinistram sive ad dextram adnecti
 posse, dummodo tam superius quam inferius nu-
 mero eodem sint.

3tio, Si $\frac{aa}{aa} = \frac{AAA}{AA}$ (seu $1=A$), tum $a^{\frac{2-2}{2-1}} = 1 = a^0$
 et $\sqrt[0]{1} = a$, adeoque quantitati cuilibet.

4to. Si $\frac{aa}{aaaa} = \frac{AAA}{AA}$, (seu $\frac{1}{aa} = A$); tum $a^{\frac{2-4}{3-2}}$
 $= A = a^{-2}$, et $\sqrt[-2]{A} = a$ (per def.); et $\frac{1}{A} = aa$,
 $\frac{1}{2}$
 adeoque (per 1mo) est $\sqrt{\frac{1}{A}} = a$; nempe $a = \sqrt{\frac{1}{A}} =$
 $\sqrt[-2]{A}$.
 $\sqrt{A}$.

Si vero $\frac{aaaa}{aa} = \frac{AAAAA}{AA}$, (seu $aa = AAA$); tum
 $a^{\frac{4-2}{5-2}} = A = a^{\frac{2}{3}}$, et $\sqrt[\frac{2}{3}]{A} = a$. Ita si $\frac{aa}{aaaa} = \frac{AAAAA}{AA}$,
 (seu $\frac{1}{a^2} = A^3$); est $a^{\frac{2-4}{5-2}} = A = a^{\frac{-2}{3}}$, et $\sqrt[\frac{-2}{3}]{A} = a$.

5to Sed quaeritur, num detur tale A , ut $aa = AAA$? nempe num pro quovis $\times K$ et quovis integro m detur tale k , ut $k^m = K$? Si $K=0$ sit, tum patet $0^m = K$ esse. Si non; tum datur tale x , ut $x^m < K$, et tale Z , ut $Z^m > K$ sit; nam accipiatur

talis integer n , ut $\frac{1}{n} < K$, erit $(\frac{1}{n})^m = \frac{1}{n^m}$,

quod $< \frac{1}{n} < K$ est; item pro integro $N > K$, est

$N^m > N > K$. Itaque (pag 16) datur (Fig. 16) a p incipiendo quantitate usque ad $N > K$ crescente, punctum aliquod $*$, intra quod quidvis tale est, ut id quod a p eousque est, ad m elevatum sit $< K$; eritque in $*$ aut ultimum tale, aut primum

non tale. Dicatur x' id quod a p usque in $*$ est, erit intra $*$ quidvis $= x' - \omega$, et ultra $*$ quidvis $= x' + \omega$ (pro x' , ω , $\mp$ vis). Si $\omega \sim 0$; tum $x' \pm \omega \sim x'$, adeoque $(x' \pm \omega)(x' \pm \omega) \sim x'x'$ (p. 73), et $(x' \pm \omega)^m \sim x'^m$; atque cum $x' + \omega$ ultra $*$ sit, est $(x' + \omega)^m$ aut $=$ aut $> K$. Hinc in $*$ non erit ultimum tale, neque primum non tale; nam si ultimum esset, sit $x'^m = K - b$; si primum non tale esset, sit $x'^m = K + c$ (pro b, c constantibus $\mp$ vis); erit (cum statim demonstraretur, crescente factore crescere factum, nisi factor aliquis 0 sit), $(x' + \omega)^m > x'^m > (x' - \omega)^m$; sit illud $= K + (\lambda = 0 \text{ vel cuidam } \mp)$, et $(x' - \omega)^m = K - \lambda'$; adeoque si $x'^m = K - b$, erit $(x' + \omega)^m - x'^m = K + \lambda - (K - b) = \lambda + b$; quod non ~ 0 , cum utrumque $\mp$ et b constans sit. Si vero $x'^m = K + c$, tum $x'^m - (x' - \omega)^m = K + c - (K - \lambda') = c + \lambda'$, quod pariter non ~ 0 . Est igitur x'^m neque $>$ neque $< K$, adeoque ipsi K . aequalis est.

6to. Quod *crescente factore, crescat factum*, adeoque maius ad idem m elevatum fiat maius; patet inde; quod si manente multiplicando α , sit prius multiplicator $\frac{m}{n} + (p = \text{vel} < \frac{1}{n})$, dein $\frac{m+1}{n} + (p' = \text{vel} < \frac{1}{n})$; erit factum in casu primo $< (m+1) \frac{\alpha}{n}$ in posteriore vero $=$ vel maius; patet vero, quod si $B > A$ fuerit, mensurato quoad 1 utroque, poterit 1 per talem integrum n dividi, ut $\frac{1}{n}$ in B saltem uno pluries contineatur; alioquin si $A = \frac{m}{n} + (p < \frac{1}{n})$ et $B = \frac{m}{n} + (p' < \frac{1}{n})$, et $n \sim \infty$, $p, p' \sim 0$, et $A = B$. Si etiam α crescat, mani-

festo adhuc magis crescet factum. Unde patet, maius ad exponentem integrum elevatum dare maius.

Ast etiamsi exponens crescat, maius prodit.

Sit enim $a^{\frac{4}{3}}$ et $a^{\frac{5}{3}}$ (denominatore exponentium prius eodem); erit schema (per praec.)

$a . a . a . a$ et $a . a . a . a . a$
 $xxx . xxx . xxx . xxx$ $xxx . xxx . xxx . xxx . xxx$

nempe quodvis $a = x.x.x$, et prima x accipiendo,

erit $xxxx = a^{\frac{4}{3}}$, et $xxxxx = a^{\frac{5}{3}}$; ubi patet unum factorem x accedere; adeoque si $x > 1$, maius prodire; sed x nonnisi tunc fractio vera est, si a talis sit, quia si x fractio vera est, etiam xxx talis, et adhuc minor erit.

Possunt vero *exponentes* (ut *fractiones*) *ad denominationem eandem reduci valore immutato.*

Sit enim $a^{\frac{2}{3}} = x$, nempe $aa = xxx$, erit $a^{\frac{2.5}{3}}$ etiam $= x$; nam tum $a^{2.5} = x^{3.5}$, quia $a^{2.5} =$

$aa . aa . aa . aa . aa =$
 $xxx . xxx . xxx . xxx . xxx$; nempe a^2 ponitur 5ies
adeoque x ponitur 3.5ies.

Hinc etiam (pro integris n, m est $a^n = a^{\frac{n}{1}} = a^{\frac{mn}{m}}$
Numeros 2, 3, 5 scilicet quorumcunque integrorum $\times$ vorum vices subire manifestum est.

7mo. Sit prius $a^{\times}$, et (pro integris $\times$ vis n, m) sit $\frac{n}{m} \rightsquigarrow q$, nempe $1 = mu$, $q = nu + (\omega < u)$, et $\omega \rightsquigarrow 0$; erit crescente $\frac{n}{m}$ sine fine, (pro $a > 1$)

semper $a^{\frac{n+1}{m}} > a^{\frac{n}{m}}$ (per praecedentia); et $\frac{n+1}{m} >$

q , atque $a^{\frac{n+1}{m}} > a^q$; fiat n' ex n , et m' ex m ; redu-

cendo ad denominationem eandem, erit $a^{\frac{nm'}{mm'}} < a^{\frac{mn'}{mm'}}$

nam $nm' < mn'$. Crescit igitur valor A ipsius $a^{\frac{n}{m}}$

sine fine, manens tamen $<$ primo a^m , itaque $a^{\frac{n}{m}}$

tendit ad limitem aliquem B , dum $\frac{n}{m} \sim q$; adeo-

que (per def.) est $B = a^q$, et $a = \sqrt[q]{B}$.

Si $a = 1$, manifesto $a^{\frac{n}{m}}$ semper $= 1$ erit; nam a^n

$= 1$, et $\sqrt[m]{1} = 1$, quia $1^m = 1$; et A non $\sim$ sed

est $= B = 1$, et cum a^n semper $= B^m$, atque $\frac{n}{m} \sim q$;

est (per def.) $a^q = B$, id est $1^q = 1$.

Si vero $a < 1$ sit; tunc crescente $\frac{n}{m}$ decrescet

$a^{\frac{n}{m}}$; nam si a fractio vera sit, crescente n decre-

scet a^n , atque (ut antea ad denominationem ean-

dem reducendo), erit $a^{\frac{nm'}{mm'}} < a^{\frac{m'n}{mm'}}$ et $\sqrt[m]{a^{\frac{nm'}{mm'}}} <$

$\sqrt[m]{a^{\frac{m'n}{mm'}}}$, seu $a^{\frac{n'}{m'}} < a^{\frac{n}{m}}$. Decrescit itaque sine

fine $a^{\frac{n}{m}}$, nunquam tamen fiens 0 ; itaque limite

gaudet; qui (per def.) est potentia exponentis q

ipsius a . Si $q = -$ sit, et (pro $\frac{n}{m}$ posito $\frac{-n}{m}$), $a \neq$ sit; erit

$a^{-n} = A^m$, nempe datur tale A , ut $\frac{1}{a^n} = A^m$ sit, ni-

mirum $A = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}$; quod, si $a > 1$, decrescit

(cum denominator crescat), nunquam tamen fiens 0; si $a=1$, semper 1 erit; si $a < 1$, crescet manens tamen certo finito minus, cum denominator limite finito gaudeat. Unde patet et hic dari potentiam exponentis q ipsius a . Hinc etiam, cum

$$\frac{-n}{m} \rightsquigarrow q, \text{ atque } \frac{n}{m} \rightsquigarrow -q; \text{ est } a^q = \frac{1}{a^{-q}}, \text{ et}$$

$a^{-q} = \frac{1}{a^q}$. Unde potentia e divisore in dividendum poni potest, exponente in oppositum mutato. Ex gr.

$$\frac{b}{a} = ba^{-1}$$

8vo. Notatu dignum est; quod quodvis datum

N et quaevis fractio vera f sit, tam $\sqrt[m]{N}$, quam

$\sqrt[m]{f} \rightsquigarrow 1$, si integer $m \rightsquigarrow \infty$. Nam quivis integer n sit; est $(n+1)^2 > n^2 + 2n$, et si $(n+1)^i > n^i + in^{i-1}$ sit, multiplicando per $n+1$, erit $(n+1)^{i+1} > n^{i+1} + (i+1)n^i$, atque adeo $(n+1)^m > n^m + mn^{m-1}$, et $\left(\frac{n+1}{n}\right)^m > \left(\frac{n^m + mn^{m-1}}{n^m} = \frac{n+m}{n}\right)$, dividendo per n^{m-1} patet. Sed m adeoque $\frac{m}{n} \rightsquigarrow \infty$, cum

n maneat. Ita $\left(\frac{n}{n+1}\right)^m < \left(\frac{nm}{nm + mn^{m-1}} = \frac{n}{n+m}\right)$,

ubi $\frac{n}{m} \rightsquigarrow 0$.

9no. $a^q \cdot a^Q = a^{q+Q}$. Sit enim (pro integris n, m, v , ad denom. eandem reducendo) $\frac{n}{m} \rightsquigarrow q$, et $\frac{v}{m} \rightsquigarrow Q$;

erit $a^{\frac{n}{m}} \rightsquigarrow a^q$, et $a^{\frac{v}{m}} \rightsquigarrow a^Q$, at-

que $a^{\frac{n}{m}} \cdot a^{\frac{v}{m}} \rightsquigarrow a^q \cdot a^Q$. Sit $a^{\frac{n}{m}} = x^m$, et $a^{\frac{v}{m}} =$

y^m ; erit $x = a^{\frac{n}{m}}$, $y = a^{\frac{v}{m}}$, et $xy = a^{\frac{n}{m}} \cdot a^{\frac{v}{m}}$
 atque $x^m y^m = a^n a^v$, seu $(xy)^m = a^{n+v}$; conseq. xy
 $= a^{\frac{n+v}{m}}$, quod $\simeq a^{q+Q}$; nam $\frac{n}{m} \simeq q$, et $\frac{v}{m}$
 $\simeq Q$, adeoque (p. 69) $\frac{n+v}{m} \simeq q+Q$. Est igitur
 $a^q \cdot a^Q = a^{q+Q}$ (p. 74). Si n aut etiam v sit, pa-
 riter patet.

Unde etiam $\frac{a^q}{a^Q} = a^{q-Q}$. Nam $a^Q \cdot a^{q-Q} =$
 $a^{Q+q-Q} = a^q$.

10mo. Si $\frac{n}{m} = q$, et $a^n = B^m$, tum non tantum

$a^{\frac{n}{m}} = B$, sed etiam $B^{\frac{m}{n}} = a = B^{\frac{1}{q}}$; quia $\frac{m}{n} = 1 : \frac{n}{m}$.

At etiam si $\frac{n}{m} \simeq q$, est $a = B^{\frac{1}{q}}$, si $a^q = B$. Nam

$\frac{n+1}{m} > q > \frac{n}{m}$; itaque (p. 87) $a^{\frac{n+1}{m}} > B > a^{\frac{n}{m}}$; et

hinc $a^{n+1} > B^m > a^n$, atque $B^{\frac{m}{n+1}} < a < B^{\frac{m}{n}}$. At $B^{\frac{m}{n+1}}$

$= B^{\frac{m}{n}} \simeq o$; adeoque etiam $a = B^{\frac{m}{n}} \simeq o$ (p. 70),

nempe $\frac{m}{n} \simeq \frac{1}{q}$, et $\frac{m}{n+1} = \frac{m}{n} \simeq o$; conseq.

$a = B^{\frac{1}{q}}$ (p. 69).

Hinc etiam si $B^{\frac{1}{q}} = a$, est $B = a^{1 : \frac{1}{q}} = a^q$; i-

ta sive $a = \sqrt[q]{B}$, sive $a = B^{\frac{1}{q}}$ scribatur, perinde est

11mo. Pro integris n, m est $(\sqrt[m]{B})^n$ id est $(B^{\frac{1}{m}})^n = \sqrt[m]{(B^n)}$. Nam sit $B = z^m$, adeoque $z = B^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{z^{mn}} = z^n$.

12mo. $(\frac{b}{c})^{\frac{n}{m}} = \frac{b^{n:m}}{c^{n:m}}$. Nam $(\frac{b}{c})^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{(\frac{b}{c})^n} = \sqrt[m]{\frac{b^n}{c^n}} = \frac{x}{y}$ si $x^m = b^n$, et $y^m = c^n$; nam $(\frac{x}{y})^m = \frac{x^m}{y^m}$. Est vero tunc $x = b^{\frac{n}{m}}$, $y = c^{\frac{n}{m}}$ adeoque $\frac{x}{y} = \frac{b^{n:m}}{c^{n:m}} = \sqrt[m]{(\frac{b}{c})^n} = (\frac{b}{c})^{\frac{n}{m}}$. Si vero $\frac{n}{m} \sim q$ tum $(\frac{b}{c})^{\frac{n}{m}} \sim (\frac{b}{c})^q$, item $b^{\frac{n}{m}} \sim b^q$, et $c^{\frac{n}{m}} \sim c^q$; conseq. (pag. 77) $(\frac{b}{c})^q = \frac{b^q}{c^q}$. Ita $\sqrt[q]{\frac{b}{c}} = \frac{\sqrt[q]{b}}{\sqrt[q]{c}}$; nempe tum $\frac{m}{n} \sim \frac{1}{q}$, atque $(\frac{b}{c})^{\frac{m}{n}} = \frac{b^{m:n}}{c^{m:n}}$; unde reliqua patent.

13tio. $(a^{\frac{n}{m}})^{\frac{\nu}{\mu}} = a^{\frac{n\nu}{m\mu}}$ (pro n, m, ν, μ integris).

Nam sit $a = x^{m\mu}$, adeoque $\sqrt[m\mu]{a} = x$, erit $a^n = x^{n m \mu}$, et $\sqrt[n]{a^n}$ (nempe $a^{\frac{n}{m}}$) $= \sqrt[n]{x^{n m \mu}} = x^{m\mu}$; itaque $(a^{\frac{n}{m}})^{\frac{\nu}{\mu}} = x^{n \mu \nu}$, atque $\sqrt[\mu]{(a^{\frac{n}{m}})^{\frac{\nu}{\mu}}} = \sqrt[\mu]{x^{n \mu \nu}} = x^{n \nu}$.

$= x^{nv} = (\sqrt[m\mu]{a})^{nv} = \sqrt[m\mu]{(a^{nv})}$ (11mo) $= a^{\frac{nv}{m\mu}}$. Unde et-

iam si $\frac{n}{m} \sim q$, et $\frac{v}{\mu} \sim p$, adeoque $\frac{nv}{m\mu} \sim$

pq , et $a^{\frac{n}{m}} \sim a^q$; atque $a^{\frac{nv}{m\mu}} \sim a^{pq} = (a^q)^p$.

Nam $\frac{n+1}{m} > q > \frac{n}{m}$; adeoque $a^{\frac{n+1}{m}} > a^q > a^{\frac{n}{m}}$,

ita $\frac{v+1}{\mu} > p > \frac{v}{\mu}$; itaque erit etiam $(a^{\frac{n+1}{m}})^{\frac{v+1}{\mu}} >$

$> (a^q)^p > (a^{\frac{n}{m}})^{\frac{v}{\mu}}$, (posito $a > 1$, pro $a < 1$ esset

<loco>). Conseq. $a^{\frac{(n+1)(v+1)}{m\mu}} > (a^q)^p > a^{\frac{nv}{m\mu}}$,
ubi differentia postremi a primo ~ 0 ; nam

$a^{\frac{nv+n+v+1}{m\mu}}$, et $a^{\frac{nv}{m\mu}}$ limite communi gaudent,

(ut in 10), nam $\frac{n+v+1}{m\mu} \sim 0$, quia $\frac{n}{m}, \frac{v}{\mu}$

manet finito minus, $\frac{1}{\mu}$ et $\frac{1}{m}$ vero ~ 0 . Unde

(pag. 70) $a^{\frac{nv}{m\mu}} - (a^q)^p \sim 0$, et (pag. 69) cum

$a^{\frac{nv}{m\mu}} \sim a^{pq}$, est $a^{pq} = (a^q)^p$.

Hinc etiam $\sqrt[k]{a^q} = a^{\frac{q}{k}}$. Nam $\sqrt[k]{a^q} = (a^q)^{\frac{1}{k}}$

$= a^{\frac{q}{k}}$

Si $a < 1$, aut exponents uterque, (aut unus tan-

tum) — fuerit, tum quoque omnia initials mutan-

dis (p. 88) valent. Ex gr. $(a^{-p})^{-q} = \left(\frac{1}{a^p}\right)^{-q} = \left(1 : \frac{1}{a^p}\right)^q$

$= (a^p)^q = a^{pq}$. Ita $(a^{-\alpha})^{\frac{1}{\beta}} = a^{\frac{-\alpha}{\beta}} = a^{-\frac{\alpha}{\beta}}$; nam

$$a^{\frac{-\alpha}{\beta}} = \sqrt[\beta]{a^{-\alpha}} = \sqrt[\beta]{\frac{1}{a^{\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt[\beta]{a^{\alpha}}} = \frac{1}{a^{\alpha : \beta}}; \text{ atque}$$

etiam $a^{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt[\beta]{a^{\alpha}} = \sqrt[\beta]{\frac{1}{\frac{1}{a^{\alpha}}}} = \frac{1}{a^{\alpha : \beta}}$. Ita $a^{-\frac{\alpha}{\beta}}$

$$= \sqrt[\beta]{a^{-\alpha}} = \sqrt[\beta]{\frac{1}{a^{\alpha}}} = \sqrt[\beta]{\left(1 : \frac{1}{a^{\alpha}}\right)} = \sqrt[\beta]{a^{\alpha}} = a^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Hinc si $\frac{\alpha}{\beta} = q$, et $a^{\alpha} = b^{\beta}$; est quoque $(a^{\alpha})^{\frac{1}{\beta}}$

$= (b^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}$, seu $a^{\frac{\alpha}{\beta}} = b$, seu $a^q = b$. Conversim et-

iam si $a^{\frac{\alpha}{\beta}} = b$; est $a^{\alpha} = a^{\beta}$; nam $(a^{\frac{\alpha}{\beta}})^{\beta} = b^{\beta}$,
seu $a^{\alpha} = b^{\beta}$.

15to. $(abc \dots)^q = a^q \cdot b^q \cdot c^q \dots$. Nam si $\frac{n}{m} \sim q$

(ut supra); erit $(abc)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{(abc)^n} = \sqrt[m]{a^n b^n c^n}$
 $= \sqrt[m]{x^n y^n z^n} = xyz$, si $a^n = x^m, b^n = y^m, c^n = z^m$. Est

vero tum $x = a^{\frac{n}{m}}$, $y = b^{\frac{n}{m}}$, $z = c^{\frac{n}{m}}$, adeoque xyz

$$= a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{n}{m}} c^{\frac{n}{m}} = (abc)^{\frac{n}{m}} \sim (abc)^q; a^{\frac{n}{m}} \sim$$

$$a^q, b^{\frac{n}{m}} \sim b^q, c^{\frac{n}{m}} \sim c^q; \text{conseq. } (abc)^q = a^q b^q c^q$$

$$\text{Unde etiam } \sqrt[k]{(abc)} = (abc)^{\frac{1}{k}} = a^{\frac{1}{k}} b^{\frac{1}{k}} c^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b} \cdot \sqrt[k]{c} = \sqrt[k]{abc}.$$

16to. Si $a = -$ sit, et $\frac{n}{m} \sim q$; poterit n aut m , aut utrumque sive par sive impar accipi semper prouti visum fuerit; nam $\frac{n+1}{m}$, aut $\frac{n}{m+1}$, ita $\frac{n+1}{m+1}$ quoque $\sim q$ (p. 70). Si n par sit, erit a^n

$\pm$, et si m quoque par sit, $a^{n:m}$ duos valores, unum $\pm$ alterum $-$ habet, alioquin aequales; si m impar sit, unus datur valor $\pm$, sed $-$ ad numerum imparem elevatum $-$ est. Si vero n impar sit, erit $a^n -$, et pro m impari habet $a^{n:m}$ unum valorem $-$ vum, at $\pm$ vum non, quia huius potentia $\pm$, non $-$ est.

Si igitur q incommensurabile sit, 2 valoribus gaudet a^q aequalibus, uno $\pm$ vo altero $-$ vo; sive $\pm$ sive $-$ sit a ; si vero $q = \frac{n}{m}$, et n impar, atque $a -$, et m quoque impar sit, unus erit valor et quidem $-$; sed si pro n impari m par sit, nec $\pm$ nec $-$ valor datur, quod ad numerum parem elevatum, $-$ sit. Dicuntur eiusmodi quantitates imaginariae; ut $\sqrt{-4}$; nempe tam $+2$ quam -2 per se multiplicatum fit $+4$ non -4 .

XXX. At priusquam de imaginariis ageretur, sit fas de logarithmo elementari ad quem (p. 43) conceptus potentiae deduxerat, et hic aliquid referre.

Imo. Si basis $a >$ vel < 1 sit (pag. 43) quomodo reperiatur pro quovis P tale p , ut $a^p = P$ sit, infra dicetur. Patet autem, si $a < 1$ sumeretur, crescente $\pm p$, decrescere a^p , et crescere crescen-

te $-p$. $\text{Log } a = 1$, quia $a^1 = a$; $\text{log. } 1 = 0$, quia $a^0 = 1$.

2do. Si $a^P = P$ et $a^Q = Q$; tum $p = \text{log. } P$, et $q = \text{log. } Q$ (quoad basim eandem Q); atque etiam $a^{p+q} = PQ$. (9no), et $p+q = \text{log } P + \text{log } Q = \text{log } (PQ)$. Unde (de n ad $n+1$ progrediendo) $\text{log. facti} = \text{summae logarithmorum factorum}$ Et vicissim quantitas, cuius $\text{log. est } p+q$. est $a^p \cdot a^q \dots$, nempe haec talis est, cuius $\text{log. est } p+q \dots$ Si $q=0$, est $Q=1$.

3tio. Quum $a^P : a^Q = P : Q = a^{p-q}$ sit, (9no), atque $p-q$ sit $\text{log } (P : Q)$; est $\text{log. quoti, differentia log. divisoris a log. dividendi;}$ nempe $\text{log } \frac{P}{Q} = \text{log } P - \text{log } Q$. Et vicissim quantitas, cuius $\text{log} = p-q$, est $a^p : a^q$. Hinc fractionis verae $\text{log} =$ est, et logarithmo $=$ vo respondens quantitas fractionis vera est; nam $\text{log } \frac{2}{3} = \text{log } 2 - \text{log } 3$; et

conversa (p. 87) quoque valet, nempe etiam idem $\times$ et > 1 ad maius elevandum est, ut $>$ prodeat; quia $\text{ad } < \text{elevatum dat } < \text{ad } = \text{dat } =$. Et vicissim $=$ vo fractio vera respondet; nempe si a ad $-k$ eleve-
tur (pro $k \times$ vo), id est si 1 per a^k dividatur, (p. 89); est vero $a > 1$, et a^k etiam $\times$, et > 1 ; nam $1^k = 1$, et si $a > 1$, etiam $a^k > 1$.

4to. $(a^P)^Q = P^Q = a^{PQ}$ (13tio). Itaque $\text{log potentiae est } = \text{logarithmo quantitatis elevandae per exponentem multiplicato}$. Nam $pq = \text{log } P^Q = q \text{ log } P$. Et vicissim quantitas, ipsi pq tanquam logarithmo respondens est $= P^q$. Hinc $\text{log } P + 2 \text{ log } Q = \text{log } P \cdot Q^2$, et $\text{log } P - 3 \text{ log } Q = \text{log } \left(\frac{P}{Q^3} \right)$.

5to. $\sqrt[q]{(a^P)} = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{P}$. Est vero $\frac{p}{q} = \frac{\text{log } P}{q} =$

$\log(\sqrt[q]{P})$. Itaque quotus e logarithmo quantitatis e qua radix extrahenda est, per exponentem radicalem diviso, est $\log.$ radicis quaesitae. Et vicissim quantitas, cuius $\log.$ est $\frac{\log. P}{q}$, est $\sqrt[q]{P}$.

6to. Hinc etiam, si pro basi quavis aliqua, dati sint logarithmi; pro quovis α reperitur tale x , ut $\alpha^x = \text{dato } \beta$ sit; nempe (4to) $x \log. \alpha = \log. \beta$, adeoque (per $\log. \alpha$ dividendo utrinque) est $x = \frac{\log. \beta}{\log. \alpha}$.

De hisce operationum commodis inferius plura. Quum pro exponentibus integris manifestum esset in multiplicatione addi, in divisione subtrahi, in elevatione multiplicari, in radice (ex gr. in $\sqrt[3]{a^6}$) dividi: idem ad exponentem fractum extendere pronum erat; atque tum quaestione (p. 43) proposita, satagere, ut compendiis his numeri omnes subjiciantur.

Notandum adhuc est; quod si basis logarithmica $a < 1$ (ex gr. $\frac{2}{3}$) poneretur; pro $q \rightarrow \infty$, tum $(\frac{2}{3})^q \rightarrow 0$, (patet ex 8vo); adeoque (sensu p.38) $\log. 0$ esset $\rightarrow \infty$, uti pro basi $\rightarrow 0$, est $\rightarrow \infty$. Pro $q=1$ fit potentia ipsa basis $\frac{2}{3}$, et pro $q=0$, fit 1; postea vero crescente exponente $\rightarrow \infty$ in ∞ , $(\frac{2}{3})^{-q} \rightarrow \infty$. De logarithmo elementari ac sublimiori adhuc quaedam paulo inferius dicenda erunt.

XXXI. Ad omnes istas operationes autem Unitatem determinatam, eandemque pro omnibus, suppositam esse dictum supra est. At quaestio oritur, quid si alia Unitas poneretur? idemne maneret, aut in quem mutaretur expressionis valor? aut

expressiones quoad diversas unitates factae quomodo ad eandem reduci queant?

Quantitates (uti certum tempus, certa recta &c.), quarum unitas u talis in intuitu exhiberi potest, ut non aliud, nisi quod $=u$ est, pro illo casu unitas esse queat, *concretas*, easque *generales* sive *abstractas* dicere licet, quae cuivis unitati sed nulli exclusive appertinent; nempe in quo conveniunt plura (quovis quoad suam unitatem relato); ex gr.

$\frac{2}{3}$ dici de quovis potest, quod suae unitatis 3tiam bis continet; hoc sensu est (p. 37) quotus ex gr. e 2 pedibus per 3 pedes divisus unicus, cum alioquin quidvis quod suae unitatis 3tiam bis continet quotus sit. Si quant. abstracta sit multiplicator aut divisor, utcunque mutata multiplicandi (dividende) Unitate, resultatum idem est; imo etiamsi abstracta multiplicetur per concretam, si in hoc casu expressio prodiens semper ad unitatem concretae referatur, resultatum idem manet; ex gr. si a denotet 5 pedes, sitque prius unitas $u=1'$, dein sit $U=\frac{u}{2}$, erit $\frac{2}{3} \cdot a = \frac{2 \cdot 5'}{3} = \frac{5 \cdot 2'}{3} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1'}{3 \cdot 2}$;

itaque factores abstracti, ubivis occurrant, factum non mutant; idem est si in divisore occurrat abstracta; nam $a : \frac{2}{3} = a \cdot (1 : \frac{2}{3})$. Concreta per con-

cretam homogeneam divisa quoque, utcunque mutata Unitate quotum eundem dat; sed si in divisore plures factores concreti sint, quam in dividendo, ex gr. sit $\frac{\alpha\beta}{abc}$, atque unitas sit u , resultatum manebit idem, si supra quodvis tale concretum (ut c) ponatur u , ut sit $\frac{\alpha\beta u}{abc}$; ita si sit ex gr.

$\frac{2}{c}$ et ponatur $\frac{2u}{c}$, manebit valor idem, alioquin mutata unitate mutatur. At quaeritur, quomodo

factum concretorum mutetur unitate mutata? et idem etiam ad quotos quorum et dividendus et divisor factum e factoribus concretis est, applicari poterit.

• Exprimantur quantitates concretæ a et b prius quoad $u=1$, tum quoad unitatem ex u in $U=ku$ mutatam; sitque $\frac{vu}{\mu} = \text{vel } \sim U$; et (pro integris v, μ, a', b', n), $\frac{a'u}{n} = \text{vel } \sim a$, $\frac{b'u}{n} = \text{vel } \sim b$; erit $\frac{\mu a'U}{vn} = \text{vel } \sim a$, et $\frac{\mu b'U}{vn} = \text{vel } \sim b$; nam aut $U = \frac{vu}{\mu}$ et tum $\frac{\mu U}{v} = u$, aut $U - \frac{vu}{\mu} \sim o$, et multiplicando per $\frac{\mu}{v} < \text{finito certo}$, etiam $\frac{\mu}{v} (U - \frac{vu}{\mu})$ seu $\frac{\mu U}{v} - u \sim o$.

Si iam a per b quoad $u=1$ dividendum sit, erit $(\frac{a'u}{n} : \frac{b'u}{n} = \frac{a'}{b'}) = \text{vel } \sim \frac{a}{b}$; et operatione quoad $U=1$ facta quoque erit idem, nempe $(\frac{\mu a'U}{vn} : \frac{\mu b'U}{vn} = \frac{a'}{b'}) = \text{vel } \sim \frac{a}{b}$ (ad instar p. 77); itaque nec eiusmodi factores, ut $\frac{a}{b}$ factum mutant.

At si factores numero m singuli quantitates concretæ et homogeneæ sint, ex gr. $abc \dots$; atque factum quoad $u=1$ sit f , factum quoad $U=1=ku$ sit F ; erit $f=F.k^{m-1}$, et $F=\frac{f}{k^{m-1}}$, ubi k, m quantitates abstractæ adeoque expressiones determinatæ sunt.

Unde etiam a^m (quoad $u=1$) est $= k^{m-1} . a^m$ (quoad $U=1$), atque a^m (quoad $U=1$) est $= \frac{a^m(\text{quoad } u=1)}{k^{m-1}}$.

Constructis tam quoad $u=1$, quam quoad $U=1$ schematibus patet; (etsi pro $\sim$ stet $=$)

$$n, \frac{u}{n} = u = 1, \quad b' \frac{u}{n} \sim b; \quad n \frac{a}{n} = a, \quad b' \frac{a}{n} \sim ba$$

$$n\nu, \frac{U}{n\nu} = U = 1, \quad b'_{\mu} \frac{U}{n\nu} \sim b; \quad n^{\nu} \frac{a}{n\nu} = a, \quad b'_{\mu} \frac{a}{n\nu} \sim ba$$

prius factum quoad $u=1$, posterius quoad $U=1$ est; sed $\frac{\mu}{\nu} = \text{vel } \sim \frac{1}{k}$, itaque $\frac{\mu b' a}{\nu n} = \text{vel } \sim$

$\frac{f}{k}$. Si novus factor eiusmodi accedat, manife-

stum est, factum istud denuo per k dividi; adeoque si 3 factores eiusmodi sint, exponens ipsius k erit 2, et ulterius progrediendo erit exponens apud m tum factorem $m-1$.

Hinc etiam superius pro exponente m integro patet. At sit exponens q ; erit hic aut quantitas abstracta uti $\frac{2}{3}$ aut pariter divisore $u=1$ subpo-

sito evadet $\frac{q}{u}$ determinatum; aut erit q tantum

quantitas concreta, cuius expressione quoad unitatem novam mutata, potentia eatenus quoque mutatur. Sit prius casus prior; dicaturque r valor

qui prodit a ad $\frac{q}{u}$ quoad $u=1$ elevato, et R

valor qui fit elevatione quoad $U=ku=1$ facta; erit

$$R = r \cdot k^{\frac{1-q}{u}} = \frac{r}{k^{\frac{q-1}{u}}}, \quad \text{et } r = R \cdot k^{\frac{q-1}{u}}.$$

$$\text{Sit } \frac{n}{m} = q \text{ (pro integris } n, m), \text{ seu } \frac{q}{u} = \frac{n}{m};$$

inde etiam casus quodsi $\frac{n}{m} \sim q$ sequitur. Erit

$$\sqrt[n]{a^n} \text{ (quoad } u=1) \text{ tunc } r, \text{ et quoad } U=ku=1$$

N. *

erit R ; est vero $a^n(\text{quoad } U=1) = \frac{a^n(\text{quoad } u=1)}{k^{n-1}}$;

atque $r^m(\text{quoad } u=1)$ est $= a^n(\text{quoad } u=1) = k^{n-1}$

$a^n(\text{quoad } U=1)$; $r^m(\text{quoad } U=1)$ vero est $= \frac{k^{n-1} \cdot a^n(\text{quoad } U=1)}{k^{m-1}} = 1 \cdot r^m(\text{quoad } u=1)$ (per

praec). Hinc dividendo utrinque per $\frac{k^{n-1}}{k^{m-1}}$, fit $\frac{k^{m-1}}{k^{n-1}}$

$[r^m(\text{quoad } U=1) = k^{m-n} \cdot r^m(\text{quoad } U=1) = a^n(\text{quoad } U=1)]$; atque radicem m gradus sumendo,

est $r \cdot k^{\frac{1-n}{m}} = (\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}})$ quoad $U=1$. Conseq.

$$R = r k^{\frac{1-q}{u}} = \frac{r}{k^{\frac{q-1}{u}}}, \text{ et } r = R k^{\frac{q-1}{u}}.$$

Si $\frac{n}{m} \sim \frac{q}{u}$; tum $r k^{\frac{1-n}{m}} = \frac{r k}{k^{\frac{n}{m} \cdot m}} \sim \frac{r k}{k^{q \cdot u}} =$

$r k^{\frac{1-q}{u}}$, et tum $(R = a^{n:m}) \sim a^{\frac{q}{u}}$ (quoad $U=1$ facta elevatione).

Si vero quantitas concreta q ex gr. recta sit exponens, muteturque eius expressio mutata unitate, ut nempe si q erat $\frac{nu}{m}$, nunc sit $\frac{n\mu U}{m\nu}$ pro $U=$

$ku = 1$, et $k = \frac{\nu}{\mu}$, atque ex $\frac{q}{u}$ fiat $\frac{q}{ku}$;

erit $a^{\frac{q}{ku}}$ quoad $U=1$ elevando $= R^{\frac{1}{k}}$ (quoad $U=1$

elevando), seu erit $= (r k^{\frac{1-q}{u}})^{\frac{1}{k}}$ (quoad $U=1$. Nam

quoad $U=1$ elevando, est $R = a^{\frac{q}{u}}$, et $a^{\frac{q}{ku}} = (a^{\frac{q}{u}})^{\frac{1}{k}}$

(quoad U). Idem patet, si $\frac{n}{m} \sim \frac{q}{u}$, et $\frac{v}{\mu}$

$\sim k$, nempe tum $\frac{n\mu}{m\nu} \sim \frac{q}{ku}$, et $(a^{n\mu : m\nu}$

$$= a^{\frac{n}{m} : \frac{v}{\mu}}) \sim a^{\frac{q}{u} : k} = a^{\frac{q}{ku}}.$$

Exempla: Sit $q=3^0$, $u=1^0$, $a=1^0$, $U=\frac{1^0}{2}$; erit

$r=a^q=1^0$ (quoad $u=1$), et a^q (quoad $U=1$) est a^6 (quoad $\frac{1^0}{2}=1$ facta elevatione) $=32^0$; estque

$$R=a^3(\text{quoad } U=1 \text{ facta elevatione})=1^0.(\frac{1}{2})^{-2}=4^0,$$

atque $(R^{\frac{1}{k}}=R^2)$ quoad $U=\frac{1^0}{2}$ elevando, fit ae-

que 32^0 ; nempe pro $\frac{1^0}{2}=1$, et factore utroque $=$

$$4^0=8, \text{ schema est; } 1.(\frac{1^0}{2}=1)=1, 8.1=4^0; 1.4^0$$

$$=4^0, 8.4^0=32^0.$$

*Ita aequatio omnium linearum 2di ordinis inferius (ubi ad repetitionem evitandam haec citabuntur),

pro coordinatis rectangulis erit $y^2=x-\frac{x^2}{\pm a}$, adeo-

que ordinata $y=\sqrt{(x-\frac{x^2}{\pm a})}$, ubi unitas ad ra-

dicis extractionem requisita, dicitur *parameter* lineae; a sumitur $\pm$, et quod ipsorum $+a$, $-a$, ponitur, dicitur *axis maior* lineae, medietullium eius *centrum* audit, duplum ordinatae e centro *axis minor*, et punctum abscissae e quo duplum ordinatae est $=1$ = parametro, *focus* vocatur, ac recta e foco ad quodvis lineae punctum *radius vecto*.

Dicitur vero linea *parabola*, si $a \sim \infty$, et ex $x - \frac{x^2}{\pm a}$ fiat (p. 38) x , *ellipsis* si ante a sit $+$, et *hyperbola* si $-$ sit. Patebit etiam quamvis coni verticaliter producti sectionem cum plano ita exprimi posse, veluti lineam cuius aequatio superior est, quantumvis sit a , et quantumvis sit unitas, nempe parameter, lineam eius e sectione plani per conum produci posse. Si $a=1$ =parametro, linea cuius aequatio est $y^2=x-\frac{x^2}{-a}=x+x^2$, dicitur *hyperbola aequilatera*, si vero $+a$ sit, $y^2=x-x^2$ aequatio circuli erit pro diametro = axi maiori = 1 = parametro.

Si iam manente linea et parametro, unitas alia ponatur ex gr. radius, adeoque priori unitate u dicta, sit nova unitas $U=ku=\frac{1}{2}u$; et quaeratur pro eadem abscissa x , eiusdem ordinatae y expressio quoad U ; erit idem $y=\sqrt{(x-\frac{x^2}{2})}.\sqrt{2}$ (operatione quoad $U=1$ facta) $=\frac{\sqrt{(2x-x^2)}}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}=\sqrt{(2x-x^2)}$ (quoad radium = 1, sed qui iam parameter non est, aequatione mutata). Quod $\sqrt{(x-x^2)}$ (quoad $u=1$) in dictam mutatur patet (e praec); nam recta $x=x$ utcumque mutetur unitas, at ex x^2 (quoad u), fit $\frac{x^2}{2}$ (quoad $U=\frac{1}{2}u=1$); radix 2di gradus quoad $U=1$ vero nempe R multiplicari per $k^{\frac{q-1}{u}}=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}-1}=(\frac{1}{2})^{\frac{-1}{2}}=(1:\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ debet (per antea dicta). Ita si 5ta pars diametri ponatur = 1, idem y pro eodem x erit $\sqrt{(5x-x^2)}$ (operatione quoad $U=\frac{1}{5}u=1$ facta).

Pro abscissis in *hyperbola* aequilatera ad asymptotam sumtis, et ordinatis ad asymptotam alteram parallelis, est $y = \frac{q^2}{x} = q \cdot \frac{q}{x}$ (per q intelligendo

ordinatam e vertice *hyperbolae*) : patet vero $q \cdot \frac{q}{x}$

(per dicta) pro quavis unitate manere, itaque $q=1$ poni potest; quo pacto (ut suo loco dicetur), erit area quaevis inter asymptotam, *hyperbolam* et q , *logarithmus* (*naturalis* dictus) abscissae e centro acceptae.

Interim altera quaestio est, quanta fiat ordinata pro eadem abscissa et alia parametro? Erat pro

parabola $y = x^{\frac{1}{2}}$ (quoad $u=1$); eritque $Y = x^{\frac{1}{2}}$

(quoad $U = ku = 1$) $= (k^{\frac{1}{2}-1} = k^{\frac{1}{2}}) \cdot x^{\frac{1}{2}}$ (quoad $u=1$); nempe ordinatae pro eadem abscissa in diversis parabolis sunt, uti radices quadratae parametrorum; (in eadem vero 2dae potentiae ordinatarum sunt, uti abscissae).

* *Logarithmus etiam quantitatis concretæ P quoad unitatem ex u in $U = ku = 1$ mutatam reperi-ri potest. Quivis logarithmus est quoad certam basim et certam unitatem; atque dum ex $az = P$ concluditur (p. 96) $z \log a = \log P$, intelligitur pro basi a et $u=1$ esse a^z (quoad $u=1$) $= P$, atque a^z (quoad idem $u=1$) esse $= P$; adeoque $zy = z \log a$ (quoad basim a et $u=1$) $= \log P$. Sit a^P (quoad $u=1$) $= P$, erit $p = \log P$ (quoad basim a et $u=1$);*

sit quantitas abstracta k , et $(\frac{a}{ku})^x$ quoad $u=1$) $=$

$\frac{P}{ku}$, erit $x \cdot \log (\frac{a}{ku} \cdot u) = \log \frac{P}{ku} \cdot u$, seu x

$(\log a - \log ku) = \log P - \log ku$ (p. 93), $= x(1 - \log ku)$

quia $\log a = 1$ (ibidem); hinc $x = \frac{\log P - \log ku}{1u - \log ku}$ (omnia

quod basim a et $u=1$ intelligendo); eritque $\frac{a.u}{ku}$

quoad $u=1$ elevatum $= \frac{P}{ku} . u$; atque tum etiam

$\frac{a}{ku} . U$ quoad $U=1$ elevatum ad x erit $= \frac{P}{ku} . U$ (ut

statim patebit). Est vero $\frac{a}{ku} . U = a$, et $\frac{P}{ku} . U = P$

(pro $U=ku$) Conseq a^x (quoad $U=1$) est $= P$.

Sit nempe (pro casu commensurabilitatis, unde per superiora generaliter patet) $k = \frac{\nu}{\mu}$, $a = \frac{a'u}{N}$, $P =$

$\frac{P'u}{N}$, et $x = \frac{n}{m}$, (denotantibus, a' , N , P' , ν , μ , n , m

integros); erit $\frac{a}{ku} = \frac{a'u}{N} : \frac{\nu u}{\mu} = \frac{a'\mu}{N\nu}$; adeoque si

$(\frac{a}{ku} . u)^x = \frac{P}{ku} . u$, erit $(\frac{a'\mu}{N\nu} . u)^n = (\frac{P'\mu}{N\nu} . u)^m$,

seu $(\frac{a'\mu}{N\nu})^n . u = (\frac{P'\mu}{N\nu})^m . u$; nempe pro $n=2$ fie-

ret schema; $\frac{N\nu . u}{N\nu} = u = 1$, $\frac{a'\mu . u}{N\nu} = \frac{a}{ku} . u$, $\frac{N\nu . a'\mu u}{(N\nu)^2}$

$= \frac{a'\mu}{N\nu} . u$, et factum est $(\frac{a'\mu}{N\nu})^2 . u$. Pariter patet

schema idem manere, nonnisi $U=1$ in locum ipsius u posito, ut sit $\frac{N\nu . U}{N\nu} = U = 1$. Est hinc $(\frac{a'\mu}{N\nu} . U)^n$

$= (\frac{P'\mu}{N\nu} . U)^m$ (pro $U=1$), adeoque $(\frac{a'\mu}{N\nu} . U)^{\frac{n}{m}} =$

$\frac{P'\mu}{N\nu} . U$, id est $(\frac{a}{ku} . U)^x = \frac{P}{ku} . U$ (quoad $U=1$).

Ex gr. Sit prius $u=1$, et $k = \frac{1}{10}$, $a = 10u$, $P = 100u$; erit $a^2 = 100u = P$, atque $\log P$ (pro $u=1$ et

basi $a) = 2u$, $\log ku = 0 - \log 10u = -1u$, quia $\log a = 1$; adeoque $\frac{\log P - \log ku}{1u - \log ku} = \frac{2u - (-1u)}{1u - (-1u)} = \frac{3u}{2u}$;

est vero $a^{\frac{3}{2}}$ (quoad $U=1$) $= \sqrt{1000\ 000\ U} = 1000\ U = 100\ u = P$.

XXXI. Si quodvis a ut $\sqrt{\quad}$ ex aliquo $\pm B$ spectetur: *realitas ipsius a* , prouti quoad $+1$ vel -1 multiplicatum per se, producat $\pm B$, *multiplicationi quoad $+1$ vel -1 innixa* dicitur; et ob determinationem hanc, (uti $\mp$, - §. 10) nova oriuntur nomina. Nempe

Unitas (pag. 31) arbitrarie $\mp$ va accipitur, et $\sqrt{-4}$ nonnisi propter multiplicationem huic hypothese innixam, caret realitate: quidsi unitas $-$ poneretur? manifesto (ut p. 35) signa aequalia darent $-$, et inaequalia darent $+$. Sit igitur fas, ea quorum *realitas* multiplicationi quoad $+1$ innititur, *realia quoad $+1$* (breviter *realia*), illa vero quorum *realitas* multiplicationi quoad -1 innixa est, *realia quoad -1* , sive *pure imaginaria* dicere. $\sqrt{-a}$ potest reale esse, si a denotet ex gr. -4 . Insigniantur *realia quoad -1* puncto subposito; ex gr. $\sqrt{-4} = \pm 2$, $\sqrt{4} = \pm 2$; atque *realia quoad -1 seorsim addita*, cum *summa realium quoad $+1$* , *connexa non commixta efficiant summam* (pag. 25) ex gr. $2+1-3=1-1$. Dicitur hoc (latius) *imaginarium*.

Quantitates imaginarias et fractos exponentes *Des Cartes* introduxit; eoque plurimum ad generalitatem elegantiamque contulit, campumque ad nova invenienda patefecit. Quem in finem, ut operationes sub velo generalitatis continuari queant, nec in quantum fieri potest, generalitas exui debeat; sequentes regulae ponuntur, multiplicationis quoque conceptu eatenus extenso (p. 35). Manent quidem etiam alioquin casus generalitatis exuendae, ubi nempe (aliis verbis) generalitas, non perfecta sed cum exceptione certa est; ex gr. ex eo quod $ba = ca$, non sequitur pro quibusvis valoribus, esse $b = c$, si nempe $a = 0$, $b = 2$, $c = 3$ (pag. 37).

1mo. Pro duobus eiusmodi factoribus, quorum neuter est summa e reali quoad $+1$ et reali quoad -1 ; multiplicatio tunc et nonnisi tunc instituitur quoad -1 , si uterque factor quoad -1 realis sit; adeoque si alteruter quoad $+1$ realis sit, multiplicatio quoad $+1$ fiat Ex gr. $2.3=6$.

2do. *Determinatio quoad realitatem*, facti et multiplicandi eadem (vel diversa) sit, prouti multiplicatoris et unitatis eadem vel diversa est (ad instar legis determinationum $\pm, =$, pag 35); $\sqrt{-9}$. $\sqrt{-9}=\pm 3. \pm 3=-3^2$, iuxta schema $-1, \pm 3; \pm 3, -3.3$. Accipi vero aut ubique $+3$ debet, aut ubique -3 ; quod de aliis quoque imaginibus $=$ libus tenendum est; at $\sqrt{4}.\sqrt{9}$ potest esse $2.\pm 3$.

3tio. Unde si in facto occurrat $\sqrt{-1}$ ut factor pluries; pro quovis pari numero factoris $= \sqrt{-1}$ ponatur -1 ; et quod hoc pacto manet aut prodit, illud per factum coefficientium multiplicatum accipiat pro facto. Si non alius coefficientis adsit, $+1$ ipsius $\sqrt{-1}$, et -1 ipsius $-\sqrt{-1}$ pro tali reputetur. Quivis factor vero ita expressus cogitur (quod fieri posse patebit), ut radicis ex -1 nulli binario altior exponens sit. Hinc $-\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=+1$. Regula 3 ex 2 prioribus fluit.

Atque iam hoc pacto diciiur *F factum expressionum E et e* (absque eo ut mentio multiplicationis respectivae quoad $+1$ aut -1 fieret); si pro quovis valore $Q'+Q$ ipsius *E*, et pro quovis valore $q'+q$ ipsius *e*, gaudeat *F* valore tali, qui sit $=$ summae omnis cuiusvis ipsorum Q' et Q per quodvis ipsorum q' et q iuxta regulas plane praescriptas multiplicatorum; nec *F* alium valorem habeat. Quo *conceptus multiplicationis* (§ 26) *extenditur*, fitque generalis primitivum conceptum continens.

Si quivis terminus quantitatis complexae *C* per quemvis alterius *c* iuxta regulas dicendas multiplicetur; demonstrabitur factorum partialium summam esse facto ex *C* et *c* aequalem.

Expressionum multarum plures valores dantur: quamobrem aequalitatis earum casus strictius determinandus est. $\sqrt{1}$ habet 2 valores, nempe $+1$ et

-1 , ita $\sqrt[3]{1}$ habet 3 valores, nempe 1, et $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$,

atque $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, seu si radix $\sqrt[3]{1}$ ex 3 dicatur

α , erunt valores 1, et $\frac{-1}{2} + \alpha:2$, ac $\frac{-1}{2} - \alpha:2$, quo-

rum quivis per regulas dictas ad 3 elevatus dat 1 (ut statim patebit). Ita pro integro m et $x^m \pm 1$

$= 0$, seu $x^m = \mp 1$, seu $x = \sqrt[m]{\mp 1}$, totidem nec plures valores dari dicetur, quorum quilibet ipsi x salva aequatione substitui potest, uti in $x^2 - 1 = 0$ quilibet valorum trium dictorum. Ita 2 valores sunt (nempe 2 et 3), quorum quivis in $x^2 - 5x + 6 = 0$ in locum ipsius x positus valorem expressionis ad 0 reducit; ubi notandum, quod si dicatur, quantitatem aliquam $Q = 2$ talem esse, cuius 5uplum 2dam potentiam senario superet, minime asseratur quidvis quod tale est, ipsi $Q =$ esse. Potest autem $x(=y$, aut $y(=x$ denotare, cuius valori ipsius x dari valorem ipsius y aequalem; $x(=)y$ vero potest significare, cuius valori cuiusvis ipsorum x, y dari valorem alterius aequalem. Ex gr.

$\sqrt[4]{1} (= \sqrt[4]{1}$, ita $1^{\frac{1}{2}} (= 1^{\frac{2}{4}}$, sed $1^{\frac{1}{2}}$ non $(=) 1^{\frac{2}{4}}$;

nam $\sqrt{1}$ habet duos valores 1 et -1 , $\sqrt[4]{1}$ vero habet 4 valores nempe ± 1 , et $\pm \sqrt{-1}$. Interim inde, quod $x(=y$ et $x(=y$, non sequitur, dari ullum valorem ipsius x valori ulli ipsius x aequalem; possunt enim valores ipsius x plane illis valoribus ipsius y aequales esse, quos y praeter valores valoribus ipsius x aequales (p. 15) habet; sed si $x(=y (=x$, tum $x(=x$. E contextu etsi aliud signum haud adoptetur, quo sensu veniat $=$

perspici potest. Radix realis insigniatur stellula sub
✓ posita.

Estque 1mo. $\sqrt{-4} = \sqrt{4} \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1} = \pm 2$
nam $2 \cdot \pm 1 = \pm 2$, (per schema 1, ± 1 ; 2, ± 2 , vel 1, 2;
 ± 1 , ± 2), Patet per 1 et 2, e quo fluit 3. Nempe per
schemata $(\pm 1)^{2n}$ pro n pari est $+1$, pro impari
est -1 , ac $(\pm 1)^{2n} \cdot \pm 1$ pro n pari est 1 , pro n im-
pari -1 . Sit factum f e factoribus realibus, hoc
accedentibus quotvis factoribus $\sqrt{-1}$ manet, nisi
quod si unus tantum sit (ubivis), in $\pm f$, per adhuc
unum in $-f$, tum in $\mp f$ dein in $\pm f$ & varietur. $\sqrt{-4}$.
 $\sqrt{-9} (=) \sqrt{4} \sqrt{-1} \sqrt{9} \sqrt{-1}$, (per 1, 2, 3,) $= -1$.
 $\sqrt{4 \cdot 9} = \pm \sqrt{4 \cdot 9}$, quia $\sqrt{4 \cdot 9} = \pm 6$, et $-1 \cdot \pm 6 = \mp 6$;
 $\sqrt{-4} \sqrt{9} = \sqrt{4} \sqrt{-1} \sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9} \sqrt{-1} = \pm 6$.

Imo si $a = -4$ sit, etiam tum $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \sqrt{-1}$
 $= \sqrt{(-4)} \sqrt{-1} = \sqrt{4} \sqrt{-1} \sqrt{-1} = \sqrt{4}$. Unde a, b
qualiavis realia denotent, est $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$; at-
que de quotvis ad uno plura concludere fas est.

* 2do. Sed valet idem etiam generaliter: nempe
denotante P $\times$ vum, exprimitur radix imaginaria ex

P , generaliter (pro integro n) per $\sqrt[2n]{-P}$; atque
 $\sqrt[2n]{-P} (=) \sqrt[2n]{P} \sqrt[2n]{-1}$. Potest enim quivis valor

ipsius $\sqrt[2n]{-1}$ per $a + b \sqrt{-1}$ exprimi, denotanti-
bus a, b realia (haud excluso 0); quod breviter
huc adnectere fas sit (post Trig. facile intelligendum)

* Est $(\cos a + \sqrt{-1} \sin a)^2 = (\cos a)^2 + 2 \cos a \sin a \sqrt{-1} - (\sin a)^2 = \cos 2a + \sqrt{-1} \sin 2a$; atque si $\cos ma + \sqrt{-1} \sin ma$ per $\cos a + \sqrt{-1} \sin a$ multiplicetur,
fit $\cos ma \cos a + \sqrt{-1} \sin ma \cos a + \sqrt{-1} \cos ma \sin a - \sin ma \sin a = \cos (m+1)a + \sqrt{-1} \sin (m+1)a$;
seu (pro quovis integro n) $\cos a + \sqrt{-1} \sin a = (\cos \frac{\alpha}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{\alpha}{n})^n$; (nam $\alpha = \frac{n \cdot a}{n}$).

Ponatur iam prius $1 = \cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha$; fieri hoc potest, si $\sin \alpha = 0$, et $\cos \alpha = 1$; quod fit si $\alpha = \mu 2\pi$ (pro integro μ , haud excluso 0, et $\pi =$ dimidiae peripheriae pro radio 1); substituendo itaque ipsi μ integros $0, 1, \dots, n-1$, exhibebit $\cos \frac{2\mu\pi}{n}$

$+ \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2\mu\pi}{n}$ radices n ti gradus ipsius 1, numero n .

Ita poni potest $\cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha = -1$, pro $\cos \alpha = -1$ et $\sin \alpha = 0$; quod fit pro $\alpha = 2\mu\pi + \pi$; adeoque substituendo ipsi μ hic quoque $0, 1, 2, \dots, n-1$ prodibunt ipsius -1 radices gradus n ti numero n ; erunt vero manifesto duae tantum radices ipsius 1 reales pro n pari, et una pro impari, ipsius -1 vero una realis pro n impari, omnes aliae radices vero ipsius ± 1 erunt sub formam dictam $a + b\sqrt{-1}$ venientes; nam terminus prior in expressione utraque reale est, alter vero factum e reali in $\sqrt{-1}$ est.

Nulla vero est, radicum dictarum ipsius ± 1 ulli alii earundem plane aequalis, quamvis in paria (a signis abstrahendo aequalia) dispesci possint. Sit nimirum n prius par ex gr. 6, tum sit impar ex gr.

5; erit $\frac{\alpha}{n}$ pro casu 1mo, $0, \frac{1}{6} \cdot 2\pi, \frac{2}{6} \cdot 2\pi, \frac{3}{6} \cdot 2\pi,$

$\frac{4}{6} \cdot 2\pi, \frac{5}{6} \cdot 2\pi$; pro 2do vero, $0, \frac{1}{5} \cdot 2\pi, \frac{2}{5} \cdot 2\pi,$

$\frac{3}{5} \cdot 2\pi, \frac{4}{5} \cdot 2\pi$; in casu primo est $n-1=5$, atque

$\frac{5}{6} \cdot 2\pi + \frac{1}{6} \cdot 2\pi = 2\pi$, ita $\frac{4}{6} \cdot 2\pi + \frac{2}{6} \cdot 2\pi = 2\pi$, et

ita si numerus par n quantusvis esset, a dictis extremis aequidistantium summa est toti peripheriae aequalis; usque quo ad medium perveniatur,

(uti hic $\frac{3}{6} \cdot 2\pi$ est) qui semper $= \pi$ est. Si n im-

par sit quoque, idem est, praeterquam quod ibi medius non detur. Sunt vero (in Trig.) sinus arcuum quorum summa = toti peripheriae, oppositi (alioquin aequales); ita $\cos 0 = 1$ et $\cos \pi = -1$, in casu primo sunt oppositi; et in omni casu arcu a 0 ultra π crescente, utrinque aequidistantes efficere 2π facile patet, adeoque manifestum est omnes radices differre. Plures vero esse nequeunt nam infra probabitur x , ut $x^n + \beta = 0$ sit, nonnisi n valores habere.

Exempla Pro $n=3$, et $r=\sqrt[3]{3}$, adeoque $\sqrt[3]{-3}$

$=\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{-1}=\pm r$; erunt valores ipsius $\sqrt[3]{1}$ sequi: 1, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}r$, $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}r$, quorum quivis iuxta datas regulas multiplicando elevatus producit 1. valores ipsius $\sqrt[3]{-1}$ vero sunt -1 , $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}r$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}r$. Ita valores ipsius $\sqrt[4]{1}$ sunt 1, -1 , $+\sqrt[4]{-1}$, $-\sqrt[4]{-1}$, (id est ± 1 et $\pm i$) valores ipsius $\sqrt[4]{-1}$ autem sunt $+\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}i$ et $-\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}i$. Pro quovis integro n sinus cosinusque adeoque radices approximando (quam proxime) exhiberi possunt.

Hinc si $\sqrt[m]{P}$ sit p ; erit $\sqrt[m]{-P} (=) p(a + b\sqrt[m]{-1})$.

Erit enim $[p(a + b\sqrt[m]{-1})]^m = p^m(a + b\sqrt[m]{-1})^m = P \cdot -1 = -P$. Namque $p^2(a + b\sqrt{-1})^2 = (ap + pb\sqrt{-1})^2$, peracto calculo patet. Si vero de μ ta potentia valet, de $(\mu+1)$ ta quoque valet: nempe tum $p^\mu(a + b\sqrt{-1})^\mu = (ap + pb\sqrt{-1})^\mu$; seu brevius

$p^\mu (A+B\sqrt{-1})=A'p^\mu + p^\mu B'\sqrt{-1}$; nimirum
 $(a+b\sqrt{-1})^\mu$ manifesto nonnisi e factoribus $a, b,$
 $\sqrt{-1}$ coaluit, ubi $\sqrt{-1}$ in nullo termino ut fa-
 ctor his manet (per 3), adest praeterea p in quo-
 vis termino; et quovis per quemvis multiplicato,
 exponens ipsius p (prius = exponenti elevationis 2)
 semper uno crescit simul [cum hoc. Unde etiam
 patet $A+B\sqrt{-1}$ esse $= A'+B'\sqrt{-1}$, adeoque
 reale = reali, et imaginarium imaginario; et hinc
 $A=A'$, et $B=B'$. Conseq. etiam $p^{\mu+1}(A+B\sqrt{-1})$
 $(a+b\sqrt{-1})=(A'p^\mu + B'p^\mu\sqrt{-1})(ap + pb\sqrt{-1})$;
 seu $p^{\mu+1}(Aa + Ab\sqrt{-1} + aB\sqrt{-1} - Bb) = p^{\mu+1}$
 $A'a + p^{\mu+1} A'b\sqrt{-1} + p^{\mu+1} aB'\sqrt{-1} - p^{\mu+1}$
 Bb . Est igitur etiam $(p\sqrt{-1})^m = -P$, et $\sqrt{-1}P =$
 $\sqrt{-1}P\sqrt{-1}$.

$$\text{Ita } \sqrt{-1}P \cdot \sqrt{-1}Q = \sqrt{-1}P \cdot \sqrt{-1}Q = \sqrt{-1}PQ.$$

Nam si $\sqrt{-1}P \cdot \sqrt{-1}Q$ per $a+b\sqrt{-1}$, et $\sqrt{-1}Q$ per
 $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ exprimi possit; erit $(a+b\sqrt{-1})^m$
 $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^m = (a\alpha + b\alpha\sqrt{-1} + a\beta\sqrt{-1} - \beta b)^m$.
 Est enim hoc manifestum pro $m=2$ peracto calcu-
 lo; valetque de quovis exponente $\mu+1$ si de μ
 valet. Sit enim $(a+b\sqrt{-1})^\mu = A+B\sqrt{-1}$, et
 $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu = A'+B'\sqrt{-1}$, atque $[(a+b\sqrt{-1})$
 $(\alpha+\beta\sqrt{-1})]^\mu = A''+B''\sqrt{-1}$, (patet nempe in
 elevatione ista, ut supra, praeter reale nonnisi
 tale manere, cuius unus factor realis alter $\sqrt{-1}$
 est). Erit (per hyp) $AA' + AB'\sqrt{-1} + A'B\sqrt{-1}$
 $- BB' = A'' + B''\sqrt{-1}$; adeoque partes reales, uti
 partes imaginariae utrinque aequales erunt; nem-
 pe $AA' - BB' = A''$, et $A'B + AB' = B''$. Multiplicentur

iam $A+B\sqrt{-1}$ per $a+b\sqrt{-1}$, ut prodeat $(a+b\sqrt{-1})^{\mu+1}$, et multiplicetur $A'+B'\sqrt{-1}$ per $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, ut prodeat $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\mu+1}$, ac multiplicentur haec 2 facta in se invicem; atque multiplicetur etiam $A''+B''\sqrt{-1}$ per $(a+b\sqrt{-1})(\alpha+\beta\sqrt{-1})$, ut prodeat huius potentia $(\mu+1)$ ta; et substituantur ipsis A'' , B'' valores supra dicti; calculo peracto, terminos terminis singillatim aequales esse patebit.

Potest vero de quotvis ad uno plura pariter concludi; ut $\sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}.\sqrt[n]{C} \dots$ sit $=\sqrt[n]{ABC \dots}$ (etsi imaginaria adfuerint).

Patet vero $\sqrt[m]{-P}.\sqrt[m]{Q}$ esse $(=)\sqrt[m]{-PQ}$. Nam $\sqrt[m]{-PQ}$ habet m valores; $\sqrt[m]{-P}$ seu $\sqrt[m]{P}.\sqrt[m]{-1}$ item m valores habet, qui per quemvis valorem x ipsius $\sqrt[m]{Q}$ multiplicati dant m valores, quorum quivis ad m elevatus $= -PQ$; neque si per aliud x fiat multiplicatio, ullus alius valor prodire potest; quia tum $-PQ$ plures numero m radices haberet. Aliud est, si id tantum constet, esse $z(=\sqrt[m]{P})$, et $y(=\sqrt[m]{Q})$, tum sequitur tantum $zy(=\sqrt[m]{PQ})$.

3tio. Atque porro si $\sqrt[m]{a}=x$, est $x^m(=a)$, adeoque $x^{mn}=a^n$; conseq. $x(=)$ sed non $(=)\sqrt[mn]{a^n}$; nam x^m ponitur n ies ut factor in a^n (id est n ies posito a), et x ipsum ponitur mn ies; adeoque x adest inter valores ipsius $\sqrt[mn]{a^n}$, sed hoc habet valores numero mn , x vero nonnisi m valores habet. Patet etiam esse $x=\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}}$; ita $x^n=\sqrt[n]{a^n}$, adeoque $x=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^n}}$. Unde $\sqrt[n]{\sqrt[m]{-1}}(=)\sqrt[mn]{-1}$.

nempe $\sqrt[5]{\sqrt{-1}}$ unum valorem $= \sqrt{-1}$ habet.

Ita $\sqrt[4]{\sqrt{-1}}$ seu $(-1)^{\frac{1}{2}} (= \text{sed non } (=) (-1)^{\frac{2}{4}} (\text{seu } \sqrt[4]{1}))$; valores nimirum ipsius $\sqrt{-1}$ sunt $+1$,

-1 , qui inter ipsius $(-1)^{\frac{2}{4}}$, 4 valores, $1, -1, +1, -1$ adsunt; sed hic praeter illos duo adhuc sunt.

Non tamen hoc pacto reale ex imaginario fiet: ne-

que enim scribitur $(-1)^{\frac{1}{2}} (=) (-1)^{\frac{2}{4}}$, uti nec $1^{\frac{1}{2}}$

$(=) 1^{\frac{2}{4}}$ scribi potest; sed scribitur tantum $(-1)^{\frac{1}{2}}$

$(= (-1)^{\frac{2}{4}})$.

* 4to Quoad elevationem imaginariorum, quaestio ad $\sqrt[2n]{-1}$ redit. Est $2n$ aut potentia ipsius 2 integra, aut factum e tali et numero impari; nempe si non formae $2.2 \dots 2$ est, aliquem factorem imparem esse oportet.

$\sqrt[2p]{-1}$ nonnisi ad $m.2^p$ elevatum dat reale, et quidem $+1$ pro m pari, -1 pro m impari.

Nam $\sqrt[2p]{-1}$ est ipsum -1 praeposito p ies signo $\sqrt[2p]{}$; elevetur hoc ad 2; delebitur unum $\sqrt[2p]{}$, et si quid maneat, item ad 2 elevato, item unum $\sqrt[2p]{}$ delebitur: atque demum omnia $\sqrt[2p]{}$ (quae numero p sunt) nonnisi operatione p ies facta delebuntur; prodibitque -1 ; est vero tum tota prior expressio ad 2^p elevata. Si vero idem ad $2^p + 1$ elevetur,

prodibit $-1. (\sqrt[2p]{-1})^1$, si ad $2^p + 2$ elevetur, fiet

$-1. (\sqrt[2p]{-1})^2$, et ita porro dum ad $2^p + 2p$ eleva-

tum, fit $-1 (\sqrt[2^p]{-1})^{2^p} = -1$, $-1 = +1$. Ita elevando ad 3.2^p prodit $-1. -1. -1 = -1$; atque continuando alternatim prodeunt -1 et $+1$, prouti coëfficiens ipsius 2^p impar aut par erit; pro aliis exponentibus elevationis autem signum $\sqrt[2^p]{-1}$ cum exponente pari ex -1 haud delebitur.

Si vero m sit impar; tum $\sqrt[2^p]{-1} = \sqrt[2^p]{\sqrt[2^p]{-1}} = \sqrt[2^p]{-1}$, nam unus valor ipsius $\sqrt[2^p]{-1}$ est -1 ; adeoque si $\sqrt[2^p]{-1}$ ad 2^p elevetur, gaudebit uno valore reali.

Ex gr. $(\sqrt[2]{-1})^2 = -1$; $(\sqrt[2^2]{-1})^2 = (\sqrt[2]{\sqrt[2]{-1}})^2 = \sqrt[2]{-1}$; $\sqrt[2^3]{-1} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{-1}} = \sqrt[2]{-1}$, adeoque $(\sqrt[2^3]{-1})^2 = -1$; $(\sqrt[2^3]{-1})^2 = (\sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{-1}}})^2 = \sqrt[2]{-1}$; $(\sqrt[2^3]{-1})^2 = -1$; et ita porro, exponenti radicali semper binarium addendo, et elevando ad 2, alternatim prodibunt imaginarium et unus valor realis.

5to Etiam si $p, q, r \dots$ potentiae integrae fuerint ipsius 2, et $p < q < r \dots$ adeoque $q = p'p$, $r = q'q$ & $\dots$ (p', q' , integras potentias ipsius 2 denotantibus): $\sqrt[p]{-1} \cdot \sqrt[q]{-1} \cdot \sqrt[r]{-1} \dots$ nullum reale dare potest.

Sit enim $\sqrt[p]{-1} \cdot \sqrt[p p']{-1} = x$; erit $x^p = -1 \cdot \sqrt[p']{-1}$; nam $x^p = (\sqrt[p]{-1} \cdot \sqrt[p p']{-1})^p = (\sqrt[p]{-1})^p \cdot (\sqrt[p p']{-1})^p$. Est porro $(x^p)^{p'} = x^{p p'} = (-1 \cdot \sqrt[p']{-1})^{p'} = (-1)^{p'} \cdot -1 = +1 \cdot -1 = -1$, (nam p' est numerus par); itaque $x = \sqrt[p p']{-1}$ est imaginarium; nam $p p'$ est par. Si vero de binis factoribus valet, valet

de tribus, et ita de quotvis ad uno plures ascendere licet. Si enim novus $\sqrt[r]{-1}$ accedat; erit (substituendo) $x \sqrt[r]{-1} = \sqrt[r]{-1} \cdot \sqrt[r]{-1} = \sqrt[r]{-1} \cdot \sqrt[r]{-1} = \sqrt[r]{-1}$; sit hoc y , erit $y \sqrt[r]{-1} = -1 \cdot \sqrt[r]{-1} = -1$, et elevando ad q' erit $y \sqrt[r]{-1}^{q'} = -1 \cdot \sqrt[r]{-1}^{q'} = -1$, atque $y = \sqrt[r]{-1}^{q'}$ item imaginarium est.

* 6to. Radices ipsius -1 exponentis 2^n (pro quovis integro n) eadem quidem cum iis, quas formula superior pro hoc exponente dat, sed alia via formaque prodeunt.

Paulo inferius tradita aequatione quadratica facile perspicui potest. Occurrunt nempe expressiones formae $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, quod simplicius redditur modo sequi. (et ad repetitionem evitandam postaequ. quadraticam citabitur). Si ponatur $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x + \sqrt{z}}$, atque $a = x + z$; demonstrabitur, tam x quam z habere valorem, ut substituendo, aequationi utrique satisfiat; valores quoque statim prodituros tales esse patebit. E prima aequ. sequitur (elevando ad 2); $a + \sqrt{b} = x + z + 2\sqrt{xz}$, et subtrahendo $a = x + z$, fiet $\sqrt{b} = 2\sqrt{xz}$, et hinc $b = 4xz$, et hinc $x = \frac{b}{4z} = a - z$; (quia $a = x + z$); unde $b = 4az - 4z^2$; et hinc $z^2 - az + \frac{b}{4} = 0$, adeoque $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{b}{4}\right)} = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}$, atque cum $x = a - z$ sit, $\sqrt{x + \sqrt{z}}$ quoque datur.

Applicatur hoc pro scopo praesente sic: $\sqrt[4]{-1} = \sqrt{\sqrt{-1}} = \sqrt{0 + \sqrt{-1}}$, ubi $b = -1$, et $a = 0$; adeoque $\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2} = \frac{1}{2} = z$, et $x = a - z = -\frac{1}{2}$,

atque $\sqrt{x} + \sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$; ita $\sqrt{(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})}$ hoc

pacto prodit $= \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})} + \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

$\sqrt{\frac{1}{2}})\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$. Unde si ulterius quoque

continuetur; lex formationis perspicitur, facile de-

monstranda. $\sqrt{-1}$ erit $\sqrt{[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$\sqrt{\frac{1}{2}})] + \sqrt{[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})}}$

$\sqrt{-1}$; nimirum quaevis radix exponentis 2^n ex -1 , constat ex 2 terminis alioquin aequalibus per $+$ connexis, praeterquam quod posteriori adnec-

titur ut factor $\sqrt{-1}$, atque post illud $\frac{1}{2}$ quod primum signum $\sqrt$ excipit, in priore termino signum $+$ in posteriore signum $-$ est; semper autem dum uno altius ascenditur, in utroque termino, ultimo $\frac{1}{2}$, additur $+$ $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$, post quodvis signum

novum $\sqrt$ (praeter ultimum) in quovis terminorum, (prioris posteriorisve) parentesi nova interi-

us posita; ita ut in $\sqrt{-1}$ sint in quovis amborum terminorum signa $\sqrt$ (excepto factore $\sqrt{-1}$) numero $n-1$; nempe pro $n=2$ est 1, et semper dum n uno crescit, unum novum signum $\sqrt$ in utroque accedit. Notandum vero est, quodvis $\sqrt$ duos valores habere, quorum quemvis accipere licet, et nonnisi tunc valores aequales accipiendos esse, si aequalibus imaginibus praefixa sint. Ex gr. in ultima expressione pro exponente 2^4 , (pro quo 32 va-

lores sunt), $\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}$ habet 4 valo-

res, nam uterque valor ipsius $\sqrt{\frac{1}{2}}$ combinatur cum utroque valore signi $\sqrt{}$ prioris; at pro quovis casu valor iste in termino priore, et posteriore ubi signo contrario afficitur, idem esse debet; interim in termino priore signum primum $\sqrt{}$ numerum valorum item per 2 multiplicat, et numerum hunc item 2 signa $\sqrt{}$ in posteriore (primum nempe et ultimum) item per 2.2 multiplicat; ut numerus valorum fiat $2.2.2.2.2=32$. Facile vero pa-

2^n

tet, quod si formula dicta pro $\sqrt{-1}$ elevetur ad

2^{n-1}

2, ut prodeat $\sqrt{-1}$, deleatur in termino utroque ad laevam 1 signum $\sqrt{}$ (ut statim ostendetur), operatione eadem 2da deleatur item unum $\sqrt{}$ in utroque ad laevam; et ita porro, donec $(n-2)$ ta operatione $n-2$ signis $\sqrt{}$ deletis, maneat $\sqrt{\frac{1}{2}}$

$+ \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-1}$, quo item ad 2 elevato prodit

$\sqrt{-1}$, et hoc ad 2 elevato, operatione nta demum prodit -1 .

Si nempe u nominetur generaliter quod post 2dum signum $\sqrt{}$ in primo termino est; erit formula

sequ. $\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{u}\right)} + \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{u}\right)} \cdot \sqrt{-1}$

-1 ; et hoc ad 2 elevatum est $\sqrt{u+2}\sqrt{\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}$

$u\right)} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{u} + \sqrt{(1-u)} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$

$\sqrt{\left(\frac{1}{2} \dots\right)} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2} \dots\right)}}$, quia $u =$

$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\dots\right)}$. Ubi patet unum signum radi-

cale ad laevam in utroque termino deleri, exponente ipsius 2 in signo radicali unitate imminu-

$2n$ $2n-1$

to; nempe ex $\sqrt[2n]{-1}$ facto $\sqrt[2n-1]{-1}$ et ita porro, donec operatione *nies* facta, -1 prodeat.

7^{mo} Radix igitur cuiusvis exponentis parisi m e quocunque $-vo$ etiam, sub formam $a + b\sqrt[2m]{-1}$ venit (p. 108); sed quaeritur num summa quantitaturn, quae sub hanc formam veniunt, aut haec per reale, aut per eiusdem formae quantitatem multiplicata, aut divisa, imo etiam $(a + b\sqrt[2m]{-1})^q$ sub eandem formam veniat? Quamobrem de quantitaturn complexarurn, quae terminis talibus quoque gaudere possunt, additione, subtractione, multiplicatione, et divisione agere convenit. Notandum vero est, quantitatem pure imaginariam nonnisi determinatione dicta, qua afficitur (XXXI) a reali differre, uti ± 4 a -4 , adeoque omnes in intuitu exhiberi; nec scientiam, quae praecisione evidentiaque gloriatur, meris imaginibus nullo originali gaudentibus contentam esse posse. Vide mox dum $\sqrt[2m]{-1}$ etiam in exponentem ascendit.

XXXII. Summa totalis est, summa realium connexa cum summa pure imaginariorum (p. 105); summa realium est, illud reale $\pm$ vel $-$ quo summae realium $\pm$ vorum et summae realium $-$ vorum alterutrum superat alterum, aut 0 si aequales sint; summa pure imaginariorum pariter est 0 si aequale sit $\pm$ et $-$, aut illud quo summae $\pm$ vorum et summae $-$ vorum alterutrum alterum superat (p. 25). Regula additionis est:

Pro quovis pari terminorum praeter coefficientes aequalium (id est factore communi gaudentium), scribatur factor eorum communis, cum coefficiente $=$ li summae coefficientium: summa omnium terminorum hoc modo prodeuntium, necnon terminorum reliquorum, erit $=$ summae omnium priorum terminorum. Si inter hos terminos quoque adsint termini factore communi gaudentes, ope-

ratio toties quoties repeti poterit, donec summa quaesita forma simplicissima exhibeatur.

Quod hoc pactor summae quaesitae aequale prodeat, patet sic. Sint prius tantum realia.

1mo Valet de 2 terminis regula. Sint enim $\alpha c + \beta c$, aut $-\alpha c - \beta c$, aut $\alpha c - \beta c$, (neque alius casus datur); erit c aut $\mp$ aut $\pm$, pariter α , et pariter β ; sint (pro α' , β' , n integris $\mp$ vis) $\alpha = \pm \frac{\alpha'}{n}$, $\beta = \pm$

$\frac{\beta'}{n}$, et $\frac{c}{n} = u$. Percurrendo casus singulos, pro-

dibit per regulam pro casu 1mo $(\alpha + \beta)c$ pro 2do $(-\alpha - \beta)c$, pro 3tio $(\alpha - \beta)c$; summa vera quoque eadem erit; ex gr. pro $\alpha \mp$ vo et $\beta \pm$ vo; erit $\alpha c = \alpha' u$, $\beta c = -\beta' u$, atque $\alpha c + \beta c = \alpha' u - \beta' u = (\alpha' - \beta')u = \frac{(\alpha' - \beta')c}{n} = (\frac{\alpha'}{n} - \frac{\beta'}{n})c = (\alpha + \beta)c$. Ita reliqui casus patent.

Si vero $\frac{\alpha'}{n} \sim \alpha$, $\frac{\beta'}{n} \sim \beta$; tum $\frac{\alpha' \pm \beta'}{n}$
 $\sim \alpha \pm \beta$, et $\frac{(\alpha' \pm \beta')c}{n} \sim (\alpha \pm \beta)c$.

2do Si vero certorum quotvis terminorum summa S iuxta regulam vera prodierit, atque accedat novum par terminorum factore communi gaudentium, quorum summa sit s ; erit summa prius additorum simul cum novo pari, ipsi $S + s$ aequalis.

Sit enim in prius additis summa omnium $\mp$ vorum A , et $-B$ sit summa $\mp$ vorum in iis; in S vero sit a summa $\mp$ vorum et $-b$ summa $\mp$ vorum; atque novum par sit ex gr. (pro $k \mp$ vo) $2k - k = k$. Aut erit $A = B$, aut $A = B + B'$ aut $A + A' = B$ (pro $A, B, A', B' \mp$ vis).

Si $A = B$, etiam $a = b$; quia $A - B = a - b$ (per hyp); sed $A - B = 0$, ergo et $a - b = 0$, quod nisi $a = b$ sit, esse nequit.

Si $A > B$, et $A + A' = B$; tum $A - B = A - A - A' = a - b = -A'$; adeoque b superat ipsum a quanti-

tate A' ; nempe $b = a + A'$ esse debet, ut sit $a - (a + A') = -A'$, et $a = (a + A') - A' = b - A'$.

Superius (p. 57) dictum est, demtione etiam per partes undevīs facta, prodire aequalia; quod hic tenendum est; substitutiones etiam rite fieri statim dicetnr.

Si $A = B + B'$; tum $A - B = B + B' - B = a - b$; adeoque $B' = a - b$; et hinc $a = b + B$.

Quod substitutiones factas attinet; dum ex gr. $a = b - A'$ substituitur ipsi a in $a - b$; est tum $B = A + A'$, adeoque $-B = -A - A'$, et $A - B = A - (A + A')$; ubi manifesto $-A'$ manet, (partem A ipsius B ex A demendo); unde a prodit $= b - A'$, et simul $b = a + A'$; si iam in $a - b$ ponatur in locum ipsius a valor dictus; erit $b - A' - b$, et si in locum primi b ponatur valor eius $a + A'$, erit $a + A' - A' - b$, quod demto A' ex A' erit ipsum $a - b$. Quicunque iam fuerit casus; ex gr. si $A + A' = B$; erit summa vera $A - B + k$ seu $A - A - A' + k = -A' + k$; summa iuxta regulam autem est $a - b + k = b - A' - b + k$ (quia tum $a = b - A'$) $= -A' + k$; adeoque summa iuxta regulam est summae verae aequalis. Manifesto vero de quotvis ad novum par concludere licet, donec (terminis quorum nulli duo factore communi gaudent omnibus praemissis) nullus amplius supersit. Possunt quidem demum termini prodeuntes ordine quocunque poni, cum per superius dicta summa prodeat eadem.

3tio Imo etsi imaginaria adfuerint, regula eadem valet. Exprimantur enim haec per $X, Y, Z, V \dots$, sitque $X = x + x' \sqrt{-1}$, $Y = y + y' \sqrt{-1}$ & ($x, x', y, y' \dots$ realia denotantibus) ex gr. si $X = 2 - 3\sqrt{-1}$, est $x = 2$, $x' = -3$; adeoque $\pm x'$ exprimit valores ipsius $-3\sqrt{-1}$.

Substituatur (in 1) X ipsi c ; erit pro omni casum ibidem dictorum summa iuxta regulam summae verae aequalis; notando quod ibi $\frac{c}{n} = u$

sit $= \frac{x}{n} + \frac{x'\sqrt{-1}}{n}$, ubi c aut tota (id est pars

utrumque tam realis quam imaginaria) $\pm$ esse potest, aut utrumque $-va$, aut una $\pm$ altera $-$. Singulis casibus percursis, regulam de 2 terminis $\alpha X + \beta X$ valere patet.

Si vero de quotvis et qualibusvis terminis, quorum summa iuxta regulam sit S , valeat; valebit etiamsi novum par accedat. Namque sit summa omnis realis in eousque additis A , et $-B$ summa $-vi$, ac summa omnis pure imaginarii $\pm vi$ sit I , et $-K$ sit summa $-vi$; summaque omnis realis $\pm vi$ in S sit a , et $-b$ summa realis $-vi$, imaginarii puri vero $\pm vi$ summa sit i , et $-vi$ sit $-k$ (ubi horum quodvis etiam 0 esse possit). Erit non solum $A-B=a-b$. sed etiam $I-K=i-k$ (per hyp): atque ut supra, pro quovis casuum, ubi aut $A=B$, aut $A+A'=B$, aut $A=B+B'$, erit aut $I=i$, aut $I+I'=K$, aut $I=K+K'$; quos singulos combinando regulae generalitas prodit.

Ex gr. Sit $A=B+B'$, et $K=I+I'$; erit (per superiora) $a=b+B'$, et $i=k-I'$, omnibus literis $\pm va$ denotantibus); accedat novum par ex gr. $3X-2X$; erit summa iuxta regulam $a-b+i-k \pm X$; est vero summa vera $A+x-B+I+x' \sqrt{-1}-K$; sint nunc reale x et pure imaginarium $x' \sqrt{-1}$ $\pm va$, pariter pro aliis valoribus patet. Substituendo valores ipsorum A, K, a, i in summa vera, et summa iuxta regulam; erit prior $B+B'+3x-B-2x+I+3x' \sqrt{-1}-I-I'-2x' \sqrt{-1}$, et posterior est $b+B'+x-b+k-I'+x' \sqrt{-1}-k$; atque utrumque demtis demendis, est $=B'+x+x' \sqrt{-1}-I'$.

Consequ. quum et hic semper ad novum par asurgere liceat (ut antea): evidens est, sive tantum realia, sive tantum imaginaria, sive permixta fuerint, regulam additionis valere. Imo etiam si expressioni e quotvis terminis constanti (cujus valor sit ex gr. $\pm \alpha - I$) addatur per regulam expressio, cuius valor sit ex gr. $-\beta \pm i$; prodibit summa vera $\alpha - \beta + i - I$ (denotantibus i, I pure imaginaria). Unde si expressionibus valorum aequa

lium, expressiones valorum aequalium addantur juxta regulam, aequalia prodibunt.

4to. Regula subtractionis in promptu est: nempe signis subtrahendi inversis, mutatur subtrahendus, si reale sit, in oppositum; idem fieri etiam cum imaginariis, clarum est, ex gr. — X et $+X$ opposita sunt, nam si $X = +x - x'$, erit $-X = -x + x'$; est vero $+x$ ipsius $-x$ oppositum, ita $+x'$ ipsius $-x'$; ita quotvis fuerint $X + Y \dots$ erit $-X - Y \dots$ oppositum summae realium, quae $X + Y \dots$ continet, et summae pure imaginariorum, quae in iisdem adsunt. Itaque si *subtrahendus* signis inversis alteri (*minuendo* dicto) juxta regulam addatur, *differentia* prodit.

5to. Factum vero reperitur; si multiplicandi terminus quivis per terminum quemvis multiplicatoris, ubicunque regulae (p. 106) applicari possunt, juxta illas multiplicetur; aut pro notis quantitatum generalibus, factum e dictis terminis eiusmodi omnibus ita exprimatur, ut notis generalibus quidvis substituendo verum factum exhibeatur; aut saltem legem signorum $+$, $-$ tenendo, factores post se invicem scribantur; et factores ita ordinentur, formenturque, ut factum eiusmodi quo simplicius prodeat; ac denique facta omnia partialia addantur.

Nam sint prius tantum realia; sitque unus factor $A + B$, alter vero sit C , aut $C + D$, (quodvis ipsorum A, B, C, D , sive $+$ sive $-$ denotaverit): erit factum in casu 1mo $AC + BC$, in 2do $AC + BC + AD + BD$.

Denotent enim a, b, c, d $\pm \sqrt{2}$, et sit (pro integris a', b', c', d', n) $a = \frac{a'}{n}$, $b = \frac{b'}{n}$, $c = \frac{c'}{n}$, $d = \frac{d'}{n}$

sitque ipsius A valor aut a , aut $-a$, ipsius B valor aut b aut $-b$ &c. Erunt casus sequ. $(a + b)(c + d)$, $(-a - b)(-c - d)$, $(a + b)(-c - d)$, $(a + b)(c - d)$, $(a - b)(c - d)$; nempe si in uno factore tantum c sit, $d = 0$ poni potest, et aut singuli ter-

mini $\pm$ vi erunt, aut singuli $-$ vi, aut in uno factore ambo $\pm$ vi in altero ambo $-$ vi, aut in uno uterque terminus $\pm$ vus, et in altero unus $\pm$, alter $-$, aut in utroque unus $\pm$ alter $-$. Percurrantur casus; sicubi $a-b$ est, est aut $a=b$, aut $a=b+q$, aut $b=a+r$, et ubi $c-d$ est, pariter est aut $c=d$, aut $c=d+s$, aut $d=c+t$, (ipsis q, r, s, t $\pm$ va denotantibus).

Est $(a+b)(c+d)$ iuxta regulam $ac+bc+ad+bd$

$$= \frac{a'c'}{nn} + \frac{b'c'}{nn} + \frac{a'd'}{nn} + \frac{b'd'}{nn} = \frac{a'+b'}{n} \cdot \frac{c'+d'}{n} \text{ (p.61, 52);}$$

quae est summa vera; nam $a+b = \frac{a'+b'}{n}$, et $c+d$

$$= \frac{c'+d'}{n}.$$

Si omnia $-$ va sint, manifesto idem prodit: si vero unus factor $-$ sit, idem quidem, sed $-$ vum fit.

Considerentur iam casus $(a+b)(c-d)$ casus omnes; erit pro $c=d$ factum verum 0, et factum iuxta regulam $ac-ad+bc-bd$ item $=0$.

Pro $c=d+s$, est factum verum $(a+b)s$, atque et facti iuxta regulam valor est $as+bs$; nam $ac=a(d+s)=ad+as$, ita $bc=bd+bs$; adeoque $ac-ad+bc-bd=ad-ad+bd-bd+as+bs$.

Pro $d=c+t$, factum verum est $-at-bt$, et idem valor facti iuxta regulam est; nam $-ad=-ac-at$, et $-bd=-bc-bt$; unde patet.

Si vero $(a-b)(c-d)$ fuerit: pro $a=b$ factum verum 0 est, et idem iuxta regulam fieri clarum est. Ita si $b=a+r$, vel $a=b+q$ ex gr.

Si $a=b+q$, erit factum verum $q(c-d)=qc-qd$ (per praec); iuxta regulam vero $(b+q)c-bc-(b+q)d+bd=bc+qc-bc-bd-qd+bd=qc-qd$.

Est vero per superiora factum idem, etiam permutatis factoribus, atque monomia per monomiam quoque iuxta legem signorum rite multiplicatur; idemque est, quaecunque per alteram multiplice-

tur: consequenter summa duorum terminorum realium qualiumvis, per summam 2 realium terminorum qualiumvis multiplicatum, est = summae factorum e termino utroque multiplicandi et termino utroque multiplicatoris.

Si vero de duobus terminis valet regula; valet de 3, et ita de quotvis ad uno ptura concludere licet. Denotent enim iam literae sive $\ddagger$ sive $-$; et sit a summa terminorum multiplicatoris, A summa terminorum multiplicandi; atque a' sit unus terminus multiplicatoris, reliquorum summa sit b , et b' unus terminus eorum, quorum summa est b , reliquorum summa sit c ; et c' unus terminus eorum quorum summa est c , ac reliquorum summa sit d , et ita porro usque ad terminum ultimum; ita A' sit unus terminus multiplicandi, et reliquorum summa sit B , ac B' sit unus terminus eorum, quorum summa est B , et summa reliquorum sit C & Sit ex gr. ultimus multiplicatoris terminus c , multiplicandi sit D . Erit (per praec.)

$$aA = (a' + b)A = a'A + bA, \text{ est vero}$$

$$a'A = a'(A' + B) = a'A' + a'B; \text{ et}$$

$$a'B = a'(B' + C) = a'B' + a'C, \text{ atque}$$

$$a'C = a'(C' + D) = a'C' + a'D. \text{ Itaque}$$

$$a'A = a'A' + a'B' + a'C' + a'D. \text{ Ita}$$

$$bA = (b' + c)A = b'A + cA; \text{ eritque ut prius}$$

$$b'A = b'A' + b'B' + b'C' + bD. \text{ Ita}$$

$cA = cA' + cB' + cC' + cD$. Quod cum quotvis fuerint termini, usque ad ultimum in utroque factore continuare liceat; manifesto factum summa ex factis omnibus e singulis terminis multiplicatoris per singulos multiplicandi est.

Quoad casum autem, si imaginaria adfuerint, regulam valere patet sic.

Retentis denotationibus $X, Y, \dots, Z, V, \dots$ (p.120) sed proximis haud retentis; si realium $A, B, \dots$ summa sit α ; est $AX + BX + \dots = \alpha X$. Nam $AX = A(x + x'\sqrt{-1}) = Ax + Ax'\sqrt{-1}$ (quia AX , factum iuxta definitionem denotare debet); ita $BX = Bx$

$+Bx' \sqrt{-1}$ & adeoque $AX+BX \dots = Ax+Bx \dots$
 $+Ax' \sqrt{-1} + Bx' \sqrt{-1} \dots = (A+B \dots)x + (A+B \dots)x' \sqrt{-1}$
 $= xx + ax' \sqrt{-1}$, quod (per def.) factum
 ex x et X est. Nempe si (pro integris A', B', n)
 sit $A = \frac{A'}{n}$, $B = \frac{B'}{n}$, et accipiatur $+1$ (ex gr.) pro
 valore ipsius $\sqrt{-1}$ ubique; erit $Ax' \sqrt{-1} = \frac{A'}{n}$
 $x' = A'u$. (si $x':n$ dicatur u). Unde $A'u + B'u = (A'$
 $+ B')u = (A+B)x' \sqrt{-1}$. Imo etsi $\frac{A'}{n} \sim A$, vel
 etiam $\frac{B'}{n} \sim B$; erit $\frac{A'+B'}{n} \cdot x' \sqrt{-1} \sim (A+B)$
 $x' \sqrt{-1}$; quod ad plura quoque extendi clarum
 est.

Ita $AY+BY \dots = ay+ay$; idem pariter continu-
 ari potest, quotvis post $X, Y \dots$ fuerint. Conseq.
 si quodvis ipsorum $X, Y \dots$ per quodvis ipso-
 rum $A, B \dots$ multiplicetur, prodibit $\alpha(x+y \dots)$
 $+ \alpha(x' \sqrt{-1} + y' \sqrt{-1} \dots)$. nempe factum iuxta
 definitionem.

Consideretur iam XZ ; exprimet hoc factum ex
 $x+x'$ et $y+y'$ (ubique $+1$ pro valore ipsius $\sqrt{-1}$
 -1 sumendo, posset ubique -1 sumi). Per def.
 multiplicationis, XZ denotabit $xz+xz'+zx'+(x'z$
 $= -x'z')$; nempe $x' \sqrt{-1} \cdot z' \sqrt{-1} = -x'z'$ (p.106)

Si ipsius $x', y' \dots$ terminus quivis per termi-
 num quemvis ipsius $z'+v' \dots$ multiplicetur: ma-
 nifesto (ut p. 122 sequ.) factum ex $(x'+y' \dots)$ et
 $(z'+v' \dots)$ prodibit, cum omnia ibidem dicta heic
 locum habeant, nisi quod ibi quoad $+1$, hic quo-
 ad -1 fiat multiplicatio. Erit vero hoc factum
 $-x'z' - x'y' - x'v' - y'v' \dots$ Ita $(x'+y')(z'+v') =$
 $-(x'+y')(z'+v')$.

Sit iam unus factor $A+B \dots +X+Y \dots$ alter sit
 $a+b \dots +Z+V \dots$, et summa realium $A, B \dots$ sit

α , summa realium $a, b \dots$ sit β , atque summa realium in $X+Y \dots$ sit R , pure imaginariorum sit I ; et summa realium in $Z+V \dots$ sit r , pure imaginariorum sit i : multiplicatis singulis terminis unius factoris per singulos alterius; prodibit $\beta\alpha+\beta X+\beta Y \dots +\alpha Z+\alpha V \dots +Z X+Z Y \dots +V X+V Y \dots =\beta\alpha+\beta x+\beta y \dots +\beta x'+\beta y' \dots +\alpha z+\alpha v \dots +\alpha z'+\alpha v' \dots +zx'+zy' \dots +vx'+vy' \dots +xz+yz \dots +xv'+yv' \dots +[-x's'-z'y' \dots -v'x'-v'y'] = (x'+y' \dots) (z'+v' \dots)$. Quod plane factum juxta definitionem est: cum $R=x+y \dots, I=x'+y' \dots, r=z+v \dots, i=z'+v' \dots$; adeoque factum esse debet $(\alpha+x+y \dots) (\beta+z+v \dots) + (\alpha+x+y \dots) (z'+v' \dots) + (\beta+z+v \dots) (x'+y' \dots) + (x'+y' \dots) (z'+v' \dots)$; et hoc prodiisse manifestum est; nempe $(\alpha+R) (\beta+r) + (\alpha+R) i + (\beta+r) I + Ii$.

6to Divisio quantitatum complexarum fit modo sequi. E quolibet termino dividendi per quemvis divisoris diviso, prodeat quotus a , hoc a per totum divisorem multiplicatum e dividendo subtrahatur; atque illi quod in quoto prodiit, addatur semper quotus novus, quem e quovis termino differentiae novissimae per quemvis divisoris diviso reperire licet; atque novissimo quoto per totum divisorem multiplicato, et facto e novissima differentia subtracto, operatio continuetur, donec differentia aut $=0$ sit; aut si alicubi subsistere libeat, atque summa omnis quod eousque in quoto prodiit, sit q , differentia sit r , divisor sit d ,

et dividendus D ; erit $q+\frac{r}{d}=D:d$. Dicitur $\frac{r}{d}$

complementum quoti. Prodeat enim prius a , postea b , adeoque $q=a+b$; erit differentia prima $=D-da$, 2da erit $=D-da-db=D-d(a+b)=D-dq$;

adeoque complementum erit $\frac{D-dq}{d}$; est autem $q+$

$\frac{D-dq}{d} \cdot d = \frac{qd + D-dq}{d} \cdot d = D$. Quotvis adhuc post
 a, b fuerint, idem applicari patet.

Sint exempla quaedam ad multiplicationem, di-
 visionemque; in quibus et additio subtractioque
 occurrit.

7mo. $(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$; $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta - \alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$. Ita
 $(\sqrt{a+b})(\sqrt{a-b}) = a-b$; Hinc etiam $[(a+b)^2 - c^2] [c^2 - (a-b)^2] = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a-b)$, si nempe $a+b$ ipsi α , et c ipsi β in fa-
 ctore priore, tum c ipsi α et $a-b$ ipsi β in alte-
 ro, substituantur. Idem valor est = facto quod pro-
 dit multiplicatione duorum primorum peracta;
 quod inferius citabitur. Peragatur multiplicatio.

$$\frac{(a+b)^2 - c^2}{c^2 - (a-b)^2}$$

$(a+b)^2 c^2 - c^4 - (a+b)^2 (a-b)^2 + c^2 (a-b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)c^2 + c^2(a^2 - 2ab + b^2) - [(a+b)(a-b)]^2 - c^4 = 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 + 2a^2 b^2 - a^4 - b^4 - c^4$; nam $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, et $(a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2 b^2 + b^4$.

8vo Multiplicetur $\frac{a}{\alpha} + \frac{\beta\alpha b - \beta^2\alpha}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} + \frac{\alpha b - \beta\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{-1}$
 per $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ prodibit

$$\frac{\beta\alpha b - \beta^2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\alpha^2 b - \alpha\beta\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{-1}$$

+ $\frac{\beta\alpha}{\alpha} \sqrt{-1} + \frac{\beta^2\alpha b - \beta^3\alpha}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} \cdot \sqrt{-1} + \frac{\beta^2\alpha - \alpha\beta b}{\alpha^2 + \beta^2}$; quod

si termini quorum $\sqrt{-1}$ factor communis est, ad
 denominationem eandem reducantur, 3tio termino
 per α , 4to per $\alpha^2 + \beta^2$ supra et infra multiplicato,
 erit pure imaginarii summa $b\sqrt{-1}$, atque sum-
 ma terminorum reliquorum nempe 1mi 2di et ulti-
 mi = a ; adeoque factum = $a + b\sqrt{-1}$. Unde quali-
 umvis realium, et qualiumvis pure imaginariorum
 summa per $a + b\sqrt{-1}$ expressa, dividatur per sum-
 mam ipsius α summae realium et ipsius $\beta\sqrt{-1}$ sum-

mae pure imaginariorum; datur quotus, atque is multiplicandus in schemate est:

9^{no} Elevetur $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$ seu $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha$ ad 3 (p.107); erit

$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha$ multiplicatum per

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{4}\alpha^2 =$$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\alpha^2$, quo item multiplicato per

$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha^2$; prodibit

$$-\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{8}\alpha^2 - \frac{1}{8}\alpha + \frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{8}\alpha\alpha^2, \text{ quod}$$

substituendo $\sqrt{3}$ ipsi α (p.108), est $= -\frac{1}{8} + \frac{3}{8}$

$$\frac{2}{8} \cdot 3 + \frac{2}{8}\alpha + \frac{1}{8}\alpha - \frac{3}{8}\alpha = 1.$$

Dictum nimirum (p.106) est pure imaginaria quo ad -1 multiplicari.

10^{mo} Si $a\sqrt[p]{P^n} + \frac{1}{b\sqrt[q]{Q^m}}$ multiplicandum sit

per $b\sqrt[q]{Q^m} - \frac{1}{a\sqrt[p]{P^n}}$; erit factum =

$$ab\sqrt[pq]{P^{nq}Q^{mp}} = \left[\frac{1}{ab\sqrt[pq]{P^{nq}Q^{mp}}} \right] = ab P^{\frac{-nq}{pq}} Q^{\frac{-mp}{pq}}$$

(p. 89)]. Nimirum duorum factorum intermedio-

rum summa est $= 0$; et $P^{\frac{n}{p}} (= P^{\frac{nq}{pq}})$ (p. 87), ita

Q^q ($=Q^{pq}$; atque $\sqrt[p]{P^n}$ habet p valores, qui cum $\sqrt[q]{Q^m}$ combinati dant valores numero pq , qui omnes adsunt inter valores numero pq ipsius $\sqrt[pq]{P^{nq} Q^{mp}}$, neque hujus alius valor est, quia nonnisi numero pq sunt. Unde etiam regula pro talibus casibus liquet: nempe $a \sqrt[p]{P^n} \cdot b \sqrt[q]{Q^m} = ab \sqrt[pq]{P^{nq} Q^{mp}}$; quod etiam ad plures factores quotvis, exponentibus fractis ad denominationem eandem reductis, extendi patet.

11mo. Evenit etiam saepius, ut in pluribus terminis expressiones signo $\sqrt{}$ affectae primo obtutu quidem per additionem simplicius exprimi nequeant; sed transformatione aliqua hoc obtineatur. Sit ex gr. $2\sqrt{(a^2 \sqrt{b^2 c})} = a \sqrt{(b \sqrt{c})}$; est hoc $= a \sqrt{(b \sqrt{c})}$; nam quicunque valores substituantur ipsis a, b, c , est $\sqrt{b^2 c} = b \sqrt{c}$, et $2\sqrt{(a^2 \sqrt{b^2 c})} = 2a \sqrt{\sqrt{b^2 c}} = 2a \sqrt{(b \sqrt{c})}$.

In genere pro $a \sqrt[m]{\beta}$ scribi $\sqrt[m]{\alpha^m \beta}$, atque illud pro hoc potest; est nempe $\alpha = a^{\frac{m}{m}}$, et $a^{\frac{m}{m}} \cdot \beta^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\alpha^m \cdot \beta} = \sqrt[m]{\alpha^m \beta}$. Unde patet modus, *factorem signo $\sqrt{}$ praepositum introducendi, aut quantitatem, quae signo $\sqrt{}$ subest, educendi*.

12mo. Si $A \sqrt[m]{a}$ dividendum per $B \sqrt[m]{b}$ sit; erit $A \sqrt[m]{a} : B \sqrt[m]{b} = \frac{A}{B} \cdot \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$; nam $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ (p. 91); $A \sqrt[p]{P^n} : B \sqrt[q]{Q^m} = \frac{A}{B} \sqrt[pq]{\frac{P^{nq}}{Q^{mp}}}$; nam $\sqrt[p]{P^n} = \sqrt[pq]{P^{nq}}$

$$= \sqrt[pq]{P^{nq}}, \text{ et } \sqrt[q]{Q^m} = \sqrt[pq]{Q^{mp}}, \text{ atque } \frac{\sqrt[pq]{P^{nq}}}{\sqrt[pq]{Q^{mp}}} = \sqrt[pq]{\frac{P^{nq}}{Q^{mp}}}$$

13tio. Sit dividendum $x^n - 1$ per $x - 1$, (quod item saepe occurrit); erit schema operationis sequens.

$$x-1 \overline{) x^n - 1} \quad (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1)$$

$$\begin{array}{r} * \\ \hline x^{n-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^{n-1} \\ \hline -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} * \\ \hline x^{n-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^{n-2} \\ \hline -1 \end{array}$$

•

-

-

$$\begin{array}{r} x^2 \\ \hline -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} * \\ \hline x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \\ \hline -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} * \\ \hline 1 \end{array}$$

0

Nempe x^n per x^1 diviso prodit x^{n-1} ; nam (p. 90) si quantitas eadem elevata sit, in multiplicatione exponentes adduntur, in divisione subtrahitur exponentis divisoris ex exponente dividendi; multiplicando per quotum x^{n-1} , divisorem totum, omnino x^n prodit, quo subtracto x^n deletur;

adeoque in casibus similibus stellula tantum scribitur; —1. $x^{n-1} = -x^{n-1}$, quo ex —1 subtracto, (proprie $x^n - x^{n-1}$ esset ex $x^n - 1$ subtrahendum), prodit differentia $x^{n-1} - 1$; atque eadem operatione juxta regulam continuata, si n integer $\neq$ sit, aliquando manebit $x^2 - 1$, unde e schemate patet quotum esse, seriem ad dextram, et differentiam ultimam 0 esse. Ita $(x^n - a^n) : (x - a) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1}$.

14to. Sit 1 per $1 - x$ dividendum; erit schema sequens.

$$1-x \overline{) 1} \quad (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}); \text{ quod quum}$$

$$\begin{array}{r} * \\ \hline x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \\ \hline -x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} * \\ \hline x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ \hline -x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} * \\ \hline x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 \\ \hline -x^3 \end{array}$$

•

-

complementum adsit, verus quotus est (p. 126); at $1 + x + x^2 + \dots$ tunc tantum quorus est, dum complementum ~ 0 , quod fieri, si $x < 1$, statim probabitur.

Dicitur ejusmodi series convergens, cujus summa terminorum li-

$$\begin{array}{r} - \\ - \\ \hline x^{n-1} \\ * \frac{1}{x} x^n \\ \hline x^n \end{array}$$
 mite finito gaudet : seriem quae
 quantitatem finitam exprimit, ta-
 lem esse debere clarum est, ut
 valor, errore dato quovis minore
 exhiberi queat; imo eo quoque
 nitendum est, ut si apud quemvis terminum sub-
 sistere libuerit, duae quantitates quam proximae
 assignari queant, intra quas valor complementi
 cadat.

15to. E shemate hoc etiam fluit sequens. $\frac{1}{1-x}$ (sub-
 tracto complemento) est $= 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$, quod
 itaque est $= \frac{1-x^n}{1-x}$; et multiplicando utrumque per

a , est $a + ax + ax^2 + \dots + ax^{n-1} = \frac{a-ax^n}{1-x}$; dicitur

vero series, cujus quivis terminus per idem (quod
 exponens seriei audit) multiplicatus producit se-
 quentem, *geometrica*; cujus igitur si primus ter-
 minus a sit. exponens e , erit n tus terminus ae^{n-1} ;

qui si tanquam ultimus u dicatur, erit summa
 $\frac{a-ue}{1-e} = \frac{ue-a}{e-1}$; quod si $e < 1$ sit, $\sim \left(\frac{-a}{e-1} = \right.$

$\frac{a}{1-e}$); nam tunc $\frac{ue}{e-1} \sim 0$, quia $ue = ae^n$ et e^n

~ 0 si $n \sim \infty$ (ut statim patebit): unde et-
 iam $e^n a \sim 0$. Casus si $e = 1$, adeoque $ue = a$,

et $\frac{a-ue}{1-e} = \frac{0}{0}$, excipitur (p.38): quomodo reperi-

atur in ejusmodi casibus valor verus, formulae alio-
 quin generalis, infra tradetur. Facile patet esse li-
 mitem valoris formulae, dum $e \sim 1$.

Quod $e^n \sim 0$, si $e < 1$, et $n \sim \infty$, patet
 sic. Etsi denominator ipsius e numeratorem unita-
 te superet, sitque $e = \frac{h}{h+1}$, erit $e^n = \frac{h^n}{(h+1)^n}$; si $h+1$

per se nics multiplicetur, facile patet (tām e binomio statim tradendo, quam de n prius $= 2$ posito, et semper uno altius ascendendo) esse priores 2 terminos $h^n + nh^{n-1}$, et $(h+1)^n$ esse $> h^n + nh^{n-1}$; itaque $e^n < \frac{h^n}{h^n + nh^{n-1}}$ itaque et numeratorem et denominatorem per h^n dividendo, est $e^n < \frac{1}{1+n:h}$, quod ~ 0 , quia n adeoque $n \cdot \frac{1}{h} \sim \infty$.

Unde etiam supra $\frac{x^n}{1-x} \sim 0$, si $x < 1$ et $n \sim \infty$;

atque summae seriei $1+x+x^2+\dots$ limes, $\frac{1}{1-x}$ est; nam summa terminorum usque ad quemvis u est $\frac{1-ux}{1-x}$, et differentia huius ab $\frac{1}{1-x}$ est $\frac{ux}{1-x}$, quod ~ 0 .

16to. Series innumerabiles dantur, juxta legem qua termini se invicem excipiunt. Unam tamen magis obviam, de qua jam (p. 26) mentio facta est, subjungere libet. Nempe ejus formula est sequens $a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d$; ejus summa prodit, si modo sequ. sibi addatur: (dicatur summa s , ultimus nempe n us terminus $a+(n-1)d = a+nd-d$ sit U); eritque

$$a + a+d + a+2d + \dots + U = s, \text{ et } U + a+(n-2)d + a+(n-3)d + \dots + a = s \text{ atque}$$

$$(a+U)n = 2s;$$

nam summa paris post $a+U$ eadem erit; quum superius addatur d ; inferius subtrahatur, et in quovis sequente pari ips $a+U$ addatur $d-d$.

$$\text{Unde } s = \frac{(a+U)n}{2}. \text{ Exemplum. } 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.3} + \dots$$

$$\sim 1: (1 - \frac{1}{3}) = 1: \frac{2}{3} = \frac{3}{2}; 1 + 1+2 + 1+2.2$$

$$+1+3+5+\dots+(1+(n-1)2=2n-1)=\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2$$

(quae summa numerorum imparium ab 1 usque ad n inclusive est).

17mo. Dicitur $a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d$ series arithmetica n ti ordinis, si $d=0$, et omnes, vocantur series arithmeticae, quae ex hac modo sequente formantur; scilicet series cujus quilibet n tus terminus est=summae terminorum seriei ordinis n ti a primo usque ad n tum inclusive, dicitur series arithmetica ordinis $(m+1)$ ti.

Si $a=1$ sit; series ordinis 2di
 (pro $d=1$) erit 1, 3, 6, 10 ---
 (pro $d=2$) 1, 4, 9, 16 ---
 (pro $d=3$) 1, 5, 12, 22 ---

atque series ordinis 3ti
 (pro $d=1$) erit 1, 4, 10, 20 ---
 (pro $d=2$) 1, 5, 14, 30 ---
 (pro $d=3$) 1, 6, 18, 40 ---

Vocantur numeri serierum harum, priorum (quae ordinis 2di sunt) *polygonales*, et quidem numeri seriei prioris *triangulares*, sequentis *quadrangulares*, insequentis *pentagonales* et ita porro, propter quod globuli numeris illis in tales formas disponi queant. Serierum ordinis 3ti numeri vero dicuntur *pyramidales*, cum globuli seriei primae in pyramides basis triangularis, 2dae in pyramides basis quadratae, 3tiae in pyramides basis pentagonalis $\mathcal{E}$, exstrui queant; nempe si n tus terminus seriei 3ti ordinis sit, pro fundamento ponitur terminus n tus seriei ordinis 2di, e qua illa exorta est, ei superponitur terminus hujus $(n-1)$ tus et ita porro usque quo primus terminus (nempe 1) hujus seriei apicem claudat.

18vo. Erat superius $a+b$ per se multiplicatum: quaestio succurrit, quidsi adhuc semel per idem multiplicetur, aut quidsi id n ies fiat? et quid si eadem operatio cum 3 aut 4 vel pluribus terminis suscipiatur?

Si $(a+b)$ per se multiplicetur; prodit $a^2+2ab+b^2$; si $(a+b+c)$ per se multiplicetur, prodit $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, seu summa cujusvis termini ad 2 elevati, necnon duplum termini cujusvis per summam antecedentium multiplicati. Si vero hoc de summa s numero m terminorum constet; etiam de uno pluribus constat: sit enim t terminus novus; erit $(s+t)^2=s^2+2st+t^2$; in s^2 adest cujusvis terminorum priorum potentia 2da, necnon quivis terminus priorum per duplam summam antecedentium multiplicatus, cui modo accessit $2st$ et t^2 .

Ita summae terminorum quotvis potentia 3tia est = summae (cujusvis termini ad 3 elevati, necnon tripli cujusvis termini per 2dam potentiam summae antecedentium multiplicati, atque termini cujusvis ad 2 elevati per triplam summam antecedentium multiplicati). Verum enim hoc est, $a+b$ aut $a+b+c$ ad 3 elevato; et si verum de s = summae numero m terminorum, verum etiam accedente termino t est; nempe $(s+t)^3=s^3+3s^2t+3st^2+t^3$; unde ut prius patet. Altior etiam potentia quaevis ita elaborari potest: sed reliquis supersedendo

XXXIII. Expressio tantum ipsius $(a+b)^n$ quaeritur, pro quovis integro n . Ulro patet formulam simpliciores fieri, si pro $a+b$ stet $1+x$, nec difficile est ex $(a+b)$ ipsum a per a dividendo in 1 mutare, sed tum ulro patet totam quantitatem, quae operationi elevationis subest, dividendam esse, atque tum quaerere, quoties sit $>$ vel $<$ nova quantitas (nempe $(a+b)$ per a divisa) quam prior, si utraque ad n elevetur? Est $(\frac{a+b}{a})^n =$

$$\frac{(a+b)^n}{a^n}; \text{ itaque } (1+\frac{b}{a})^n \cdot a^n = (a+b)^n$$

Transformatio ista saepius in aliis casibus quoque usui erit. Simili modo quivis factor e quovis termino binomii ad exponentem elevati tolli potest. ex gr. $(\alpha^p + \beta y^q)^r = (\frac{\alpha^p}{y^q} + \beta)^r \cdot y^{rq} = (\alpha^p y^{-q})^r$

$$+\beta)^r \cdot y^{rq} ; \text{ nam } \left(\frac{\alpha^p + \beta y^q}{y^q} \right)^r \cdot y^{qr} = \frac{(\alpha^p + \beta y^q)^r}{y^{qr}}$$

$$\cdot y^{qr} = (\alpha^p + \beta y^q)^r.$$

Reperitur quidem sine hoc artificio quoque $(a+b)^n$; sed quia per se simplicior casus est, consideretur $(1+x)^n$. Est

$$(1+x)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(1+x)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$(1+x)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$(1+x)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

Ita ulterius quoque computando, animadverti possunt sequentia.

1mo. Exponens summus ipsius x est exponenti binomii aequalis, et in quovis sequente termino uno decrescit, usquequo in ultimo $x^0 = 1$ fiat. Unde etiam patet idem de quovis exponente uno altiore; nam si talis series per $1+x$ multiplicetur, 1 exponentem ipsius x non, x vero quemvis uno augebit.

2do. In quavis harum serierum sunt coefficientes a primo ad dextram usque ad ultimum, et ab ultimo ad laevam usque ad primum iidem.

3tio. Sint in serie tali per $1+x$ multiplicanda, $\alpha x^m + \beta x^{m-1}$ duo termini quivis proximi; erit αx^m . $1 = \alpha x^m$, nec ullus alius terminus per 1 multiplicatus x^m producet, $\beta x^{m-1} x$ vero $= \beta x^m$, neque ullus alius terminus per x multiplicatus x^m producet: itaque coefficientis ipsius x^m in facto erit $(\alpha + \beta)$.

4to. Coefficientis termini primi est 1, coeff. 2di est coeff. 1mi per exponentem quem x in hoc habet multiplicatus, at coeff. 2di per exponentem quem x in hoc habet multiplicatus, est 2tuplum coefficientis 3tii; et ita porro in omnibus his casibus, coefficientis termini m ti per exponentem quem x in termino m to habet multiplicatus, est m tuplum coefficientis $(m+1)$ ti. Unde si hoc de $(1+x)^{n-1}$ valeat; erit $(1+x)^{n-1} = x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

$x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3} x^{n-4} \dots + x^0$; nimirum duplum ejus quod quaeritur, per 2 dividi debet, utriusque per 3, in genere m uplum per m .

Si vero de $(1+x)^{n-1}$ valet, valet etiam de $(1+x)^{n-1} \cdot (1+x) = (1+x)^n$. Invertatur enim series, ut simplicius fiat; in casibus elaboratis nimirum series coefficientium eadem antrosum et retrorsum est: erit

$(1+x)^{n-1} = 1 + Ix + IIx^2 + IIIx^3 \dots$, si I denotet $n-1$,

II vero $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$, III $= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ et ita

porro in ∞ ; nam sicubi ex n subtrahitur n , factor is fit $=0$ in numeratore, adeoque cum factor is juxta legem hanc semper maneat, abinde omnes termini sunt $=0$; plane antea vero, dum ipso n uno minus (nempe $n-1$) subtrahitur ex n , manet 1, fitque hoc ad exponentem $n-1$ ipsius x ; nempe exponens ipsius x est $=$ numero qui ex n ultimo subtrahitur (pro $(1+x)^{n-1}$); atque tum coefficientis est $\frac{(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \dots (n-2)(n-1)} = 1$.

Sit jam in serie ipsius $(1+x)^{n-1}$ quivis exponentis ipsius x , ex gr. sit 5 instar cujusvis; erit ipsius x^5 in serie ipsius $(1+x)^n$ coefficientis $= IV + V$ (per 3^{to}), hoc vero est $=$

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5};$$

si nimirum prioris numeratoris denominatorisque per 5 multiplicato ad denominationem eandem reducantur, et in numeratoribus factor communis $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ eximatur, atque per factorum sociorum summam $= 5 + n - 5 = n$ multiplicetur.

Ita serie ut prius ab x^{n-1} incipiente, quum sit in casibus computatis $(1+x)^{n-1} = x^{n-1} + Ix^{n-2} + IIx^{n-3}$

+III x^{n-4} +IV x^{n-5} +V x^{n-6} . . . + x^0 ; erit (cum heic exponentes ipsius x decrescant) ipsius x^{n-5} in $(1+x)^n$ coefficientens = IV+V; nam 1 nonnisi per IV x^{n-5} multiplicatum producit x^{n-5} , et x nonnisi per V x^{n-6} producit x^{n-5} ; est vero in $(1+x)^n$ terminus in quo x^{n-5} est, (5+1)^{us} ab x^n inclusive, uti antea ab 1 usque ad x^5 . Unde cum ipsi 5 numerum quemvis sufficere liceat, patet, de quavis binomii potentia uno altius aseendendo, esse coefficientes terminorum ab extremis aequidistantium aequales; atque pro quovis integro n esse $(1+x)^n =$

$$1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} x^3 \dots \text{atque si}$$

ipsi x substituatur (ex p.134) $\frac{b}{a}$, est $a^n(1 + \frac{b}{a})^n =$

$$(a+b)^n = a^n + na^n \frac{b}{a} + \frac{n(n-1)}{2} a^n \frac{b^2}{a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$$

$$a^n \frac{b^3}{a^3} \dots = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$$

$$a^{n-3}b^3 \dots$$

Patet etiam $(a+b)^n$ constare ex $n+1$ terminis; nempe praeter primum sunt n termini, donec ex n subtrahatur n .

Est quoque in quovis termino summa exponentium ipsorum a , b plane n ; et si μ , ν integri +vi sint, et $\mu + \nu = n$, in aliquo termino adest $a^\mu b^\nu$; nam terminus 1^{mus} est $a^n b^0$, ultimus vero est $a^0 b^n$, et exponens ipsius a terminatim uno decrescit ab n usque ad 0, crescente simul exponente ipsius b a 0 usque ad n .

* Sed praeter plures alias, etiam via sequente ad idem perveniri potuit. Quidnam ex $(a+b)(\beta+b)$, quid ex $(a+b)(\beta+b)(\gamma+c)$. . . fiat, ultro considerandum venit. Ut res simplicior fiat, ponatur $\alpha = \beta = \gamma$. . , imo ut adhuc simplicius sit, fiat $\alpha = 1 = \beta = \gamma$ Peracta multiplicatione, erit $(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab$, quo multiplicato per $1+c$, prodit $1+a+b+c$

$\dagger ab \dagger ac \dagger bc \dagger abc$; quod continuando facile animad-
 vertitur, primo prodire semper 1, deinde sum-
 mam singularum literarum, tum summam omnium
 ambarum, tum omnium ternarum, et ita porro.
 Unde de m literis ad $m+1$ prona conclusio fit;
 nempe 1 in novo multiplicatore dat 1 in novo
 facto, dein summam singularum m literarum, tum
 omnes ambas, quae ex m accipi possunt, dein om-
 nes ternas, postea omnes quaternas, et ita porro,
 usque ad factum ex omnibus m literis; per lite-
 ram novam multiplicando vero prodit ex 1 multi-
 plicandi, litera ipsa nova, qua accedente ad sum-
 mam singularum m literarum, omnes $m+1$ literae
 aderunt; dein e singulis m literis $a \dagger b \dagger c \dots$ per
 novam multiplicatis, omnes ambae novam literam
 continentes prodibunt; adeoque cum reliquae am-
 bae jam adsint, accedentibus his omnes ambae
 quae ex $m+1$ literis accipi possunt, aderunt in fa-
 cto; ita quaecunque combinationes omnes m lite-
 rarum, e literis numero μ constantes, per novam
 literam multiplicatae, dabunt omnes combinatio-
 nes ex $\mu+1$ literis constantes eas, quae literam no-
 vam continent; cum omnes combinationes m lite-
 rarum e μ literis constantes adsint, nec ulla ex
 $m+1$ literis combinatio ex $\mu+1$ literis constans no-
 vam literam continens datur, nisi in qua, litera
 nova, μ literas e prioribus nanciscitur. Prodibunt
 itaque omnes combinationes ex $\mu+1$ literis constan-
 tes literam novam continentes, reliquae vero quae
 praeter hanc accipi possunt, adsunt, relictas mul-
 tiplicatione per terminum priorem 1; adsunt igitur
 omnes, quae ex $m+1$ literis accipi possunt. Con-
 tinuando usque ad finem, donec $\mu = m$ fit; tum is
 terminus ultimus multiplicandi est, qui per novam
 literam multiplicatus dat combinationem omnium
 $m+1$ literarum, quae sola est, neque in multi-
 plicando adest ulterius combinatio ulla, quae per
 1 multiplicata huic accedat; estque omnino sola,
 cum ex $m+1$ literis $m+1$ literae (ab ordine ab-
 strahendo) unico modo accipi queant.

Post haec, dum de $(1+x)^n$ agitur: facilis reflexio est; casum eundem esse, si $a=b=c \dots = x$ ponatur; adeoque nonnisi numerum amborum, ternorum - - &c., quae ex n rebus accipi queunt, quaerendum esse: quod facile reperitur.

Sint nempe $a, b, c \dots$ numero n ; et ponatur post quamvis quaevis reliquarum, quae numero $n-1$ sunt; prodibunt imagines, quarum nullae duae sunt aequales, et in quarum aliqua, litera quaevis praeposita, et quaevis alii postposita adest; adeoque numerus omnium amborum simul cum permutationibus literarum; atque numerus imaginum harum est $n.(n-1)$; et e qualibet harum imaginum, (in quibus jam 2 literae sunt), si cuilibet imagini, literarum reliquarum (quae pro quavis imagine numero $n-2$ sunt) quaevis postponatur; oriuntur $n(n-1)(n-2)$ ejusmodi imagines, quarum nullae duae sunt aequales; nam imagines binarum omnes diversae sunt, adeoque etsi omnibus eadem, litera postponeretur, omnes inaequales manerent; adest quoque quaevis permutatio e 3 literis constans, inter istas imagines; nam quaevis data fuerit, in illa erit litera ejus postrema permutationi alicui e 2 literis constanti postposita; adest vero quaevis talis permutatio, quavis literarum reliquarum postposita; (nulla nimirum litera in ulla imaginum bis occurrente).

Unde ad uno plura concludere licet. Si nempe ex n literis permutationes ex m literis constantes, numero $n(n-1)(n-2) \dots (n-(m-1))$ accipi possint; erunt permutationes ex $m+1$ literis constantes numero $n(n-1) \dots (n-m)$; nam si ut antea cuivis priorum permutationum e literis m constantium quaevis reliquarum literarum, (quae pro quavis permutatione numero $n-m$ sunt) postponatur, orientur $n(n-1) \dots (n-m)$ permutationes singulae diversae, (quia diversae, ante postpositionem erant), et inter quas quaevis permutatio ex $m+1$ literis constans aderit; nam ut antea quaecunque talis permutatio detur, erit in ea, litera ejus

postrema, alicui permutationi ex m literis (talibus inter quas illa postrema non adest) constanti postposita; aderant vero omnes permutationes ex m literis constantes, et cuivis quaevis ex n literis quae in illa non adest, postposita est.

Si vero tantum de numero combinationum quaeratur, (abstrahendo a literarum earundem ordine in quavis imagine); tum manifesto cum omnes permutationes quoque adsint, toties plures imagines ex gr. ex m literis constantes erunt, quoties m literae permutari possunt; adeoque numerus imaginum per numerum permutationum dividi debet. Sunt vero duarum literarum permutationes 2 nempe ab , ba ; accedente nova, haec in quavis harum aut ante aut postponitur, aut inter reliquas; itaque 3 rerum erunt permutationes numero 2.3 , et si $m-1$ literarum sint $2.3 \dots (m-1)$ permutationes, erunt m literarum $2.3 \dots m$; nam nova litera m ta in quavis imagine m loca habet, nempe $m-1$ literarum loca intermedia sunt uno pauciora quam literae, adeoque $m-2$, quod cum locis ante et post literas efficit m ; per quod numerus prior multiplicatur.

Hinc ex n literis numerus amborum est $\frac{n.(n-1)}{2}$

numerus ternorum est $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ et ita porro. Con-

sequenter $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}x^3 \dots$ (ut antea).

Dicitur hoc *Theorema Binomiale*; cujus inventio *Paschali* tribuitur: at *Newton* primus animadvertit (exemplis pluribus obviam venientibus), idem ad exponentem quemvis etiam fractum $\frac{1}{m}$ vultumque extendi; fertur quoque, cum hoc tam cardinale in Arithmetica sit, quam *Pythagoricum* in Geometria, formulam Binomii sepulchro Newtoni incisam esse, quamvis indemonstratam reliquerit.

neque universaliter vera est, nisi $b < a$ sit. Itaque hae series pro exponente non integro considerandae veniunt: erit is aut $<$ aut > 1 , atque aut $\mp$ aut $-$.

XXXIV. Si x et e $\mp$ va fuerint, atque pro $(1 \pm x)^{\pm e}$ condatur series ea lege, ut pro $(1+x)^E$ sit primus terminus $x^0=1$, et quivis terminus (denotante μ exponentem ipsius x in eo) multiplicatus per $\frac{E-\mu}{\mu+1} \cdot x$ det sequentem (ut antea). Tum

1mo. Si $e < 1$ sit, pro $(1+x)^e$ erit series sequ. $1 + ex + \frac{e(e-1)x^2}{2} \dots$, et coefficientis e $\mp$ erit,

veluti ubique ubi exponens ipsius x impar est, et $-$ ubi exponens ipsius x par est: nam si e fractione vera integer subtrahatur, $-$ manet; adeoque ad exponentem parem factores $-$ vi numero impari erunt, et pari ad imparem.

Pro $(1-x)^e$ erit $1 - ex + \frac{e(e-1)}{2}x^2 \dots$; ubi coefficientis $-e$ $-$ est, quia e per $-x$ multiplicatur, et postea quoque omnes coefficientes $-$ vi erunt; nam ad exponentem parem potentia $\mp$ est, et numerus factorum $-$ vorum est impar, et par ad exponentem imparem ipsius $-x$.

Pro $(1+x)^{-e}$ fit $1 - ex + \frac{-e(-e-1)}{2}x^2 \dots$; ubi coefficientes ad exponentem imparem sunt $-$, et $\mp$ ad parem: nam ad imparem exponentem, factorum $-$ vorum numerus impar est, et par ad párem. Inverse est, dum tam e quam x $\mp$ est.

Pro $(1-x)^{-e}$ fiunt omnes termini $\mp$ vi; quum ad exponentem imparem potentia $-$ sit, cum numero factorum $-$ vorum impari, et hi numero pari sint ad exponentem parem.

2do. Si $e > 1$; erunt pro $(1+x)^e$ termini priores $\mp$ vi, usquequo factores coefficientis {fractio vera

f prima vice ingreditur (ex e , integris ab 1 incipiendo subtractis); et tum terminus sequens fit $-$, nam coefficienti priori accedit factor $f-1$, quod $-$ est; atque deinde termini signa alternabunt; nempe factores coefficientis sequentis duo $-vi$, et sequentis 3 $-vi$ &², ingrediuntur.

Pro $(1-x)^e$ coeff. ipsius x est $-$ propter $-x$, et ad exponentem imparem semper $-$ erit, et $+$ ad parem, eousque dum ex e ipso majus subtrahitur, et fractio vera $-va$ factores coefficientis prima vice ingreditur; abinde vero erunt vel omnes $+$ ^{vi} vel omnes $-vi$; nempe si factor $-vus$ ad exponentem imparem ipsius $-x$ nascatur, terminus is $+$ erit (propter 2 factores $-vos$), et sequens quoque ex exponente pari et numero factorum $-vorum$ pari, $+$ fiet, et ita porro. Si vero id ad exponentem parem fiat, terminus is $-$ erit, et sequens quoque e potentia impari ipsius $-x$ et numero factorum $-vorum$ pari, $-$ erit &³.

Pro $(1+x)^{-e}$ fient termini ad exponentem imparem $-vi$, et $+$ ad parem; uti pro $(1+x)^{-e}$ et $e < 1$ (in lmo)

Pro $(1-x)^{-e}$ erit coeff. ipsius x $+$, uti omnes sequentes: nam ad exponentem imparem, erit factorum $-vorum$ numerus impar, et par ad parem; uti erat pro $e < 1$ et $(1-x)^{-e}$.

3tio. Relatis omnibus casibus; facile patet, quod cujusvis serierum harum (excepto si x non < 1 est) terminus ~ 0 , et summa limitem habet.

Nam dicatur generaliter exponens E , et id per quod coefficiens multiplicatur, ut sequens prodeat, dicatur *exponens coefficientis*, id vero per quod seriei terminus multiplicatur, ut sequens prodeat, dicatur *exponens seriei*; quo pacto exponens coefficientis erit $\frac{E-\mu}{\mu+1}$, exponens seriei vero $\frac{E-\mu}{\mu+1}$. $\pm x$ (prouti $1+x$ vel $1-x$ elevatur).

Si $E \neq$ sit, sive $>$ sive < 1 sit, dicatur $-f$ prima fractio vera $-va$, quam $E - \mu$ dat; nempe si $E < 1$; pro $\mu = 0$ est $E - \mu < 1$, et pro $\mu = 1$ est $E - \mu =$ et < 1 , ita si $E > 1$, aliquando prodit fractio vera $\neq va$, et postea statim $-va$ fit. Est vero tum exponens coeff. $\frac{-f}{\mu+1} < 1$ (pro dicto μ), et postea

quivis per $\frac{-f-m}{\mu+1+m}$ exprimi potest, qui item < 1 est, quia numerator $<$ denominatore. Crescit quidem hic exponens (semper < 1), et ~ -1 ; nam sequens $= \frac{-f-m-1}{\mu+2+m}$, adeoque 2 proximi (per -1

multiplicati) per $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\alpha+1}{\beta+1}$ exprimi possunt; quibus ad denom. eandem reductis, numerator prioris manifesto est $<$, cum $\alpha < \beta$ sit: at si $\mu \sim \infty$, ipsum $\frac{E-\mu}{\mu+1} \sim -1$.

Consequ. ab illo termino, a quo exponens coeff. semper < 1 est, exponens seriei semper $< x$ est.

Interim usquequo pro $E \neq$ et > 1 , fuerit $E - \mu < 1$, si dentur termini, exponens coeff. decrescit eousque: nam sint 2 proximi $\frac{E-m}{m+1}$ et $\frac{E-m-1}{m+2}$; erit numerator uterque $\neq$, et priore $\alpha+1$ dicto, posterior α erit; adeoque pro $m+1=\beta$, est $\frac{\alpha+1}{\beta} >$

$$\frac{\alpha}{\beta+1}.$$

Si $E =$ et < 1 sit: tunc jam primus coeff. est $\frac{-f}{1}$ (pro $E = -f$); atque abinde ut prius omnia valent.

Si vero $E =$ et > 1 ; sit $E = -e$, et $x = \frac{i}{I}$ atque $I = i+k$. Decrescit tum exponens coeff. (sem-

per > 1); nam $\frac{-e-\mu}{\mu+1}$ est $> \frac{-e-\mu-1}{\mu+2}$; cetero-

quin $\frac{E-\mu}{\mu+1} \sim -1$ si $\mu \sim \infty$. Seriei ipsius exponens vero fit a certo termino incipiendo fractio vera, et quidem semper decrescens, et tendens ad limitem $\frac{-i}{I}$. Datur enim tale μ , ut $\frac{-e-\mu}{\mu+1} \cdot \frac{i}{I} <$

1 sit; fiet hoc, si $(e+\mu)i < (\mu+1)I$, seu pro certo $\nexists p$ sit $ie+i\mu+p=\mu I+I$; quod fit pro $\mu = \frac{ie+p-I}{I-i} = \frac{ie+p-i-k}{k} = \frac{ie+p-i}{k} - 1$; ubi $\nexists$ vum

p quantumvis accipere licet; adeoque si p crescere a 0 concipiatur, ubi expressio prima vice integrum $\nexists$ vum dabit, illud erit primum quaesitum μ ; atque abinde seriei exponens < 1 semper de-

crescet; nam $\frac{e+\mu}{\mu+1} > \frac{e+\mu+1}{\mu+2}$, et $\frac{-e-\mu}{\mu+1} \cdot \frac{i}{I} > \frac{-e-\mu-1}{\mu+2} \cdot \frac{i}{I}$.

In prioribus casibus itaque exponens seriei a certo termino α incipiendo semper $< x$ est; adeoque cum si $x < 1$, etsi ubique exponens $= x$ esset, $\alpha x^m \sim 0$, si $m \sim \infty$ (p.131), etiam terminus seriei ~ 0 ; atque si summa terminorum usque ad α exclusive sit α , etsi omnes termini $\nexists$ vi essent,

summa quotvis terminorum maneret $< \alpha + \frac{\alpha}{1-x}$ (p.131);

nam sequens terminus est $< \alpha x$, postea sequens $< \alpha x^2$ &c. Unde ubicunque subsistatur post α ex gr.

ad terminum t , error erit $< \frac{t}{1-x}$.

In postremo casu quoque si b sit terminus, in quo terminus seriei fractio vera f fit, deinde semper decrescens, manifesto $bf^m \sim 0$, si $m \sim \infty$; adeoque et terminus seriei ~ 0 ; atque si summa usque ad b (exclusive) β dicatur; erit sum-

ma terminorum quotvis (etsi omnia $\times$ va essent)

$< \beta + \frac{b}{1-f}$, nam terminus sequens est $< bf$, postea sequens $< bf^2$ &c.

4to. Sed gaudet etiam summa cujusvis harum serierum limite. Nam si ab aliquo saltem signo omnes termini $\times$ vel omnes $-$ sint, patet, quum crescat manens tamen certo finito minor. In omni alio casu vero (per praec) signa ab aliquo termino alternabunt: sit A summa usque ad alternantium terminum quendam $\times$ vim (hunc excludendo); et accipiantur abinde quotvis paria; erit summa cujusvis paris (cum terminus quilibet $>$ sequente sit) $\times$, adeoque A semper incrementa capit, nunquam tamen finitum supra dictum attingens; sit itaque (per p.47) limes S , et sit s summa ipsius A cum summa quotvis parium; atque sit t terminus paria addita excipiens; erit $S-s \sim o$, et $S-(s+t) = S-s-t$ quoque $\sim o$, quia $t \sim o$; adeoque s et $s+t$ utrumque $\sim S$.

5to. Inquirendum etiam; num $1+ex+\frac{e(e-1)}{2}x^2 \dots \sim (1+x)^e$, quodlibet ipsorum x, e sive $\times$ sive $-$ denotet. Sit prius $x < 1$, et $e = \frac{\pm n}{m}$ (pro n, m integris): id tantum demonstrandum erit, quod $(1+ex+\frac{e(e-1)x^2}{2} \dots)^m \sim (1+x)^{\pm n}$; nam

$$\text{tum } (1+x)^{\frac{\pm n}{m}} = 1+ex+\frac{e(e-1)x^2}{2} \dots \text{ (p. 90).}$$

Patebit statim, pro quovis reali i , quod si $1+ex+\frac{e(e-1)}{2}x^2 \dots \sim s$, et $1+ie x + \frac{(ie-1)}{2}x^2 \dots \sim S$; etiam $1+(i+1)e + \frac{[(i+1)e-1]}{2}x^2 \dots \sim$

Ss ; nempe in prima serie substituto ipsi e ubique ie pro 2da serie, $(i+1)e$ pro 3tia. Dicatur s' sum-

ma seriei prioris usque ad terminum (inclusive) in quo x^μ est, 2dae sit S' , 3tiae sit summae limes Σ , et summa usque ad x^μ (inclusive) Σ' ; prodibit s' . $S' = \Sigma' + \omega$, et $\omega \sim 0$ si $\mu \sim \infty$; atque tum $S - S' \sim 0$, $s - s' \sim 0$; adeoque $Ss - S's' \sim 0$, atque etiam $Ss - (\Sigma' + \omega)$ seu $Ss - \Sigma' - \omega \sim 0$, conseq. $Ss - \Sigma' \sim 0$; sed etiam $\Sigma - \Sigma' \sim 0$; erit igitur $\Sigma = Ss$. (p. 68 ---)

Id ergo tantum demenstrandum est, quod usque ad x^μ series 3tia rite exhibeat factum, atque ω quod post x^μ ex $S's'$ prodit, ~ 0 : tunc enim ponatur prius 1 pro i , tum 2 et ita porro usque ad m , et prodibit prius s'^2 , tum s'^3 , et ita porro usque ad s'^m ; prodibitque pro $i=m$, $1 + mex + me \frac{(me-1)}{2} x^2 \dots + \frac{me(me-1) \dots (me-\mu+1)}{1 \cdot 2 \dots \mu} x^\mu$, quod

$$\text{pro } e = \frac{n}{m} \text{ est } = 1 + \frac{mn}{m} x + \frac{mn}{m} \frac{(mn-m)}{2m} x^2 + \frac{mn}{m} \frac{(mn-m)}{2m} \frac{(mn-2m)}{3m} x^3 \dots = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 \dots =$$

$(1+x)^n$. Si vero pro e ubique $-\frac{n}{m}$ ponatur, manifesto $(1+x)^{-n}$ prodit.

Designetur hunc in finem coeff. seriei prioris tanto numero romano, quantus exponens ipsius x in illo termino est; ita in 2da et 3tia quoque eo discrimine, quod numerus romanus insigniatur in 2da uno accentu, in 3tia duobus; et consideretur quivis exponens ex gr. 5 instar omnium.

Erit $V'' = V' + IV'.I + III'.II + II'.III + I'.IV + V$; namque x^5 nonnisi e facto terminorum prodit, in quibus summa exponentium est 5, quod cum summa numerorum romanorum convenit.

$$\text{Est } V' = \frac{ie-4}{5} IV', IV' = \frac{ie-3}{4} III'; III' = \frac{ie-2}{3} II',$$

$$II' = \frac{ie-1}{2} I', I' = \frac{ie}{1}$$

$$I=e, II=\frac{e-1}{2}.I, III=\frac{e-2}{3}.II, IV=\frac{e-3}{4}.III, V=\frac{e-4}{5}.IV$$

Hinc substituendo superius in valore ipsius V'' , est

$$IV'.I = \frac{ie-3}{4}.III'.I, III'.II = \frac{ie-2}{3}.II'.II, II'.III = \frac{ie-1}{2}.I'.III, I'.IV = ie.IV, V=V$$

Consideretur porro, quod si $\frac{\alpha}{k} = \frac{\beta}{h} = u$,

atque $k+h=r$ sit; tum $\frac{\alpha+\beta}{r} = u = \frac{\alpha}{k}$ sit; nempe

$$\frac{ku}{r} + \frac{hu}{r} = \frac{(k+h)u}{r} = \frac{ru}{r} = u; \text{ adeoque } \frac{k}{r} \cdot \frac{\alpha}{k} + \frac{h}{r} \cdot \frac{\beta}{h} = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r} = \frac{\alpha+\beta}{r} = u = \frac{\alpha}{k}.$$

Erit hinc (quum $V' = \frac{ie-4}{5}.IV'$), $IV'.I = \frac{ie-3}{4}$

$$III'.I = IV'.\frac{e}{1} = \frac{e.IV'}{5} + \frac{ie-3}{5}.III'.I; \text{ nam } 1+4=5,$$

uti $k+h=r$ erat. Ita

$$III'.II = \frac{ie-2}{3}.II'.II = III'.\frac{e-1}{2}.I = \frac{e-1}{5}.III'.I + \frac{ie-2}{5},$$

$II'.II,$

$$II'.III = \frac{ie-1}{2}.I'.III = II'.\frac{e-2}{3}.II = \frac{e-2}{5}.II'.II + \frac{ie-1}{5}$$

$I'.III,$

$$I'.IV = \frac{ie}{1}.IV = I'.\frac{e-3}{4}.III = \frac{e-3}{5}.I'.III + \frac{ie}{5}.IV,$$

$$V = \frac{e-4}{5}.IV.$$

Unde pro valore ipsius V'' , e quavis linea terminos 2 posteriores accipiendo, (pro $IV'.I, III'.II, \dots$)

terminis rite dispositis, oritur schema sequ.

$$V' = \frac{ie-4}{5} IV'$$

$$IV'.I = -\frac{e}{5} IV' + \frac{ie-3}{5} .III'.I$$

$$III'.II = \frac{e-1}{5} .III'.I + \frac{ie-2}{5} II'.II$$

$$II'.III = \frac{e-2}{5} .II'.II + \frac{ie-1}{5} .I'.III$$

$$I'.IV = \frac{e-3}{5} I'.III + \frac{ie}{5} .IV$$

$$V = \frac{e-4}{5} .IV.$$

Ubi in quavis columna patet numerum romanum factorem communem esse, et summam factorum sociorum esse $\frac{ie+e-4}{5}$; nam ubi orti sunt hi va-

lores, in termino cujusvis lineae ultimo numerus romanus convenit cum penultimo lineae sequentis, atque ex e in quavis linea sequente uno majus ex ie vero uno minus subtrahitur; quod etiam generaliter ostendi potest. Denotent M, N numeros romanos, ita $M-1, N-1, N+1$, nempe ita ut si ex gr $N=V$, $N-1$ denotet IV ; m, n vero denotent numeros communes, (significatione priori haud re-tenta) ita ut si ex gr. M denotet V , denotet m tum 5 ; et accipiantur duo ejusmodi valores pro-ximi ut antea, $M'N$ et $(M'-1)(N+1)$; erit $M'N = \frac{ie-(m-1)}{m} (M'-1)N = M' \cdot \frac{e-(n-1)}{n} (N-1)$, $(M'-1)(N+1) = \frac{ie-(m-2)}{m-1} (M'-2)(N+1) = (M'-1)$

$$\frac{e-n}{n+1} . N ; \text{ adeoque } M'N = \frac{e-n+1}{n+1} . M' . (N-1) +$$

$$\frac{ie-m+1}{m+n} (M'-1)N, (M'-1)(N+1) = \frac{e-n}{n+m} \cdot (M'-1)N + \frac{ie-m+2}{n+m} \cdot (M'-2)(N+1);$$

ubi prioris ultimo et posterioris penultimo est factor $(M'-1)N$ communis, ac summa factorum sociorum est

$$\frac{e(i+1)-(m+n-1)}{m+n}.$$

Facile etiam patet numeros

romanos accentu insignitos post alterum a summo semper uno decrescere in linea sequente, et socium accentu destitutum ad finem lineae 2^{dae} esse I, et uno crescere semper, donec in columna ultima summus numerus (heic IV) maneat sine accentu, uti in prima idem cum accentu (uterque bis).

Itaque redeundo ad schema, ut res clarior fiat: substitutis ipsorum V', IV'. I, III'. II - - - valoribus erit

$$V'' = \frac{e(i+1)-4}{5} (IV'+III'. I+II'. II+I'. III+IV) = \frac{e(i+1)-4}{5}$$

. IV''; nam $IV'+III'. I + II'. II + I'. III + IV = IV''$ erat.

Rite igitur prodire superius S's' usque ad x^{μ} , applicando ad I'', II'' - - - patet; ω vero quod pro $\mu=5$ prodit est =

$$\begin{array}{l} V \cdot I') x^6 + V \cdot II') x^7 + V \cdot III') x^8 + V \cdot IV') x^9 + V \cdot V' x^{10} \\ IV \cdot II') \quad IV \cdot III') \quad IV \cdot IV') \quad IV \cdot V') \\ III \cdot III') \quad III \cdot IV') \\ II \cdot IV') \end{array}$$

Hoc autem ~ 0 , si $\mu \sim \infty$. Accipiantur enim $\ddagger_{ve}$ termini omnes in seriebus $1, Ix, IIx^2 - - Mx^m - - - \overset{*}{M}x^{2m}$, et $1, I'x, II'x^2 - - -, M'^m - - - \overset{*}{M}'x^{2m}$ (per M, M' coefficientes ipsius x^m , per $\overset{*}{M}, \overset{*}{M}'$ vero coefficientes ipsius x^{2m} intelligendo). Utraque series etsi omnes termini $\ddagger_{ve}$ accipiantur, limite gaudet (p.145); sit $1+Ix+IIx^2 - - - \sim A$, et altera $\sim A'$. Pro quibusvis datis $k, \lambda \ddagger_{vis}$, potest utraque series ad tantum exponentem eundem usque sumi, ut si summa prioris usque ad x^m (inclusive)

dicatur u , et u' posterioris, atque u prioris usque ad x^{2m} , et u' posterioris, iam $A-u$ quam $A'-u'$ sit $< k$, et $AA'-uu'$ sit $< \lambda$.

Est vero $AA' > u u' > uu'$; itaque $u u' - uu' < \lambda$; estque porro in uu' summa potentia in facto partiali, $MM'x^{2m}$, (neque in ullo alio amplius tanta est); itaque si ω' dicatur summa omnium factorum partialium illorum, in quibus exponens ipsius x excedit $2m$, quum omnia $\pm$ ve accipiantur, erit ω' pars ipsius $u u' - uu'$; nam in hoc adsunt etiam illa, quae adhuc (uti e schemate videre est) deficiunt ultra x^m usque ad x^{2m} ; est igitur $\omega' < \lambda$. Sed facta illa partialia, quae ultra x^{2m} prodeunt (per multiplicationem serierum usque ad x^{2m} sumtarum), sunt praeterquam quod heic omnia $\pm$ ve accepta sint, plane eadem; consequ. si illorum summa ω dicatur, ac $\pm$ va $< \lambda$ fuerit, et signis terminorum mutatis erit $\omega < \lambda$; atque si $2m = \mu$ sit, et $\mu \sim \infty$, $\omega \sim 0$.

Consequenter omnibus quae superius requirebantur, demonstratis, (pro $x < 1$ et $e = \pm \frac{n}{m}$) est $(1+x)^e$

$$= 1 + ex + \frac{e(e-1)}{2} x^2 + \frac{e(e-1)(e-2)}{2 \cdot 3} x^3 \dots \text{Unde}$$

$$\text{etiam (p.137) } (a+b)^e = a^e + ea^{e-1}b + e \cdot \frac{(e-1)}{2} a^{e-2}b^2 + \frac{e(e-1)(e-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{e-3}b^3 \dots \text{ si } b < a.$$

6to. Si vero $b > a$, idest $x = \frac{b}{a} > 1$; tum $(1+x)^e$ ita exprimi nequit; nam $(1+x)^e$ determinato finito valore gaudet; si vero $x = \frac{k}{h}$, et $k > h$, fiet summa terminorum omni dabili major. Nam terminus n tus erit $\frac{e(e-1) \dots (e-(n-1)k^n)}{1 \cdot 2 \dots n \cdot h^n} = \frac{ek}{1h}$.

$\frac{(e-1)k}{2h} \dots \frac{[e-(n-1)]k}{n h}$, et exponens seriei per
 $\frac{(e-n)}{n+1} \cdot \frac{k}{h}$ exprimi potest; fit vero $e-n$ ali-
quando $=$, et ab illo termino incipiendo, aut est
 $\frac{e-n}{n+1}$ semper > 1 ; aut quovis dato quod < 1 ma-
jus, adeoque exponens seriei > 1 fit, et abinde
semper crescens $\sim \frac{k}{h}$. Nam si $e-n$ et > 1 est,
exponens coefficientium semper > 1 est; si non, et
per $\frac{e-n}{n+1}$ exprimatur, pro quavis fractione vera
 f , quae $> \frac{k}{h}$, fit $\frac{e-n}{n+1} \cdot \frac{k}{h} > 1$, si n non sit $<$
 $\frac{e+f}{1-f}$; nam pro $\frac{e-n}{n+1} = f$ prodit $n = \frac{e+f}{1-f}$, ubi n
pro f $\mp$ vo et < 1 , (si $> e$ accipiatur pro casu si
 $e-n$ et < 1) prodit $\mp$, uti esse debet; crescente au-
tem n crescit $\frac{e-n}{n+1}$; atque si $f = \frac{h+\lambda}{k}$ (ita ut
 h, λ utrumque $\mp$ aut utrumque $=$ sit), est $f \cdot \frac{k}{h} =$
 $\frac{h+\lambda}{k} \cdot \frac{k}{h} = \frac{h+\lambda}{h} > 1$.

Si jam ab aliquo termino incipiendo omnes ter-
mini $\mp$ vi aut omnes $=$ vi sint, manifesto series
 $\sim \infty$. Si non; tum ab aliquo termino incipi-
endo (ubi jam exponens seriei > 1 factus est) si-
gna alternabunt: sit terminus aliquis $A =$ vus, se-
quens $B \mp$, postea $C =$, et $D \mp$; atque conside-
rentur $A+B$, et $C+D$; exprimi B potest per
 $A \cdot \frac{e-n}{n+1} \cdot \frac{k}{h}$, et D per $C \cdot \frac{e-n-2}{n+3} \cdot \frac{k}{h}$, estque

$$A+B=A \left(1 - \frac{e-n}{n+1} \cdot \frac{k}{h}\right) \text{ et } C+D=C \left(1 - \frac{e-n-2}{n+3} \cdot \frac{k}{h}\right);$$

in utraque parenthesi, si $x = \frac{k}{h} \mp$ sit, $-$ prodit, et $>$ in posteriore; si vero $x, -$ sit, tum in parenthesi 2da majus $\mp$ vum prodit; praeterea $C > A$, adeoque incrementa semper nova accedunt cum quovis novo pari, et quidem semper majora.

Ita si $a=b$, facile patet formulam nonnisi pro casibus particularibus valere.

7mo. Notandum autem incrementis decrescentibus imo ad limitem 0 tendentibus etiam posse summam omni dabili majorem fieri: ex gr. $1 + \frac{1}{2} +$

$$\frac{1}{3} \dots \sim \infty. \text{ Si enim exponens seriei ab aliquo termino incipiendo, semper abinde } > 1, \text{ et (ut antea in serie, cujus termini sunt } A+B, C+D \dots);$$

idem omni dabili pluries accedit. Si vero exponens seriei certa fractione vera f ab aliquo termino α incipiendo abinde nunquam $>$ fit (etsi semper crescat); summa in ∞ erit $< \frac{\alpha}{1-f}$, cui summa terminorum anteriorum addita, majus tota seriei summa prodit (p. 131). At si exponens seriei semper quidem < 1 sit, sed semper crescat, neque tamen maneat certa fractione vera f minor; tum pro diversis casibus, summa, finita aut ∞ esse potest.

Si pro certo b , seriei ab aliquo a incipiendo tot termini accipi possint usque ad aliquem u , ut summa eorum, si e exponens seriei qui ad a est, constans maneret, sit $=$ aut $> b$, et post quodvis u (sequente termino a' et exponente qui ibi est e' dicto), detur talis terminus u' , ut summa ab a' usque u' (si exponens constans e' maneret) sit $=$ vel $> b$; et summae hae signo eodem gaudeant, tum manifesto series $\sim \infty$. Pro $b = \frac{ue-a}{e-1}$ (p. 131);

esset $u = \frac{a+eb-b}{e}$; adeoque si exprimantur u, a, e

generaliter ; (pro serie tali aut in talem mutata , ut termini omnes , adeoque et $a, e, u, b, \pm$ sint), et semper sit $a+eb > b$, ut u prodeat $\pm$, atque $\frac{a+eb-b}{e}$ sit $< a$, (nam $u < a$ propter exponentem < 1 est) : tum summa seriei $\sim \infty$.

Ex gr. In serie $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \dots$ pro $a = \frac{1}{n}$ est $e = \frac{n}{n+1}$; sit $b=1$; erit

$a+eb > b$, nempe $(\frac{1}{n} + \frac{n}{n+1} = \frac{n+1+n^2}{n^2+n}) > 1$, at-

que $u = (\frac{1}{n} + \frac{n}{n+1} - 1) : \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} : \frac{n}{n+1} =$

$\frac{1}{n^2}$. Si $a = \frac{1}{2}$, erit $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + (\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}) = 1$, et

si $a = \frac{1}{5}$, erit $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \dots + \frac{1}{5^2} = 1$;

et ita porro , adeoque prodit $1+1+1 \dots \sim \infty$.

Pro $b = \frac{7}{8}$, erit primum $u = \frac{a+eb-b}{e} = (\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} - \frac{7}{8}) : \frac{2}{3} = \frac{15}{48}$; sed in quovis seriei

termino numerator 1 est ; atque si $\frac{15}{48}$ ad nume-

ratores 1 reducatur, fiet $\frac{15}{48} = \frac{1}{3+\frac{3}{15}}$; unde quum

u sit $< \frac{1}{3}$, si series usque ad $\frac{1}{3}$ summetur, prohibet ipso b majus.

Series $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$ e facto numerorum natu-

ratum 1, 2, 3 . . . per 2, 3, 4 . . . divisio oritur: nempe $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{4}$, . . .

Unde etiam $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$, et ~ 0

si $n \sim \infty$; imo ubicunque incipiendo, ex gr.

$$\frac{3 \cdot 4 \cdots n}{4 \cdot 5 \cdots (n+1)} = \frac{3}{n+1} \sim 0.$$

8vo. Si $\frac{n}{m} \sim q$; est $(a+b)^q = a^q + qa^{q-1}b + \frac{q(q-1)}{2} a^{q-2}b^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3} a^{q-3}b^3 \cdots$

* Nam si duae series fuerint, una terminorum constantium $a+b+c \cdots =$ vel $\sim A$, altera $a'+b'+c' \cdots$

$\sim A'$, et (pro dato quovis $\alpha = \frac{A}{N}$) quotvis termini accipiantur prioris, totidemque posterioris; si quivis n tus terminus hujus dicatur t' , priorisque n tus t sit; fieri possit $\frac{t'}{t} - 1 < \frac{1}{N}$, (et quidem id pro omnibus t et t' simul sit): tum $A = A'$.

Namque tum (si ex gr. termini usque ad f , f' accipiantur), $\frac{a'}{a} \sim 1$, $\frac{b'}{b} \sim 1$, . . . $\frac{f'}{f} \sim 1$;

et (p. 81 5to) $\frac{a'+b'+\cdots+f'}{a+b+\cdots+f} \sim 1$; atque $\frac{a'+b'+\cdots+f'}{a+b+\cdots+f}$

$- 1 < \frac{1}{N}$ fieri potest; adeoque $a'+b'+\cdots+f'$

$-(a+b+\cdots+f) < \frac{a+b+\cdots+f}{N}$ fit, quod $< (\frac{A}{N} = \alpha)$

est. Itaque quotvis terminorum seriei $a'+b'+\cdots$ submae, quae $\sim A'$, differentia ab A , quovisabili minor fieri potest. Unde patet.

Notandum vero, inde quod si duae series sint totidem terminorum sibi invicem respondentium, et cujusvis termini differentia ab ei respondente

~ 0 , non sequi, summas serierum esse aequales.

Ex gr. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \dots$ non $= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \dots$,
 si ex gr. utrumque ex n terminis constet; erit nempe prius $= 1$, posterius $= \frac{1}{2}$, quamvis $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n}$.

~ 0 , si $n \sim \infty$.

Applicando hoc ad $(1+x)^{\frac{n}{m}}$, et $(1+x)^q$; in quovis termino prioris, praeter potentiam ipsius x , nonnisi coëfficiens $\frac{n}{m} \cdot (\frac{n}{m} - 1) (\frac{n}{m} - 2) \dots$ ad-

est; et si hic per $\frac{q(q-1)}{2} \cdot \frac{(q-2)}{3} \dots$ dividatur,

quotus pro dato quovis N , fieri $< \frac{1}{N}$ potest; nam

$\frac{n}{m} : q, (\frac{n}{m} - 1) : (q-1), (\frac{n}{m} - 2) : (q-2), \dots$ quod-

vis $< \frac{1}{N}$ fieri potest, (itaque et factum e factoribus ejusmodi), (2.3 $\dots$ in utroque denominator:

adesse patet). Hinc si termini ipsius $(1+x)^{\frac{n}{m}}$ sint $a'+b' \dots = S'$, terminique iidem substituto 1 ipsi $\frac{n}{m}$ sint $a+b \dots = S$; fiet $\frac{a'}{a} - 1 < \frac{1}{N}$,

seu $a' - a < \frac{a}{N}$, $b' - b < \frac{b}{N}$, $\dots$ adeoque $a'+b' \dots$

$-(a+b \dots) < \frac{a+b \dots}{N}$, seu $S' - S < \frac{S}{N}$ Consequ.

quum S' et S limite gaudeant, si ii $S'+z'$ et $S+z$ sint, erit $S'+z' = (S+z)$; quia $z', z, \frac{S}{N} \sim 0$.

Quod vero pro quovis N , detur pro quotvis terminis idem m , patet sic. Dicatur generaliter v integer ex $\frac{n}{m}$ subtrahendus: ut (pro $q = \frac{n}{m} + \omega$) sit

$$\frac{\frac{n}{m} - v}{v+1} : \frac{\frac{n}{m} + \omega - v}{v+1} - 1 < \frac{1}{N}; \text{ debet esse } \frac{\frac{n}{m} - v}{\frac{n}{m} + \omega - v}$$

$$- 1 < \frac{1}{N}, \text{ id est } \frac{-\omega}{q-v} < \frac{1}{N}, \text{ et si } \omega = \frac{k}{m},$$

$$\text{pro quovis } v \text{ debet esse } \frac{k}{m(q-v)} < \frac{1}{N}; \text{ unde } \frac{k}{m}$$

$$< \frac{q-v}{N}. \text{ Itaque inter omnia } v, \text{ quae inter termi-}$$

nos datos adsunt, illud accipiendum est, quod quotum $\frac{q-v}{N}$ minimum reddit, et si ω illo minus reddatur, tum pro illo m quivis quotus ejusmodi (ut antea) fit $< \frac{1}{N}$; adeoque et factum ex ejusmodi factoribus est $< \frac{1}{N}$, quum $N > 1$ ponatur).

9no. Denique omnibus quae de elevatione binomii $a+b$ dicta sunt, (mutatis mutandis) ad $a+b\sqrt{-1}$ applicatis; facile patet, formulam generaliter valere, si $b < a$; (ita si ponatur $b\sqrt{-1} + a$, et $a < b$ sit).

$$\text{Nempe } (1+x\sqrt{-1})^q = 1+x\sqrt{-1} - \frac{q(q-1)}{2} x^2 - \frac{q(q-1)(q-2)}{2 \cdot 3} x^3 \sqrt{-1} + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \frac{q(q-1) \dots (q-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 \sqrt{-1} \dots \text{ Ubi tam summa rea-}$$

lium, quam pure imaginariorum limite gaudet; quum etsi omnia realia et $\pm$ va essent, limitem haberent, tam termini reales seorsim, quam ubi $\sqrt{-1}$ factor est; nempe ad exponentem parem

termini reales sunt, et imaginarii ad imparem; et horum (per superiora) factore communi $\sqrt{-1}$ omisso summae limes datur; qui per $\sqrt{-1}$ multiplicatus, limes summae imaginariorum erit.

10mo. Si exponens binomii sit fractio vera $\frac{n}{n+\nu}$, erit (pro $n+\nu=p$) coefficientis μ tus,

$$\frac{n}{p} \cdot \frac{-\nu}{2p} \cdot \frac{-2\nu-n}{3p} \cdot \frac{-3\nu-2n}{4p} \dots \frac{n(2-\mu)+\nu(1-\mu)}{\mu p}.$$

Nam $\frac{n}{n+\nu} - 1 = \frac{n-n-\nu}{n+\nu} = \frac{-\nu}{n+\nu}$, et $\frac{n}{n+\nu} - (\mu-1) = \frac{n-\mu n+n-\mu \nu}{n+\nu} = \frac{2n-\mu n+\nu-\mu \nu}{n+\nu} = \frac{n(2-\mu)+\nu(1-\mu)}{n+\nu}.$

Ex gr. si $b < a$, est $\sqrt{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} b - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} a^{-\frac{3}{2}} b^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} a^{-\frac{5}{2}} b^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} a^{-\frac{7}{2}} b^4 \dots$ Idem ad alios exponentes applicari posse patet.

* XXXV. Si porro in $(1+x)^n$ sit $x = \frac{1}{m}$, erit $(1+x)^n = \left(\frac{m+1}{m}\right)^n$, quod (p.89. 8vo) $\sim \infty$, si $n \sim \infty$, uti $\left(\frac{m}{m+1}\right)^n \sim 0$. Sed

Imo. Quidsi etiam $m \sim \infty$, ab n certo modo dependens. Sit casus simplicissimus: nempe sit n integer $\mp$ et $=m$: fiet tum $(1+\frac{1}{n})^n = 1 + \frac{n}{n}$

$+ \frac{n(n-1)}{2n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3 n^3} \dots$ quod (pro $n \sim \infty$) $\sim 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \dots$, at series prior manet ista semper minor; nam quotusvis terminus ex gr. plus sumatur (primum non annumerando); erit is $\frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{2 \cdot 3 \dots p \cdot n^p}$ per ei re-

spondentem, nempe per $\frac{1}{2.3 \dots p}$ divisus =
 $\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-p+1}{n}$, quod ~ 1 , nam $\frac{n}{n} = 1$,
 $\frac{n-1}{n} - 1 = -\frac{1}{n} \sim 0$, ita etiam $\frac{n-p+1}{n} - 1 =$
 $\frac{1-p}{n}$, quod item ~ 0 , quum n pro illo p ut-
vis augere liceat; itaque usque ad quotumvis ter-
minum p tum accipiatur summa, pro dato quovis
 ω ita accipi n potest, idem pro omnibus, nempe
maximum eorum, quem eorundem aliquis requi-
rit; ut quivis terminus seriei prioris a quovis ei
respondente differat $< \frac{\omega}{p}$, adeoque omnes si-
mul differant $< \omega$.

Interim series prior manifesto est $<$ posteriore;
nam $\frac{n-1}{n}$ est < 1 , ita $\frac{n-p+1}{n}$ fractio vera est,
adeoque terminus quivis p tus prioris $<$ p to postero-
ris.

$$\text{Ita } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \sim 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} \dots$$

$$= \frac{2}{2.3} + \frac{4}{2.3.4.5} + \frac{6}{2.3.4.5.6.7} \dots$$

$$\text{Pariter } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nq} = 1 + \frac{nq}{n} + \frac{nq(nq-1)}{2n^2} +$$

$$\frac{nq.(nq-1)(nq-2)q^3}{2 \cdot 3 n^3} \dots \sim 1 + q + \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{2.3} \dots$$

(qualevis reale sive $\mp$ sive $-$ denotet q).

Limes ad quem summa seriei $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} \dots$
tendit, plerumque litera e insignitur; atque *loga-
rithmi*, qui huic basi superstruuntur, *naturales*
dicuntur.

Unde quum $(1 + \frac{1}{n})^n$ (elevatum ad q) $\sim e^q$, et

simul $\sim 1 + q + \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{2.3} \dots$; manifesto e^q per

hanc seriem expressa est; cujus, summae limitis logarithmus naturalis q est: est nempe series ista convergens; cum quantumvis sit q : aliquando fiet exponens seriei, q divisum per integrum illo majorem, postea semper crescentem.

2do. Sed non tantum e logarithmo quantitas ei respondens, verum ex hac quoque ejus logarithmus reperiri potest. Nimirum dari paulo inferius probabitur; sit u $\mp$ et < 1 , atque nominetur α logarithmus ipsius $(1+u)$, nempe $e^\alpha = 1+u$; erit

$(1 + \frac{1}{n})^{n\alpha} = (1 + \frac{1}{n})^n{}^\alpha < e^\alpha$, (nempe minus

$\mp$); nam $(1 + \frac{1}{n})^n < e$ (p.157. Imc), et α $\mp$ est,

nam $e > 1$, adeoque ad exponentem quemvis $-vum$

elevatum fit < 1 ; nempe $e^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$, et radix

quaevis exponentis integri $\mp vi$ e potentia quavis integra ipsius e est > 1 . (p. 89)

Est itaque $(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{2.3} \dots \sim 1 + u) > (1 +$

$\frac{1}{n})^{n\alpha} = 1 + \frac{n\alpha}{n} + \frac{n\alpha(n\alpha-1)}{2n^2} \dots$; sed hoc quoque est

> 1 ; erit enim $(1 + \frac{1}{n})$ ad quemvis $\mp$ exponen-

tem elevatum > 1 ; ex gr. $(1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{(1 + \frac{1}{n})}$

> 1 est. Sit id u' quo series posterior ipsum 1 su-

perat; atque sit $\alpha =$ semper $\frac{\alpha}{n}$, nempe utcumque

creseat n , ex gr. si n fiat kn , fiat a tum ka ; ut

$$\frac{ka}{kn} \text{ sit } = \alpha. \text{ Erit tum } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\alpha} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} = 1$$

$$+ u', \text{ et hinc } 1 + \frac{1}{n} = \left(1 + u'\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1; \text{ atque } \alpha =$$

$$\frac{a}{n} = a \cdot \frac{1}{n} = a \cdot \left[\left(1 + u'\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right]; \text{ consequ (p. 150)}$$

$$\text{est } \alpha = a \cdot \left[1 + \frac{1}{a} u' + \frac{1}{a} \left(\frac{1-a}{a} \right) \frac{u'^2}{2} \dots - 1 \right] = u' +$$

$$\frac{(1-a)}{a} \frac{u'^2}{2} + \frac{(1-a)}{a} \frac{(-2a)}{a} \frac{u'^3}{2.3} \dots \quad (\text{dum}$$

$$n \sim \infty) \sim u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} \dots = \lognat(1+u).$$

Nam accipiantur item quotvis termini usque ad
ptum e priori, et dividatur quivis per ei respon-
dentem e posteriore; quivis quotus ~ 1 ; ex gr.

$$\frac{1-a}{a} \cdot \frac{u'^2}{2} : - \frac{u^2}{2} = \frac{2 \cdot (1-a)}{2 \cdot a} \frac{u' \cdot u'}{u \cdot u}, \text{ ubi } \frac{1-a}{a}$$

$$\sim -1, \text{ quia } \frac{a}{n} \text{ quidem est constans, sed dum}$$

$$n \sim \infty, \text{ etiam } a \sim \infty; \text{ porro } \frac{u'}{u} \sim 1,$$

nam $1 + u' \sim 1 + u$; ita pro pto termino, est

$$\frac{(1-a)(1-2a) \dots (1-(p-1)a)u'^p}{a \cdot a \dots a \cdot 2 \cdot 3 \dots p} : \frac{u^p}{p} = \frac{1-a}{a}$$

$$: \frac{1-2a}{a} \dots \frac{(1-(p-1)a)}{a}, \frac{u'^p}{u^p} \cdot \frac{p}{2.3 \dots (p-1)p}$$

$$\text{quod } \sim \pm 1; \text{ nam } \frac{1-a}{a} \sim -1, \frac{1-2a}{a} \sim -2,$$

$$\text{et demum } \frac{1-(p-1)a}{a} \sim -(p-1), \text{ et } \frac{u'}{u} \sim 1.$$

Ita datur ejusmodi exponens $-\beta$ (pro $\beta \text{ } \mathbb{I}_{vo}$) ut $e^{-\beta} = 1 - u$ (pro quovis u fractione vera $\mathbb{I}_{va}$); nempe quum $e > 1$ sit, et $e^0 = 1$, 1 per $\mathbb{I}_{vam}$ potentiam ipsius e divisum, quodvis $\mathbb{I}_{vum}$ producere potest, quod < 1 est.

Eritque et hic ut antea, (pro β semper $= \frac{b}{n}$),

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-b} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-\frac{b}{n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{nb}{n}}$$

$$(e^{-\beta} = 1 - u = 1 - \beta + \frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^3}{2.3} \dots). \text{ Est nempe}$$

$$\text{summa seriei hujus, limes summae seriei } 1 - \frac{b}{n} + \frac{b(b+1)}{2n^2} - \frac{b(b+1)(b+2)}{2.3n^3} \dots = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-b} \text{ (plane}$$

ita uti superius). Est praeterea $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1$, et

$$< e \text{ (p.158), adeoque } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-b} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^b} < 1,$$

atque valor ejus per $1 - z$ exprimi potest (pro $z \text{ } \mathbb{I}$ et < 1). Atque pro $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-b} = 1 - z$; erit

$$(1 - z)^{-\frac{1}{b}} = 1 + \frac{1}{n}, \text{ adeoque } \frac{1}{n} = [(1 - z)^{-\frac{1}{b}} - 1];$$

$$\text{et } \beta = \frac{b}{n} = b [(1 - z)^{-\frac{1}{b}} - 1] =$$

$$b \left[1 + \frac{z}{b} + \frac{1}{b} \frac{(1+b)}{b} \frac{z^2}{2} + \frac{1}{b} \frac{(1+b)}{b} \frac{(1+2b)}{b} \frac{z^3}{2.3} \dots - 1 \right] = z + \frac{(1+b)z^2}{b.2} + \frac{(1+b)}{b} \cdot \frac{(1+2b)}{b} \frac{z^3}{2.3} \dots; \text{ quae}$$

series plane ut antea $\sim u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} \dots$, nempe

$$\frac{z}{u} \sim 1 \text{ \&. Consequ. } -\beta \text{ est } = -u - \frac{u^2}{2} -$$

$\frac{u^3}{3} \dots = \text{lognat } (1-u)$. Unde cum α sit $\text{lognat } (1+u)$ et $-\beta = \text{lognat } (1-u)$; atque quantitas quaevis $\pm Q$ per $\frac{1+u}{1-u}$ exprimi queat, si $u = \frac{Q-1}{Q+1}$ ponatur, quod manifesto <1 est: erit inde $\text{lognat } \left(\frac{1+u}{1-u} \right) = \text{lognat } Q = \text{lognat } (1+u) - \text{lognat } (1-u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} \dots - (-u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \dots) = 2(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} \dots)$. Si apud $\frac{2u^\mu}{\mu}$ subsistere libeat: terminorum sequentium summam constat esse $<$ eodem termino per $(1-u^2)$ diviso (p.131); nam quilibet exponens seriei in posterum est, $< u^2$; nempe post $\frac{u^3}{3}$ est $\frac{3u^2}{5}$, postea $\frac{5u^2}{7}$ &, adeoque semper $< u^2$, quod <1 est, quia $u < 1$.

Alias series citius convergentes vide infra, una cum applicationibus earundem.

3tio. Sit $e^c = C$, erit $C^b = e^{cb} = C' = 1 + cb + \frac{c^2 b^2}{2} + \frac{c^3 b^3}{2.3} \dots$, et cb est $\text{lognat } C'$, c est $\text{lognat } C$, $b = \log C'$ quoad basim C ; diciturque b (si $c \neq 1$), $\log$. artificialis; Ita $C^k = e^{ck} = C'' = 1 + ck + \frac{c^2 k^2}{2} \dots$

et $k = \log$. art. C'' quod eandem basim C ; atque $\frac{1}{c}$ nempe per quod lognat multiplicatus dat $\log$. artificialem (heic pro basi C), dicitur *modulus systematis* cujus basis C est; estque $\text{modulus} = \frac{1}{\text{lognat } C} = \frac{1}{c}$. Si $c=1$, est $\frac{1}{c} = 1$, et $\frac{1}{\text{lognat } e^1} = 1$, est $\text{modulus syst. naturalis}$; nempe $\log e$ quoad basim e

est 1, quia $e^1=e$. Unde si modulus dicatur μ , est

$$\mu = \frac{1}{\log_{\text{nat}} C}, \text{ et hinc } \frac{1}{\mu} = \log_{\text{nat}} C, \text{ adeoque } e^{\frac{1}{\mu}}$$

$=C$; et inde basis C innotescit, nam $e^{\frac{1}{\mu}} = 1$

$$+ \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2\mu^2} + \frac{1}{2.3\mu^3} \dots$$

Si vero fuerint qualesvis 2 bases B et C , et $\log N$ quoad B sit b , et $\log N$ quoad C sit c , erit $b:c = \log C : \log B$ (quoad quamvis basim eandem accipiantur logarithmi basium C, B . Nam tum $B^b = C^c$; et hinc $b \log B = c \log C$ (p.96).

Notandum etiam, quod $\log(1-u) = -(u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} \dots)$, quod (si $u \sim 1$), $\sim -(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots) = -\infty$ (p.153), atque tum $1-u \sim 0$; et sensu (p. 38) fit $\log 0 = -\infty$.

* XXXVI. Imo. Si (in praec.) in serie ipsum ec^b exprimente, substituatur ipsi cb quantumvis reale α vel β sive $+$ sive $-$, sive $\alpha + \beta$, vel $\alpha - \beta$ aut $\alpha\beta$, vel $\alpha : \beta$; quaevis ejusmodi series ad limitem tendit, (excepto si ipsi cb plane o substituatur, tunc enim limus terminus est 1, reliqui omnes o). Imo si

$$1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{2.3} \dots \sim A, \quad 1 + \beta + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{2.3} \dots \sim B$$

$$\text{erit etiam } 1 + (\alpha + \beta) + \frac{(\alpha + \beta)^2}{2} + \frac{(\alpha + \beta)^3}{2.3} \dots \sim AB,$$

$$\text{atque } 1 + (\alpha - \beta) + \frac{(\alpha - \beta)^2}{2} + \frac{(\alpha - \beta)^3}{2.3} \dots \sim \frac{A}{B}.$$

Nam $e^\alpha = A$, $e^\beta = B$, $e^\alpha \cdot e^\beta = AB = e^{\alpha + \beta}$; et

$e^\alpha : e^\beta = A : B = e^{\alpha - \beta}$; atque $e^{\alpha + \beta}$ est limes seriei

prioris, $e^{\alpha - \beta}$ autem posterioris.

$$\text{Ita } (e^\alpha)^\beta = e^{\alpha\beta} = 1 + \alpha\beta + \frac{(\alpha\beta)^2}{2} + \frac{(\alpha\beta)^3}{2.3} \dots \text{ et } \sqrt[\beta]{e^\alpha} \\ = e^{\frac{\alpha}{\beta}} = 1 + \frac{\alpha}{\beta} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 : 2 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 : 2.3 \dots$$

2do. Quum haec ita sint; facile succurrit quærere: quidsi ipsi α (aut etiam β), $r+i$ aut $R+I$ substitueretur (pro R, r realibus, et I, i pure imaginariis); num series eadem tum quoque ad limitem tenderent? et an una per alteram multiplicata, aut divisa $\wp$, series ejusmodi ut prius producant?

Sit prius $r=0$, et sit ex gr. $i=2\sqrt{-1}$; si in serie ipsius e^α , ipsi α substituatur i , fiet $1 + 2\sqrt{-1} - 1 - \frac{4}{2} - \frac{8\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{16}{2.3.4} \dots$, et terminorum realium seorsim addendorum, exponens seriei primus est $-\frac{4}{2}$, pure imaginariorum vero est $-\frac{4}{2.3}$, et postea in utroque si factor ultimus μ sit in denominatore termini, exponens est $\frac{-4}{(\mu+1)(\mu+2)}$; unde quum numerator constans sit, et $\mu \sim \infty$, manifesto in aliquo termino primum fiet exponens seriei fractio vera, quae in posterum quoque semper decrescet; praeterea vero terminorum signa in serie utraque alternant; et quilibet $>$ sequente atque terminus utriusque ~ 0 ; itaque (ut supra) series utraque tam realium quam imaginariorum gaudet limite; adeoque et summa totalis seriei totius.

Ponatur jam $a+b\sqrt{-1}$ (pre a, b realibus) in locum ipsius α . Si $a+b$ poneretur, summa quotvis terminorum, etsi omnia $\mp$ ve accipiantur, certo finito minor maneret; accedente $\sqrt{-1}$ autem termini manent iidem, praeterquam quod quidam signum mutant, quidam factore $\sqrt{-1}$ afficiantur.

Itaque et horum summa manet priori finito minor; adeoque tam pars realis quam imaginaria, nisi constans sit, limite gaudet.

Quod multiplicationem serierum ejusmodi attinet; absque eo, ut resultato (quod sub signis generalibus α, β , pro casu realitatis prodit, deducatur; e multiplicatione serierum immediata patet sic.

Accipiantur termini numero m , tam in $\alpha^0 + \alpha^1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{2.3} \dots \frac{\alpha^m}{2.3 \dots m}$, quam in $\beta^0 + \beta^1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{2.3} \dots \frac{\beta^m}{2.3 \dots m}$; atque instituatur multiplicatio; 1 et po-

tentiae omnes ipsius α , multiplicabuntur per 1 et potentias omnes ipsius β (usque ad m tam); adeoque prius prodibit 1, praeterea prodibit (pro quovis integro μ quod non $> m$) terminus quivis

ipsius $(\alpha + \beta)^\mu$, divisus per $2.3 \dots \mu$; et quod praeterea prodit, $\sim o$, dum $m \sim \infty$. Sit enim generaliter (denotante μ numerum quemvis ab 1 usque ad m inclusive), $\mu = p + q$ (pro p, q integris $\pm$ vis); cujusvis termini ipsius $(\alpha + \beta)^\mu$ forma est $\frac{\mu(\mu-1) \dots (\mu-q+1)}{2.3 \dots q} \alpha^p \beta^q$, (ubi $\mu - q + 1 = p + 1$, uti

facile e quovis exemplo patet); exsurget vero e termino in quo α^p est per terminum in quo β^q est (quod non nisi semel est), $\frac{\alpha^p \beta^q}{2.3 \dots p.2.3 \dots q}$; atque

hic erit plane terminus unicus ipsius $(\alpha + \beta)^\mu$, in quo $\alpha^p \beta^q$ est, (per $2.3 \dots \mu$ divisus, uti forma seriei ostendit). Nam multiplicentur numerator de-

nominatorque ipsius $\frac{\alpha^p}{2.3 \dots p}$ per $\mu(\mu-1) \dots (\mu-q$

$+ 1 = p + 1) = (p+1)(p+2) \dots \mu$; erit $\frac{\alpha^p \beta^q}{2.3 \dots p.2.3 \dots q}$

$= \frac{\mu(\mu-1) \dots (\mu-q+1) \alpha^p \beta^q}{2 \cdot 3 \dots q} : 2.3 \dots p(p+1) \dots \mu$;

qui plane terminus superior generalis est, per denominatorem terminis ipsius $(\alpha + \beta)^\mu$ omnibus communem divisus. Pro quovis μ non $> m$ autem et quibusvis p, q , adest α^p in serie superiore, et β^q in inferiore; at non si $\mu > m$ ex gr. $= m+1$ sumatur: nam si $\mu = m$, sit $p = 0$, (aut $= m$); aderit in serie superiore α^0 , infra β^m , ita α^m et β^0 ; si $\mu < m$, quodvis p et $q < m$ adesse patet; at pro $\mu = m+1$ et $p = m+1$, non adest α^{m+1} , adeoque hic terminus ipsius $(\alpha + \beta)^{m+1}$ deest; adsunt vero omnes ipsius $\alpha + \beta$ potentiae a 0 usque ad m inclusive; dicatur summa ejus quod e multiplicatione insuper exsurgit ω . Accipiantur jam termini etiam porro usque ad α^{2m} et β^{2m} ; pariter prodibunt etiam post $(\alpha + \beta)^m$, potentiae omnes ipsius $(\alpha + \beta)$ usque ad $(\alpha + \beta)^{2m}$, in quas ω totum iugreditur, nempe praebendo unicum terminum $\alpha^m \beta^m$ ipsi $(\alpha + \beta)^{2m}$, et reliquos terminos omnes potentiis inferioribus supeditando; nempe m ipsum quoque, eo magis numerus ipso m minor, cum numero $< m$, summam $< 2m$ facit. Si vero $m \sim \infty$; post $(\alpha + \beta)^m$ summa omnium ~ 0 , adeoque et pars $\omega \sim 0$. (ut supra p.146)

Hinc series prior per 2^{dam} multiplicata, dat seriem formae ejusdem, nonnisi $\alpha + \beta$ ipsi α in priore substituto; quidcunque denotent α, β . Nempe ut supra (p.146) si de utraque serie usque ad exponentem quemvis accepta valet, de seriebus ipsis valet.

Hinc etiam series prior per 2^{dam} divisa, dat quotum $= 1 + (\alpha - \beta) + \frac{(\alpha - \beta)^2}{2} + \frac{(\alpha - \beta)^3}{2.3} - \dots$; nam hoc per seriem 2^{dam} multiplicatum, dat priorem (per praec.).

Imo hinc etiam, etsi c non sit reale, si $b = \frac{n}{m}$, (pro n, m integris) reale sit; erit $(1 + c + \frac{c^2}{2} +$

$$\frac{c^3}{2.3} \dots)^b = 1 + cb + \frac{(bc)^2}{2} + \frac{(bc)^3}{2.3} \dots \text{Est enim (per}$$

$$\text{praec.) } (1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{2.3} \dots)^2 = 1 + 2c + \frac{(2c)^2}{2} + \frac{(2c)^3}{2.3} \dots \text{et porro cundo (ut p.145) usque ad } n\text{tam}$$

$$\text{potentiam, est } (1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{2.3} \dots)^n = 1 + nc +$$

$$\frac{(nc)^2}{2} + \frac{(nc)^3}{2.3} \dots \text{Ita } (1 + nc + \frac{(nc)^2}{2} \dots)^{\frac{1}{m}} = 1 +$$

$$\frac{nc}{m} + \frac{(nc)^2}{2.m^2} \dots; \text{namque hoc elevatum ad } m \text{ dat}$$

$$1 + nc + \frac{(nc)^2}{2} \dots \text{Itaque } (1 + bc + \frac{(bc)^2}{2} \dots)^m =$$

$$(1 + c + \frac{c^2}{2} \dots)^n; \text{adeoque } (1 + c + \frac{c^2}{2} \dots)^{\frac{n}{m}} = 1$$

$$+ bc + \frac{(bc)^2}{2} \dots, \text{ et } 1 + c + \frac{c^2}{2} \dots = \sqrt[m]{(1 + bc$$

$$+ \frac{(bc)^2}{2} \dots); \text{ ubi } cb = \frac{nc}{m}, \text{ per } \frac{n}{m} = b \text{ divisum sub-}$$

stituitur ipsi cb in serie posteriore, e qua radix exponentis $\frac{n}{m}$ extrahenda est.

Quaestio etiam suboritur; num pro quovis P , sive reali ($\pm$ vo vel $-$ vo) sive pure imaginario, sive mixto, detur tale p ; ut $1 + p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{2.3} \dots \sim P$.

Quum dari omnino statim probetur:

3tio. Animadvertitur; has series etsi imaginaria contineant, analogis subesse operationibus, ac si exponentes ipsius e reales essent; ex gr. si α, β realia fuerint, sicuti $e^\alpha \cdot e^\beta = e^{\alpha + \beta}$, ita series ipsi α superstructa per seriem ipsi β supestructam multiplicata, dat seriem ipsi $(\alpha + \beta)$ supestructam; etsi

α, β imaginaria contineant --- Unde passus ad *novum conceptum latiore* aperitur; redeundo quasi a serie hujus formae, ad quam conceptus *potentiae elementaris* (p. 43) deduxit: nempe si

ipsi α substituatur ex gr. $\sqrt[4]{16}$; exprimet series, omnes valores ipsius e elevati ad $\sqrt[4]{16}$, pro duo-

rum valorum realium ipsius $\sqrt[4]{16}$ (nempe $\dagger 2, -1$) quovis. Hinc quum operationes potentiarum de seriebus dictis, etsi imaginariis superstructae sint,

valeant: imaginem ex gr. $e^{\sqrt[4]{16}} = 1 + \sqrt[4]{16} + \frac{(\sqrt[4]{16})^2}{2} \dots$ pro quovis valore exponentis retinere

libuit; formando conceptum sequentem; quasi *potentiae, radice, logarithmique conceptus superior* (in posterum quoque manens) alio nomine signoque designatus fuisset, (quamobrem etiam *elementares* dicti sunt, nomen hoc retinentes).

Si nimirum $1 + bc^{\dagger} \frac{(bc)^2}{2} + \frac{(bc)^3}{2.3} \dots = \text{vel } \simeq B,$

et $1 + c^{\dagger} \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{2.3} \dots = \simeq C$; atque $bc = r + i$ (pro

r reali et $i = 0$ vel pure imaginario): dicatur in posterum B (per quamvis potentiam elementarem exponentis r ipsius 1 , multiplicatum) *potentia exponentis b ipsius C* , et C dicatur *radix exponentis b ipsius potentiae*; *logarithmus vero nonnisi b ipsius B quoad basim C dicatur.*

Si $c = 1$, adeoque $C = e$; est $B (= e^b)$, et si $C = e^0 = 1$, est $B (= e^{0b} = e^0)$.

Patet vero conceptum potentiae hoc sensu extendi, et priore latiore fieri, logarithmi autem conceptum partim extendi, partem restringi. Nempe si α reale sit, $1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{2.3} \dots$ quoque reale

est, et quidem semper $\neq$, etsi $\alpha =$ sit: nam si $\alpha =$ sit, ex gr. -3 ; erit $e^{-3} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \dots = \frac{1}{e^3}$;

adeoque $1 = e^3 \cdot (1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \dots)$; ubi $e^3 \neq$ est, con-

seq. et alter factor $\neq$ est. Itaque series ista pro α reali nonnisi valores $\neq$ ipsius e^α (eos quidem omnes) exhibet. Quamobrem ut omnes alii quoque valores comprehendantur, fit multiplicatio per 1^r (sensu elementari intelligendo).

Ubi nempe (p.158) ex $(1 + \frac{1}{n})^{nq}$ series $1 + q + \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{2.3} \dots$ prodibat, fuisset reipsa ex gr. (pro $q = \frac{3}{2}$)

$1^{\frac{3n}{2}} + \frac{3n}{2} \cdot 1^{\frac{3n-2}{2}} \dots$, ubi $1^{3n}, 1^{3n-2}$ semper $= 1$,

et $\sqrt{1}$ in quovis termino $\neq$ ve aut in omnibus $=$ ve accipiendus est; et quum quilibet accipi possit, valor omnis exhibetur; in serie $1 + q + \frac{q^2}{2} \dots$ au-

tem potentiae ipsius 1 unicus tantum valor nempe $+1$ ponitur, omissis ceteris valoribus; quos tamen multiplicatio per 1^r (sensu potentiae elementaris intellectum) omnes exhibet. Per 1^r idcirco semper potentia elementaris intelligenda.

Logarithmus realis autem (sensu proximo) quoad basim e vel e^c (pro c reali) quantitati $=$ vae neutiquam competit: nam B pro quibusvis b, c realibus per dicta semper $\neq$ est; atque nonnisi b logarithmus ipsius B quoad e^c dicebatur. Restrigitur itaque logarithmi conceptus; in quantum logarithmo elementari, $=$ va realia quoque gaudent; extenditur vero, quum sensu proximo non solum $A + B \sqrt{-1}$, (quaecunque realia denotent A, B), logarithmo gaudeat, sed et ipsum $A + B \sqrt{-1}$ logarithmus esse queat.

Nempe (p. 43 et 84) est $\frac{-10.-10}{-10.-10} = \frac{1.1.1}{1.1}$, itaque

(per def p. 43) $(-10)^{\frac{2-2}{3-2}} = 1$, et $\frac{o}{1}$ seu $o = \log 1$

quoad -10 ; ita $\frac{10.10}{10.10} = \frac{-1.-1.-1.-1}{-1.-1}$, adeoque

$10^{\frac{2-2}{4-2}} = -1$, et $o = \log -1$ quoad 10 ; ita $\frac{10.10}{10.10} =$

$\frac{\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}.\sqrt{-1}}$; ac $10^{\frac{2-2}{6-2}}$

$= \sqrt{-1}$, et o est $\log \sqrt{-1}$ quoad 10 : atque $10^{\frac{3}{2}}$

$= \pm \sqrt{1000}$, adeoque $\frac{3}{2}$ est logarithmus tam

✕væ quam ✕væ radicis ipsius 1000 (quoad basim 10); ita omnes logarithmi in tabulis, ubi radix decies millionesima (adeoque exponentis paris extrahitur ex 10 elevato ad logarithmum qui ibidem est, commate deleta), sensu priori elementari, tam ✕vo quam ✕vo competunt. In genere pro quo-

vis reali $R = e^r$, est R non $(=)$ sed $(= e^{\frac{2r}{2}} (=)$

$\sqrt{e^{2r}}$; atque $\frac{2r}{2} = r$ tanquam log elementaris tam

ipsi R , quam ipsi $-R$, competit.

Datur autem pro quibusvis realibus A, B (etsi aliquod eorum 0 sit) tale, x , ut $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} \dots$

sit $=$ vel $\sim A + B \sqrt{-1}$; atque tum $x = \log (A + B \sqrt{-1})$ quoad basim e ; imo quaevis basis $C = e^c$ sit, poterit x in 2 factores discerpi, quorum unus

c sit; nempe si ponatur $x = bc$, erit $b = \frac{x}{c}$, (quo-

tumque dari, etsi x, c utrumque imaginarium contineat (p. 127) dictum est); adeoque hoc b erit logarithmus ipsius $A + B \sqrt{-1}$ quoad basim C . Si

$A=0$ sit, tum idem de $B\sqrt{-1}$ valet; si vero utrumque $=0$ sit; tum 0 , logarithmo nonnisi sensu (p. 38) gaudet, et quidem $-\infty$ to, ut paulo inferius dicetur.

Ratio prioris, Trigonometriae elementis primis perspectis, (p. 108) facile intelligitur. Erat ibi.

$$\cos a + \sqrt{-1} \sin a = \left(\cos \frac{a}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{a}{n} \right)^n;$$

quod (si n tam magnum accipiatur, ut $\frac{a}{n} < \frac{1}{2}$

quadrante, adeoque $\cos \frac{a}{n} > \sin \frac{a}{n}$ sit), erit (per

$$\text{p.150}) = \left(\cos \frac{a}{n} \right)^n + n \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n-1} \sqrt{-1} \sin \frac{a}{n} -$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n-2} \left(\sin \frac{a}{n} \right)^2 - \frac{n(n-1)}{2} \frac{(n-2)}{3} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n-3}$$

$$\sqrt{-1} \left(\sin \frac{a}{n} \right)^3 \dots \text{Ubi manifesto summa}$$

terminorum realium est $= \cos a$, et summa reliquorum per $\sqrt{-1}$ multiplicatorum est $= \sqrt{-1} \sin a$, atque deleto $\sqrt{-1}$ utrinque, fit $= \sin a$.

Si n integer $\mp$ us finitus sit, series ex $n+1$ terminis constat, exhibens cosinum sinumque arcus n tupli, nec tum $\sin a < \cos a$ esse necesse est (p.150).

Si vero $n \sim \infty$, datur series talis ut supra (p.154), cujus summa limes hujus est; nempe $1 + a$

$$\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3 \sqrt{-1}}{2.3} + \frac{a^4}{2.3.4} + \frac{a^5 \sqrt{-1}}{2 \dots 5} - \frac{a^6}{2 \dots 6} \dots$$

Nam si $n \sim \infty$, tum $\frac{a}{n} \sim 0$, et $\cos \frac{a}{n} \sim$

$$(\cos 0 = 1), \text{ et } \left(\cos \frac{a}{n} \right)^n, \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n-1} \sim 1 \text{ uti o-}$$

mnes reliquae potentiae ipsius $\cos \frac{a}{n}$; constabit

praeterea inferius, quod $\left(\sin \frac{a}{n} \right) : \frac{a}{n} \sim 1$; a-

deoque si (ut p.155) in quovis termino, potentiae ipsius $\cos \frac{a}{n}$ substituatur 1, et $\frac{a}{n}$ ipsi $\sin \frac{a}{n}$; erit

$$\frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{2 \cdot 3 \dots m} \frac{a^m}{n^m} : \frac{a^m}{2 \cdot 3 \dots m} \sim 1; \text{ nam}$$

$$\text{quotus hic est} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \dots \frac{n-m+1}{n}; \text{ ubi}$$

$$\frac{n}{n} = 1, \frac{n-1}{n} \sim 1, \frac{n-2}{n} \sim 1 \dots \text{et } \frac{n-m+1}{n} \sim$$

1, atque omnia ut supra applicari possunt, neque heic jam brevitatis studio repetuntur.

Unde etiam, (quum hoc pro quovis a valeat), est $\cos a + \sqrt{-1} \sin a = 1 + a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3\sqrt{-1}}{2 \cdot 3} + \frac{a^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{a^5\sqrt{-1}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{a^6}{2 \cdot 3 \dots 6} \dots$; atque (ut prius)

$$\cos a = \text{summae realium, nempe} = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{a^6}{2 \cdot 3 \dots 6} \dots \text{et } \sin a = \frac{\sqrt{-1} \cdot \sin a}{\sqrt{-1}} = a - \frac{a^3}{2 \cdot 3} + \frac{a^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{a^7}{2 \cdot 3 \dots 7} \dots$$

Sed ad scopum praesentem sufficit, quod $\cos a + \sqrt{-1} \sin a = e^{a\sqrt{-1}}$ (p.168); sit $K \mp_{\text{vnm}} = e^k$, erit $K = 1 + k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{2 \cdot 3} \dots$ (p.159), et $e^{a\sqrt{-1}} \cdot e^k$

$$= e^{a\sqrt{-1} + k} = 1 + (a\sqrt{-1} + k) + \frac{(a\sqrt{-1} + k)^2}{2} \dots = K$$

($\cos a + \sqrt{-1} \sin a$). Si itaque $K(\cos a + \sqrt{-1} \sin a) = A + B\sqrt{-1}$; seu $K \cos a = A$, et $K \sin a = B$; erit $A + B\sqrt{-1} = e^{a\sqrt{-1} + k}$. Id ergo quaeritur, num hoc fieri possit? Sit $B = \frac{A}{p}$, nempe $A = Bp$; casus

si $A = 0$, excluditur, tunc enim facile est a ita ac-

cipere, ut $\cos a = 0$ sit. Quaestio igitur eo redit; num detur tale a , ut $\cos a = p \sin a$ sit? $p \sin a = p \sqrt{1 - (\cos a)^2}$, seu $(\cos a)^2 = p^2 - p^2 (\cos a)^2$; unde $(\cos a)^2 (1 + p^2) = p^2$; et $\cos a = \sqrt{\frac{p^2}{p^2 + 1}}$, quod cum

< 1 sit, (omnia pro radio 1 intelligendo) omnino datur, arcuque gaudet. Itaque si (pro tali arcu a) accipiat $K = \frac{A}{\cos a}$, (quod semper $\mp$ esse potest,

nam p sive $\mp$ sive $-$ sit, $\frac{p^2}{p^2 + 1} \mp$ est, et pro $A = +$ vel $-$ va radix accipi potest), erit $K \cos a = A$, at-

que $K \sin a = \frac{K \cos a}{p} = \frac{A}{p} = B$; adeoque $K (\cos a$

$+ \sqrt{-1} \cdot \sin a) = A + B \sqrt{-1} = e^{k + a \sqrt{-1}}$; et lognat $(A + B \sqrt{-1})$ est $k + a \sqrt{-1}$. Patet etiam esse K^2

$$= A^2 : \frac{p^2}{p^2 + 1} = \frac{A^2 p^2}{p^2} + \frac{A^2}{p^2} = A^2 + B^2.$$

Si (p. 109) quivis arcuum sumatur (sive $\mp$ ve sive $-$ ve) quorum cosinus $= 1$ et sinus $= 0$, substituanturque ipsi a , (pro quovis reali $K = e^k$); erit $K (\cos a + \sqrt{-1} \cdot \sin a) = K \cdot 1 + 0 \cdot K \sqrt{-1} = K = e^k \cdot e^{a \sqrt{-1}} = e^{k + a \sqrt{-1}}$; atque lognat $K = k + a \sqrt{-1}$, cujus valores (propter valores innumerabiles ipsius a) innumerabiles sunt, omnes imaginarii praeter unicum si nempe $a = 0$, (ubi etiam $\cos = 1$ et $\sin = 0$). Ita si a ita sumatur, ut $\cos a = -1$, et $\sin a = 0$, erit $K (\cos a + \sqrt{-1} \cdot \sin a) = -K$, et $e^{k + a \sqrt{-1}} = -K$, atque pro quovis valorum innumerabilium ipsius a , pro quibus $\cos a = -1$ et $\sin a = 0$, erit lognat $(-K) = k + a \sqrt{-1}$; inter hos valores ipsius a zerus non adest, quia $\cos 0 = 1$, consequ. negativum nullo reali logarithmo (ut supra quoque dictum est) at innumerabilibus imaginariis gaudet, uti etiam $\mp$ vum, quod tamen unicum realem quoque habet. Si $K = 1$, tum pro $k = 0$ logarithmi omnes pure imagina-

rii sunt, praeter unicum valorem ipsius a (pro $+1$) ipsi o aequalem.

At quaeritur etiam; num pro quovis $\mp_{vo} K$ detur tale k , ut $e^k = K$ sit? (quod in demonstratione supponebatur). Sit prius $K > 1$. Si $\mp_n \sim \infty$, e^n quoque $\sim \infty$, (quum $e > 1$ sit); e^{-n} seu $\frac{1}{e^n}$ vero $\sim o$, $e^{\frac{1}{n}}$ id est $\sqrt[n]{e}$ vero (semper > 1) ~ 1 (89). Quaeratur (Fig. 17.) a p eundo semper porro in ∞ , in quovis puncto p' ; num $e^{pp'} < K$ sit? aliquamdiu prodibit $<$, et aliquando $>$, nam $e^0 = 1$, et exponent $\mp_{ve}$ crescit a o in ∞ . Datur itaque (p. 16) punctum aliquod ultimum $*$, intra quod et p quodvis p' tale est, ut $e^{pp'} < K$ sit; erit vero tum $e^{p*} = K = ab$; nam secus esset $>$ aut $< ab$; neutrum vero fieri potest. Sit enim $e^{p*} = ac = ab - bc$, erit $ac \cdot e^{\frac{1}{n}} \sim ac$, quia $e^{\frac{1}{n}} \sim 1$, adeoque $ac \cdot e^{\frac{1}{n}} - ac$ dato quovis ergo et $< bc$ fieri potest, sit $= cq$; erit $ac \cdot e^{\frac{1}{n}} = ac + cq$ seu $e^{p* + \frac{1}{n}} = aq$; adeoque in $*$ non esset ultimum tale punctum, ut dictum est; nam $p_* + \frac{1}{n}$ ultra $*$ terminatur, attamen $e^{p* + \frac{1}{n}}$ est $< K$; ad quemvis exponentem minorem elevatum vero minus est.

Neque $e^{p*} = ad$ esse potest; nam $e^{\frac{-1}{n}} = 1 : \sqrt[n]{e}$ quod < 1 , sed ~ 1 ; adeoque $ad \cdot e^{\frac{-1}{n}} - ad$ quovis dato (ergo et ipso bd) minus fieri potest; differentia $-va$ est, sit $-br$; erit $ad \cdot e^{\frac{-1}{n}} - ad = -br$, adeoque $e^{p* - \frac{1}{n}} = ab + br$; itaque e ad exponentem minorem

ipso p^* elevatum $> K$ esset. Est igitur K , si > 1 est, $= e^{p^*}$. Si vero $K < 1$, tum datur tale $N > 1$, ut $NK > 1$; et tum dantur talia x, z , ut $e^x = NK$ et $e^z = N$; adeoque $\frac{e^x}{e^z} = e^{x-z} = K$.

Exempla. 1mo. Pro quovis a , cujus $\cos = 1$ et $\sin = 0$, est (p.172) $\cos a + \sqrt{-1} \cdot \sin a = 1 + a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3\sqrt{-1}}{2 \cdot 3} - \dots = e^{a\sqrt{-1}}$; seriei summa igitur ~ 1 ; quod fieri nequit, nisi summa realium praeter terminum primum ~ 0 , et summa pure imaginariorum quoque ~ 0 . Est vero pro quovis dicto a , $a\sqrt{-1} = \text{lognat } 1$, et inter innumerabiles logarithmos solus zerus est realis, pro $a = 0$.

2do. Pro quovis a , cujus $\cos = -1$, et $\sin = 0$, est $\cos a + \sqrt{-1} \cdot \sin a = -1 = 1 + a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3\sqrt{-1}}{2 \cdot 3} - \dots = e^{a\sqrt{-1}}$; itaque summa realium praeter terminum primum ~ -2 , et summa pure imaginariorum ~ 0 . Innumerabilium valorum ipsius a unus est π : adeoque $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$, et $\pi\sqrt{-1}$ est unus logarithmorum nat. innumerabilium ipsius -1 ; atque $\pi = \frac{\text{lognat}(-1)}{\sqrt{-1}}$; quod tamen nihil quoad quantitatem ipsius π determinat, quum $\text{lognat}(-1)$ jam involvat eam, neque aliunde notus sit.

3tio. Pro $a = 1 = \text{radio}$; est $\cos 1 + \sqrt{-1} \cdot \sin 1 = e^{1\sqrt{-1}} = 1 + \sqrt{-1} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\sqrt{-1}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$, et $\sqrt{-1} = \text{lognat}(\cos 1 + \sqrt{-1} \cdot \sin 1)$ atque $e = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} (\cos 1 + \sqrt{-1} \cdot \sin 1)$. Itaque $e^{\sqrt{-1}} =$

$1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} \dots$ (p.105). Patetque omnia in intuitu exhiberi: imo quum pure imaginaria a realibus nonnisi determinatione differant, ut $\sqrt{-1}$ a $-vis$; et majoritatis minoritatisque sensus (p. 21) ad pure imaginaria cum realibus comparata, extendi potest.

4to. Pro $\cos a = 0$, et $\sin a = 1$, est $e^{a\sqrt{-1}} = \cos a + \sqrt{-1} \sin a = \sqrt{-1} = 1 + a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3\sqrt{-1}}{2.3} \dots$, adeoque pars realis ~ 0 , et pars imaginaria $\sim \sqrt{-1}$; atque $\sqrt{-1} = e^{a\sqrt{-1}}$, et $a\sqrt{-1} = \lognat \sqrt{-1}$.

5to. Si vero (in 4to) sit $a\sqrt{-1}$ superius c , et b sit $\sqrt{-1}$; erit $bc = a\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -a$, atque C superius $= e^c = e^{a\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$, et $e^{bc} = 1 - a + \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{2.3} \dots = (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$, et $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} e^{-a}$

Est vero $\frac{\pi}{2}$ talis valor ipsius a , uti in 4to requiritur, imo (pro n integro quovis) $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ tale cst.

* 6to. Solet etiam ex $\cos a + \sqrt{-1} \sin a = e^{a\sqrt{-1}}$ sequens deduci.

Est nempe (p. 172) $e^{a\sqrt{-1}} - \cos a = \sqrt{-1} \sin a$. $\sqrt{1 - (\cos a)^2}$; et hinc (elevando ad 2) est

$$e^{2a\sqrt{-1}} + (\cos a)^2 - 2e^{a\sqrt{-1}} \cdot \cos a = -1 + (\cos a)^2;$$

adeoque $2e^{a\sqrt{-1}} \cdot \cos a = 1 + e^{a\sqrt{-1}}$; consequi $\cos a$

$$= \frac{1}{2e^{a\sqrt{-1}}} + \frac{e^{a\sqrt{-1}}}{2} = \frac{e^{-a\sqrt{-1}}}{2} + \frac{e^{a\sqrt{-1}}}{2} = \frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$$

Hinc etiam substituendo $\cos a + \sqrt{-1} \sin a$ ipsi $e^{a\sqrt{-1}}$, est $\frac{\cos a + \sqrt{-1} \sin a + e^{-a\sqrt{-1}}}{2} = \cos a$; et

hinc $\sqrt{-1} \sin a = \cos a - e^{-a\sqrt{-1}} = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$

$- e^{-a\sqrt{-1}} = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$; consequ. $\sin a =$

$$\frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Quae formulae sinum cosinumque ita exhibent, ut per $e^{a\sqrt{-1}}$ limes summae seriei $1 + a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2}$

$- \frac{a^3}{2.3} \sqrt{-1} \dots$, per $e^{-a\sqrt{-1}}$ vero limes summae

ipsius $1 - a\sqrt{-1} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^3\sqrt{-1}}{2.3} \dots$ intelligatur.

* 7mo. Quum ut jam saepius dictum est, pure imaginaria a realibus nonnisi determinatione alia differant: possunt quantitates pure imaginariae in Geometria exhiberi, certo modo a realibus distinctae. Et facile patet, aequationem circuli pro diametro $= 1$, nempe $y = \sqrt{(x-x^2)}$, exhibere valoribus pure imaginariis hyperbolam aequilateram, aequationem ellypseos vero omnes hyperbolas (quoad formam); uti aequatio hyperbolae aequilaterae exhibet circulum pro valoribus pure imaginariis (ex gr. serie punctorum, aut alio colore a reali distingvendum), et aequatio hyperbolae generalis, exhibet omnes ellypses (sensu dicto); aequatio parabolae, dat quoad valores pure imaginarios quoque, parabolam quoad formam aequalem, quasi imaginem virtuales sibi aequalem; in prioribus vero imaginariorum forma realibus contraria erat.

8vo. Si logarithmi sensu elementari accipiantur: est etiam $\log -2 - \log -3 = \log \left(\frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \right)$; at si

logarithmus sensu dicto veniat, tum $\log -2 - \log$

$=) \log e^{1/2 + \pi \sqrt{-1}} - 1 - (\log e^{1/3 + \pi \sqrt{-1}} - 1)$ (p.175); at si (e.g) in posteriore 3π sit, logarithmus realis ipsius $\frac{2}{3}$

haud exhibetur. Vide infra in differentiatione logarithmi, atque in explicatione spatiorum hyperbolae asymptoticorum.

§. 36. Filum sectione praecedente certo respectu interruptum, tandem ulterius continuatur: ut Tyrones ex imis radicibus arborem scientiae cum praecipuis ejus ramis excrecentibus, in lucem exsurgere, cernant.

Mens abstrahendo varia, abstractaque vario modo componens; de omnium illarum operationum, quae ante sectionem praec. prodierant, omnimoda compositione, ad conceptum generaliore ascendit: nimirum qualiumvis operationum, quae in tempore spatiove suscipi possunt, qualibusvis afficiantur quantitates; expressio id denotans (nomine a *Leibnitio* introducto) vocatur *functio*, et quidem *sensu lato* quantitatis cujusvis, quae in expressione adest, *strictius* autem tantum quantitatis variabilis quae in expressione est, aut plurimum, si plures adsint. Variabiles plerumque postremis alphabeti literis x, y --- imo p, q --- denotantur, constantes prioribus, nisi aliud monitum fuerit: intelligitur autem per *variabilem* ex gr x , certum quantitatum genus, quas nomine generali x denotare libet; ita ut ipsi x quaevis quantitas sub eo genere contenta, in expressione substitui possit, nisi id pro certa quaestione aut conditione aliquatenus restringatur; *constans* vero est, quae utcumque mutata variabili, id est ex gr. ipsi x quidvis substituatur, eadem manet.

Quum heic, (veluti in oceanum omnia confluant, ut inde sublata in altum variis phaenomenis redeant), innumeris functionis modis campus ∞ tus aperiat: primum est vias prospectusque ejus patefientes sequi.

Nimirum si quantitates quarum genus x est, nulla alia operatione afficiantur, nisi quod sub certa conditione acceptae post se invicem ponantur: oritur *Theoria combinationum* Ex gr. conditio esse potest; ut ex 5 rebus, quarum genus x est, accipiantur duae: ita quoad ordinem aliqua determinatio esse potest, aut ordo in censum non vocatur (p.138); et quaeri potest, quotnam et qui sint functionis valores.

Si vero quantitates operationibus arithmeticis (geometricisve) aut aliis quoque connexae sint; variabilis quaevis erit genus, aut omnis quantitatis (sive realis sive imaginariae); aut non omnis, sed tantum realium, imo tantum numerorum integrorum aut illarum tantum quantitatum, quae a valore certo a usque ad valorem b (inclusive) sunt; aut denique variabilis genus certarum functionum esse potest.

In quovis dictorum casuum, ultro succurrit inquirere.

1mo. Pro certa functionis conditione, in variabilium valores (qualitatesque).

2do. Pro certa variabilium conditione, in functionis valorem (qualitatemque).

3tio. Pro certa functionis qualitate, quicumque fuerit (absque aut sub certa conditione) valor quantitatis variabilis; in certorum functionem constituentium qualitatem.

4to. Pro certorum functionem constituentium certa qualitate; in functionis qualitatem.

Ex gr. Si in 1mo conditio ea sit, ut valor functionis o sit: quaeritur, num detur talis quantitas, quae si variabili substituitur, functio $=o$ fiat? et quotnam qualesque dentur? Ita si plures insint functioni variables. Huc pertinet *problema aequationum*; ex gr. $x^2 - x - 2 = 0$ nonnisi pro $x=2$, et $x=-1$ est. Praeter alias conditio esse potest; ut valor functionis *maximus* vel *minimus* fiat; quaeque, num detur ejusmodi valor, qui si va-

variabili substituatur, functionis valor maximus vel minimus omnium ejus valorum fiat?

Si vero variabilis ipsa in functione genus certarum functionum sit; et quaeratur talis, quae si variabili substituatur, functio certa qualitate praedita sit: *calculus variationum* dicitur. Ex gr. dum linearum aream certam claudentium minima quaeritur (sub hac vel illa conditione).

Si variabilis quaevis nonnisi integros denotet: quaestiones e superioribus promanantes naturam numerorum concernunt. Si ex gr. functio sit $4x+1$, et x tale sit, ut $4x+1$ numerus primus sit; functio gaudebit illa qualitate, ut duorum integrorum ad 2 elevatorum summa sit, (et quidem unico tantum modo) at non ut hac qualitate gaudeat, primus esse debet. Ramus hic Arithmeticae immensus sagacitatem ingenii maximam postulans, flores fructusque veritatis purae aeternaeque praebet. Vide opus immortale *Disquisitiones Arithmeticae Auctore C. F. GAVSS* 1801 *Lipsiae*.

Ad 3tium. pertinet: quod si $Ax^a + Bx^b - - -$ pro quovis valore ipsius x , sit $=0$; quilibet coefficientium est $=0$.

E 2do. vero, pluribus modis calculus differentialis originem capit, et variae promanant series: si nempe conditio ea sit, ut in functione ipsius x substituatur ipsi x , (generi omnis quantitatis, quae est a 0 usque ad α), prius $\frac{\alpha}{n}$, tum $\frac{2\alpha}{n}$, dein $\frac{3\alpha}{n}$ et ita porro usque ad $\frac{n\alpha}{n}$. Attamen ut clarius exponatur, prius distinctio denotatioque functionum praemittenda.

Imo. Functio cujus valor, pro quovis determinato valore variabilis quae in ea est, numerabilibus ejusmodi operationibus prodit, quarum quaevis est addere, aut multiplicare (imo etiam radicem gradus commens. extrahere); dicitur *algebraica*: si vero

valor dictus nonnisi innumerabilibus ejusmodi operationibus reperiatur, functio *transcendens* audit.

Dicitur porro *quoad valores, functio mformis*, si valores ejus numero m sint (pro determinato valore variabilis in ea). Ex gr. $\sqrt{x}$ est functio biformis. Si vero $x=a$ per integrum n dividatur, et $n \sim \infty$, dicitur *variabilis x absoluta*; atque si valor functionis ipstus x (pro valore eodem ipsius x) pro quovis n sit idem, *functio absoluta* dicitur Egr. (Fig 19) $F \dagger G \dagger H \dagger f \dagger g \dagger h$ mutato n mutatur.

2do. Solet vero functio variabilium x vel x, y denotari, per $f(x)$, $F(x, y \dots) \dots$, literis parenthesi praepositis forma functionis denotata; et quidem ita, ut si per $f(x)$ denotetur ex gr. $ax^2 + bx - c$, tum $f(a)$ denotet $a.a^2 + b.a - c$, et $f(o)$ denotet $a.o^2 + b.o - c = -c$; substituendo nempe ubique ipsi x , in casu primo a , et o in 2do. Ita si $f(x) = x^m$, sit $f(x \dagger \omega) = (x \dagger \omega)^m$; et si $F(x, y) = \alpha xy$, sit $F(x \dagger \omega, b) = \alpha(x \dagger \omega)b$; unde et casus alii patent.

Interim ut Tyrones, partim per literas antepositas factores, per superius ad dextram positas vero (quod etiam fieri solet) exponentes intelligere consueti, minus confundantur; et partim tradenda clarius discernendo facilius percipere queant: liceat diversas functionum formas ipsas arcubus, penitus aut magis minusve, supra vel infra aut circumcirca literam numerum aliudve signum clausis, denotare; ea cum determinatione, ut signum ita inclusum per id quod clausum est, amittat vim quidquam aliud praeter functionis formam denotandi, etsi non clausum aliudquid denotaret.

Ex gr. $\odot x$, $\ominus x, y \dots$, $\textcircled{A} x$, $(A)x$, $(B)x$, $(F)x$, $(U)x$, $(a)x$, $(b)x$, $(f)x$, $(u)x \dots$, &c, functiones quasvis significare possunt. Ita $(s)x$ potest sinum arcus x , $(\infty)x$ sinum versum, $(t)x$ tangentem, $(s)x$ secantem, $(S)x$ cosinum, $(\infty)x$ cosinum versum, $(T)x$ cotangentem, $(\S)x$ cosecantem; quorum pleraque uno calami tractu scribi possunt.

Ita si x sit $\sin x$, arcus ipsius x per $(a,s)x$, et si u sit $\tan x$, arcus ipsius u per $(a,t)u$; ita loquat y

per (l)y, log vulg y per (L)y, et numerus cujus logarithmus z est, per (n,l)z, vel (n,L)z, denotari potest.

Ita mox dicenda modo sequente significari possunt. *Differentiale absolutum* ntum functionis variabilium x , vel x, y --- quod per $d^n f(x, \dots)$ denotari solet, scribi potest ${}^n \bigcirc x$ ---, vel si $n=1$, tantum $\bigcirc x$ ---. *Differentiale* ntum quoad x vero per ${}^n \bigcirc_x x, y$ --- vel per $\bigcirc_x^n x, y$ aut

$\bigcirc_{n,x} x, y$, et si $n=1$, per $\bigcirc_x x, y$ ---, ita *differentialis* sinus x quoad cotangentem per $\bigcirc_x (s)x$, (*t cotangentem significante) denotari potest.

Ita *coefficientis* vel *quotiens differentialis absolutus* ntus, qui vulgo $\frac{d^n f(x)}{(dx)^n}$, juxta La Grange vero $f^n(x)$, (et pro $n=1$) $f'(x)$, (pro $n=2$) $f''(x)$, scribitur; denotari per $\bigcirc x$, $\bigcirc x$, $\bigcirc x$ --- aut $\int \bigcirc x$ vel ${}^n \int \bigcirc x$ potest. Si vero quoad x sit, ${}^n \bigcirc_x x$ --- vel $\int_x^n \bigcirc x$ --- aut $\bigcirc_{n,x} x$ --- scribi potest; et ntus coeff. diff. quoad z mti coefficientis diff. quoad x accepti, per $\bigcirc_{n,z}^m x$ --- vel ${}^n \int_z^m \bigcirc x$ --- aut $\int_z^{n,m} \bigcirc x$ --- significari. Ita si $\bigcirc x$ --- dicatur ex gr. X; quid $\bigcirc X$, $\int X$, $\bigcirc_{m,m,x} X$, $\bigcirc_{m,x} X$, $\bigcirc_{n,z} X$ significet, patet: Integrale denotatur per $\int$ praepositum differentiali; potestque tantum coefficienti differentiali praeponi: si is ex gr. 1 sit, scribi potest $\int_x 1$, idest integrale quoad x , ipsius 1 tanquam coefficientis differentialis.

Si vero variabili functio certa substituatur, scribi $\bigcirc x$ --- aut (A) (B)x --- vel (A) [(B)x, (c)y ---]

potest; et si $(A)(A)(A)x$ esset, per $(A)^3x$ significari potest, quum (A) non quantitatem denotet, adeoque numerus haud exponens sit; uti $(A)x)^3$ denotat 3tiam functionis potentiam. Patet hinc $\int^2$ denotare $\iint$

Si nulla variabilis postponatur; potest (A) (ita $\overset{n}{n}$ (U) vel aliud) terminum n um certae seriei denotare,

3tio. Si jam substituatur in $(A)x$, $x+i$ ipsi x , ut sit $(A)(x+i)$; quaeritur, expressio prior valorque ejus quomodo mutetur? Vocatur hoc *Theorema Tayloriarum*; cujus unus casus est binomialle, si nempe $(A)x = x^p$.

Reflectere ad augmentum $(+ \text{ vel } -)$ valoris functionis, primum est; imo id etiam cum augmento ipsius x comparare, et tum comparisonem istam inter augmenta simultanea ipsius x et functionis, ad diversos valores ipsius i extendere. Casus se offerebant tales, ubi ratio augmentorum simultaneorum, pro quantovis i eadem manet, et alii ubi mutatur, sed decrescente i ad aliquam functionem ipsius x propius venit, imo $\frac{(A)(x+i)}{i} \sim$

$(A)'x$ dum $i \sim 0$. Hoc est, quod *Newton* rationem primam vel ultimam augmentorum nascentium vel evanescentium dixit; hac via *calculus* quem *fluxionum* dixit, reperiens. Insignis certe limes iste est, ad quem quotus dictus tendit, priusquam omnino dividendus aut divisor $= 0$ fieret, qui plane supponantur ita decrescere, ut zerum nunquam attingant: naturam enim eorum, quae per functionem determinantur (ex gr. curvae &c), quasi in germine continet; quod jam *Barrow* (cujus *Newton* discipulus fuit) animadverterat. Est vero hoc quod supra per $\int(A)x$ scriptum est, et coefficientis differentialis dictum est.

4to. Quidsi ipsi $\dot{x}$ substituatur prius o , dein $\frac{x}{n}$ tum $\frac{2x}{n}$, et ita porro usque ad $\frac{nx}{n}$; ultro succurrit, functione ita mutata, a quovis ad sequentem eundo, augmenta, adeoque seriem augmentorum considerare. Denotetur $\frac{x}{n}$ per $\dot{x}$, accipiendo certum valorem α ipsius x : erunt valores functionis sequ.

$$(A)o\dot{x}, (A)1\dot{x}, (A)2\dot{x} \dots (A)(n-1)\dot{x}, (A)n\dot{x}, \text{ id est } (A)o, (A)\frac{\alpha}{n}, (A)\frac{2\alpha}{n} \dots (A)(n-1)\frac{\alpha}{n}, (A)n\frac{\alpha}{n};$$

atque series augmentorum erit a fine incipiendo $(A)n\dot{x} - (A)(n-1)\dot{x}, \dots (A)2\dot{x} - (A)\dot{x}, (A)\dot{x} - (A)o$; ubi *terminus seriei generalis* obviam venit; nempe si in $(A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x}$ ipsi m quicunque integer k ab 1 usque ad n (inclusive), substituatur, prodit terminus seriei k tus ex gr. $(A)3\dot{x} - (A)(3-2)\dot{x}$ est a primo incipiendo (inclusive) 3tius. Patet etiam summam seriei, terminis intermediis se invicem destruentibus, esse $(A)n\dot{x} - (A)o = (A)x - (A)o$ nempe *summam incrementorum*, quae ipsi $(A)o$ usque ad $(A)x$ (inclusive) accessit; uti pro $n=3$, Fig. 18 ostendit.

Series incrementorum ejusmodi, (terminorum numero certo n) e functione aliqua $(A)x$ modo dicto derivata; dicatur breviter *series* ex $(A)x$ -- *derivata*; ant brevius *series ipsius* $(A)x$ --, et terminus generalis hujus, nempe $(A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x}$ dicatur breviter terminus generalis ipsius $(A)x$ --

5to. Porro alia functio quoque se offerebat, e qua derivatae seriei totidem terminorum, cujusvis m ti termini ad terminum m tum prioris, (adeoque termini generalis hujus ad terminum generalem prioris) relatio certa eadem palam fuit: quo sectiones simultaneae Archimedis (rite intellectae) viam patefecerant: sed lingua generalitatis nondum fari ceperat. Cártesius dedit pennas, quibus

crementibus oceani continentisque genii, e graeco nido coelipeti tractu evolarunt.

Si nimirum functionum absolutarum $(A)x$ et $(B)x$ serierum termini generales, nempe $(A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x}$, et $(B)m\dot{x} - (B)(m-1)\dot{x}$ denotentur per $(a)m\dot{x}$, et $(b)m\dot{x}$, (aut brevius per $(a)x$ et $(b)x$), summa seriei ipsius $(A)x$ autem dicatur A , et B sit summa seriei ipsius $(B)x$; ut sit nempe $A = (A)x - (A)o$, et $B = (B)x - (B)o$; atque pro eodem n , quodvis $(b)m\dot{x} = \beta (a)m\dot{x}$, adeoque $\frac{(b)m\dot{x}}{(a)m\dot{x}} = \beta$, quicumque numerus ab 1 usque ad n (inclusive) substituatur ipsi m : manifesto est $B = \beta A$; atque si $\frac{(b)m\dot{x}}{(a)m\dot{x}} = 1$, tum $B = A$; nempe $(A)x - (A)o = (B)x - (B)o$, adeoque $(A)x = (B)x - (B)o + (A)o$.

Hinc talibus casibus venientibus, ubi $(u)m\dot{x}$ (nempe terminus generalis seriei e functione non absoluta $(U)x$ derivatae, cujus seriei summa dicatur U , talis est, ut $\frac{(u)m\dot{x}}{(a)m\dot{x}}$ quidem non $= 1$, sed aucto n , ipsi 1 propius accedit: facilis passus erat quaerere; num dato quovis ω propius ire queat? id est, num detur tale n (idem pro omnibus terminis), ut quicumque numerus (ab 1 usque ad n inclusive) substituatur ipsi m , sit $\frac{(u)m\dot{x}}{(a)m\dot{x}} - 1 < \omega$?

In pluribus casibus ita esse patebat: et nova quaestio ultro exorta est; num si in $\frac{(u)m\dot{x}}{(a)m\dot{x}} = 1$, loco signi $=$ signum $\sim$ tantum locum habeat, pro $U=A$ fiat $U \sim A$? Responsio in promptu erat:

Si nempe $(A)x$ functio absoluta sit, adeoque A pro quovis n maneat idem, atque pro quantovis N , detur tale n idem pro omnibus, ut $\frac{(u)m\dot{x}}{(a)m\dot{x}} - 1$

sit $< \frac{1}{N}$: erit

$$(u)m\dot{x} - (a)m\dot{x} < \frac{(a)m\dot{x}}{N}; \text{ et hinc}$$

$$(u)1\dot{x} - (a)1\dot{x} < \frac{(a)1\dot{x}}{N}$$

$$(u)2\dot{x} - (a)2\dot{x} < \frac{(a)2\dot{x}}{N}$$

$$(u)3\dot{x} - (a)3\dot{x} < \frac{(a)3\dot{x}}{N}$$

...

$(u)n\dot{x} - (a)n\dot{x} < \frac{(a)n\dot{x}}{N}$; consequ. summa columnarum verticalium priorum duarum, est minor quam summa columnae verticalis 3tiae: id est $U - A < \frac{A}{N}$; itaque $U - A \sim 0$, et $U \sim A$; id est A limes ipsius U est.

Ex gr. Si (Fig 19) $(A)x = F + G + H$, et sit (pro $n = 3$) $(a)1\dot{x} = F$, $(a)2\dot{x} = G$, $(a)3\dot{x} = H$, et $(u)1\dot{x} = F + f$, $(u)2\dot{x} = G + g$, $(u)3\dot{x} = H + h$, nempe $(U)3\dot{x} = F + f + G + g + H + h$, $(U)2\dot{x} = F + f + G + g$, $(U)1\dot{x} = F + f$, $(U)0 = 0$; tum si pro $N = 7$ sit $\frac{(u)m\dot{x}}{(a)m\dot{x}}$

$$- 1 < \frac{1}{N}, \text{ id est}$$

$$(H + h - H = h) < \frac{H}{7}$$

$$(G + g - G = g) < \frac{G}{7}$$

$$(F + f - F = f) < \frac{F}{7};$$

$$\text{esset } H + h + G + g + F + f - (F + G + H) \text{ (sen } f + g + h) < \frac{F + G + H}{7}; \text{ et si pro } N \text{ utvis magno, daretur ta-}$$

le n idem pro omnibus terminis, ut schema hoc valeat, scribendo in primam columnam verticalem terminos seriei ipsius $(U)x$, in 2dam terminos

simultaneos ipsius $(A)x$, atque in 3am quoque hos per N divisos; manifesto esset $U - A \sim a$, et $U \sim A$, dum $n \sim \infty$. In Fig 19 facile patet, pro quovis N posse n ita augeri, ut quodvis ipsorum $f, g, h \dots$ sit $<$ litera magna nominis ejusdem per N divisa, (et quidem pro eodem n). Nempe si ordinata 1ma dicatur y , et 2da ad laevam sit $y - \omega$ erit $h < \omega \dot{x}$, et $(y - \omega) \dot{x} < H$; atque si $\omega < \frac{y - \omega}{N}$,

erit et $\omega \dot{x} < \frac{(y - \omega) \dot{x}}{N}$; conseq. $h < \frac{H}{N}$. Poterit

vero si (ex. gr.) ab recta sit, quodvis ω (pro eodem n et certa constante β) per $\beta \dot{x}$ exprimi;

et si $n < \frac{N\beta \dot{x}}{a}$ accipiatur, quaevis litera parva erit

$<$ litera magna nominis ejusdem per N divisa: nam tum quivis numerus ab 1 usque ad n substituitur ipsi m ; erit pro ordinata $a + \beta m \dot{x}$ ipsi $m \dot{x}$

respondente, $\frac{\omega}{a + \beta m \dot{x}} = \frac{\beta \dot{x}}{a + \beta m \dot{x}} = \frac{\beta x}{n} : \frac{na + \beta m x}{n} =$

$\frac{\beta x}{na + \beta m x}$, quod item valore dicto ipsi n substituto,

est $= \beta x : \frac{N\beta x a + \beta m x a}{a} = \frac{a\beta x}{N\beta x a + \beta m x a} = \frac{1}{N + m} < \frac{1}{N}$.

6to. Saepissime tamen est, ut non detur pro dato N tale n , ut quodvis $\frac{(u)m \dot{x} - (a)m \dot{x}}{(a)m \dot{x}} < \frac{1}{N}$ sit,

nisi m ita accipiatur, ut $m \dot{x}$ non sit $< zx$, at z dabili quovis minus accipi queat. (Ex. gr.) (Fig. 20) est pro $m = 1$, $f = F$, pro $m = 2$ est $g = \frac{G}{3}$, pro $m = 3$ est $h = \frac{H}{5}$, et ita porro, ut quan-

tusvis sit N , primi denominatores sint 1, 3, 5 ... At vero quantumvis exiguum sit z , (adeoque zx), si omne $m \dot{x}$ quod non $< zx$ et non $> n \dot{x}$, dicatur q ; erunt duae ordinatae proximae βq et $\beta(q - x)$,

et $\omega = \beta \dot{x}$; atque $\frac{\omega \dot{x}}{\beta(q - \dot{x}) \dot{x}} = \frac{\beta \dot{x}}{\beta(q - \dot{x})} = \frac{x}{nq - x}$, quod

item si $n = \text{aut} > \frac{(N+2)x}{q}$ accipiatur, est $< \frac{1}{N}$:

nempe substituendo ipsi n , fiet $\frac{x}{nq-x} = (\text{aut} <)$

$$s: \frac{(N+2)xq-qx}{q}, \text{ quod} = \frac{xq}{(N+2)xq-qx} = \frac{1}{N+2-1} \\ = \frac{1}{N+1}, \text{ quod est} < \frac{1}{N}.$$

Est quoque hoc tanto fortius, si n adhuc majus accipiatur. Valent itaque superius dicta omnia de $(u)m\dot{x}$ et $(a)m\dot{x}$ simultaneis ultra xx acceptis omnibus.

Hinc si demonstretur, quod pro quovis N detur tale n (idem pro terminis omnibus) ut pro x utvis parvo sed determinato, sit generaliter

$$\frac{(U)q-(U)(q-\dot{x})-[(A)q-(A)(q-\dot{x})]}{(A)q-(A)(q-\dot{x})} = 0, \text{ aut} <$$

$\frac{1}{N}$; erit manifesto $(U)x-(U)xx \sim (A)x-(A)xx$;

atque si $(U)xx-(U)0$, et $(A)xx-(A)0 \sim 0$, etiam $(U)x-(U)0 \sim (A)x-(A)0$.

Dicantur vero $(U)q-(U)(q-\dot{x})$ et $(A)q-(A)(q-\dot{x})$ *aequipollentia*; denotarique id per signum $\equiv$ interjectum potest.

7mo. At quaeritur; num inde quod pro dato quovis N et dato quovis q (quod non $< xx$ et non $> x$ est) detur tale n , omnino finitum, ut

$$\frac{(U)q-(U)(q-\dot{x})}{(A)q-(A)(q-\dot{x})} - 1 \text{ sit} < \frac{1}{N}; \text{ sequatur, dari } n$$

integrum (eundem pro omnibus) talem, ut $(u)m\dot{x} - (a)m\dot{x}$ sit $< \frac{(a)m\dot{x}}{N}$, quicumque numerus ab 1 us-

que ad n (inclusive) substituatur ipsi m , dummodo $m\dot{x}$ non sit $< xx$?

Cogitetur punctum e fine dati xx porro ferri in x usque ad finem hujus; et quaeratur ubique, num

detur pro illo q tale n finitum, ut $\frac{(U)q-(U)(q-\dot{x})}{(A)q-(A)(q-\dot{x})}$

$-1 \text{ sit } < \frac{1}{N}$; et eo quo majus non est omnium finitorum n (quasi quodvis n tanquam ordinata finita e loco puncti cogitatione lati, tanquam fine ipsius q erecta esset), accipiatur numerus integer quantovis major: erit iste integer quaesitum n ; nam tum $\dot{x}$ adhuc minus erit, quam pro quovis q requiritur; et facile in quovis casu patet, quo minus $\dot{x}$, id est quo majus n est, omnia superius dicta tanto fortius valere; quum nonnisi ab aucto n dependeat ut sit $\frac{(U)q - (U)(q - \dot{x})}{(A)q - (A)(q - \dot{x})} - 1 < \frac{1}{N}$.

8vo. Sed et alia functio absoluta $(B)x$ obviam venire poterat (pro eodem x); e qua derivatae seriei termino generali $(b)m\dot{x}$ dicto, $\frac{(u)m\dot{x}}{(b)m\dot{x}} - 1 <$

$\frac{1}{N}$ fieri possit, quicumque numerus substituaturs ipsi m ab 1 usque ad n (saltem si $m\dot{x}$ non $< xx$ nec $> x$), et quidem pro eodem n ; et patebat, esse $U \sim B$ (summa seriei ipsius $(B)x$ per B denotata), atque quum etiam $U \sim A$, esse $A=B$.

Unde manifesto $(A)x - (A)o = (B)x - (B)o$; consequ $(A)x = (B)x - (B)o + (A)o$. Dicitur $(A)x$ integrale ipsius $(u)x$, designaturque per $\int (u)x$; et $(u)x$ differentiale tam ipsius $(A)x$ quam ipsius $(B)x$ audit, (per $(u)x$ nonnisi $(u)m\dot{x}$ sensu superiore intelligendo); atque quum $(A)o - (B)o$ constans sit, scribitur $\int (u)x = (B)x + \text{const.}$ (vel $(B)x + c$), et constantis valor quaeritur. Si ex gr. $(A)x = \int \dot{x}(1+x)^{-2} + c = (B)x - (B)o + (A)o$, et $(A)o \text{ sit } = a$; erit $(A)x = -(1+x)^{-1} - 1 + a$; nam patebit infra esse $d[-(1+x)^{-1}] = (1+x)^{-2}\dot{x}$, et tum $(B)o \text{ est } -(1+o)^{-1} = -1$; consequ. $(A)x = \frac{-1}{1+x}$, $+1+a = a + \frac{x}{1+x} = (\frac{x}{1+x})$ si $(A)o = o$).

Potest etiam $(B)0=0$ esse; ex gr. $(1+x)^{-2}x$ est differentiale etiam alius functionis, nempe ipsius $\frac{x}{1+x}$ quoque; et si pro $(B)x$ hoc accipiatur; erit

$(B)0 = \frac{0}{1} = 0$, et constans erit $a-0=a=0$ si e $(A)0=0$.

Interim $\frac{-1}{1+x}$ et $\frac{x}{1+x}$ nonnisi constante 1 differunt.

Constans autem innotescet si pro valore aliquo α ipsius x , (de quo valent quae dicta sunt, nempe ut sit $(A)\alpha=(B)\alpha-(B)0+(A)0$ constans nota sit, ut sit $(A)\alpha=(B)\alpha+k$; erit $(A)0-(B)0=k$; adeoque pro quovis valore tali β ipsius x , ut sit $(A)\beta=(B)\beta-(B)0+(A)0$, eadem constans k nota erit.

* Si autem fuerit $(A)0=a'$, et $(A)b=b'$, adeoque $\int (u)\alpha=a'+c$, et $\int (u)\beta=b'+c$, et $a < b$ sit: erit $\int (u)b - \int (u)\alpha = b' - a'$, parti a fine ipsius a usque ad finem ipsius b appertinenti aequalis. Dicuntur in tali casu a et b *limites integralis*, et *integrale ab a ad b usque extendi* dicitur.

9^{no} Unus solus casus, ubi e functione quadam absoluta $(A)x$, (cujus valor ignotus erat) derivatae seriei incrementorum, terminus generalis aequipollebat termino generali seriei incrementorum functionis absolutae $(B)x$, cujus valor notus erat, atque per id valor prioris innotuit: protinus viam ad aliarum functionum quoque, quarum valor notus est, terminos generales quaerendos aperuit, eosque cum terminis generalibus functionum, quarum valor ignotus erat comparare induxit; ut si quis priorum terminorum generalium, alicui posteriorum aequipolleret, functionis valor ignotus innotescat. Dicitur $(B)x$ *functio summatrix*, per quam $(A)x$ innotescit; $(a)mx$ id est $(A)mx - (A)(m-1)x$ vero *differentiale verum* seu *elementum* ipsius $(A)x$ uti $(b)mx$ ipsius $(B)x$ audit: atque si $(u)mx$ utrique elemento aequipotheat, et $(u)x$ ita expres-

sum sit, ut $\dot{x}$ nonnisi in prima potentia occurrat, tum $(u)_x$ differentiale strictum (aut tantum differentiale) dicitur; atque functio absoluta $\equiv$ summae omnis ejus, per quod $\dot{x}$ in $(u)_x$ multiplicatum est, coefficientis differentialis sive derivata vocatur, denotata per $J(A)_x$, $J(B)_x$. Vide de aliis literis puncto insignitis inferius Nro 12.

10 Notandum vero est, functionem absolutam $(A)_x$, cujus valor quaeritur aut in concreto exhiberi, aut saepe per limitem tantum functionis cujuscumque exponi: atque in casu postremo limitem ejusmodi dari demonstrandum est.

Utcunque sit, functionis dictae $(A)_x$ differentiale, id est elemento ejus nempe ipsi $(A)_m \dot{x} - (A)_{(m-1)} \dot{x}$ aequipollens expressio forma differentialis stricti praedita reperitur: quaerendo duas functiones $(U)_x$ valore crescente, et $(U)'_x$ valore decrescente, (dum n crescit) tales, ut sit semper $(U)_q - (U)_{(q-\dot{x})} < (A)_q - (A)_{(q-\dot{x})} < (U)'_q - (U)'_{(q-\dot{x})}$, et $(U)_q - (U)_{(q-\dot{x})}$ gaudeat forma differentialis stricti; atque
$$\frac{(U)_q - (U)_{(q-\dot{x})}}{(U)'_q - (U)'_{(q-\dot{x})}}$$

~ 1 , (omnia sensu dicto intelligendo). Tunc enim $(U)_x - (U)_0$ semper $< (A)_x - (A)_0 < (U)'_x - (U)'_0$, et $(U)'_x - (U)'_0 = [(U)_x - (U)_0] \sim 0$; adeoque $U \sim A$.

Functionis summatricis $(B)_x$ vero elemento id est ipsi $(B)_m \dot{x} - (B)_{(m-1)} \dot{x}$ aequipollens differentiale strictum crit $(u)_x$, si forma dicta praedita atque talis sit, ut (sensu dicto)
$$\frac{(u)_q}{(B)_q - (B)_{(q-\dot{x})}}$$

~ 1 .

Exemplis haec facilioribus tam geometricis, quam mechanicis paulo inferius illustrabuntur.

11. Si differentiaalia stricta $\dot{x}u$ et $\dot{x}v$ aequipolleant, adeoque $\frac{\dot{x}u}{\dot{x}v} = \text{vel} \sim 1$; tum $\frac{u}{v}$ quoque $= \text{vel} \sim 1$;

at vero u, v sunt functiones absolutae, pro quovis valore ipsius n valore eodem gaudentes (per praec.),

Itaque $\frac{u}{v}$ non $\sim$ sed $=1$, adeoque $u=v$ est.

Et vicissim si derivatae u, v sint aequales, differentialia stricta quoque sunt aequalia (unam tantum adhuc variabilem x supponendo). Itaque si

$u=(A)_x=(B)_x$, est $(A)_x=(B)_x-(B)_0+(A)_0$, Neque functiones $(A)_x$ et $(A)'_x$ derivata aequali gaudentes praeter constantem differunt. Nam tum $(A)_x=(B)_x-(B)_0+(A)_0$, adeoque $(A)_x$ et $(B)_x$ nonnisi constante differunt.

Sed nec ulla functio $(A)_x$ et ab hac nonnisi constante differens $(B)_x$, inaequalibus derivatis gaudent. Nam tum $(A)_{m\dot{x}}-(A)_{(m-1)\dot{x}}$ et $(B)_{m\dot{x}}-(B)_{(m-1)\dot{x}}$ sunt aequales; quia si constans c sit, quo differunt; et $(A)_x=(B)_x+c$, erit $(A)_{m\dot{x}}-(A)_{(m-1)\dot{x}}=(B)_{m\dot{x}}+c-[(B)_{(m-1)\dot{x}}+c]=(B)_{m\dot{x}}-(B)_{(m-1)\dot{x}}$; cui tam $u_{\dot{x}}$ quam $v_{\dot{x}}$ aequi-pollere nequunt, nisi $u=v$ sit.

Unde nec functiones summatrices, nec integralia differentialium aequalium praeter constantem differunt. Imo evidens est, nonnisi derivatam ipsius $(A)_x$, et functionem summatricem $(B)_x$ quaerendam esse, cujus derivata derivatae ipsius $(A)_x$ aequalis sit; atque si haec u sit, pro $\int u_{\dot{x}}$ brevius $\int u$ scribi posse, si nonnisi x variabilis sit.

* 12. Interim variables plures y, z - - quoque functioni inesse possunt; quae etsi ab x variabili absoluta haud necessario dependeant, in quovis tamen casu cum quovis $m\dot{x}$ tam y quam z - - - per legem certam quantitate certa simul ponuntur; adeoque hoc pacto in dependentia mutua simultanea sunt: adeoque omnes variables quidem in quovis casu, quantitatis determinatae concipiantur; ita tamen, ut nulli casui quidquam (praeter magnitudinem) quod non omni competit, tribuatur; id enim tantum generaliter verum est, quod de quovis casu speciali valet.

Ex gr. Si in plano P sit x (variabilis absoluta) linea recta, in qua abscissae e certo puncto p in

una plaga $\pm$ ve in altera $\mp$ ve accipiantur, et rectae in P ad x L_{res} ab extremitatibus abscissarum dicantur *ordinatae* y , (prouti in unam alteramve abscissae plagam cadunt, $\pm$ ve aut $\mp$ ve acceptae); item L_{res} ab extremitatibus ipsarum y ad planum P erectae; dicantur 2^{dae} ordinatae z , prouti in plani unam alteramve plagam cadunt, $\pm$ ve aut $\mp$ ve acceptae: patet ipsi y ab x , necnon ipsi z ab y , variam dependentiam tribui posse: in quovis tamen casu, tam z quam y in dependentia simultanea a quovis $m\dot{x}$ esse (quicumque numerus ab 1 usque ad n substituatur ipsi m); atque hoc pacto, quodvis spatii punctum determinari posse.

Ita in Mechanica, si vis continuo agens sit w , spatium sub tempore t percursum sit s , et velocitas finalis ad finem temporis t sit v ; ipsi w sive a tempore, sive a velocitate, qua tum gaudet mobile, sive a spatio eousque percurso dependentia certa tribui potest. Quaecunque sint variables $y, z, \dots$ ab absoluta x utcunque (etsi tantum suppositie) dependentes: denotetur illud y quod cum $m\dot{x}$ simul ponitur, per $y_*m\dot{x}$, et illud z quod item tum ponitur, per $z_*m\dot{x}$.

Unde seriei ex $(A)(x, y, \dots)$ functione absoluta derivatae, terminus generalis (differentiale verum ut supra) est $(A)(m\dot{x}, y_*m\dot{x}) - (A)[(m-1)\dot{x}, y_*(m-1)\dot{x}, \dots]$. Denotetur autem $y_*m\dot{x} - y_*(m-1)\dot{x}$ per $\dot{y}$, ita $z_*m\dot{x} - z_*(m-1)\dot{x}$ per $\dot{z}$, uti $m\dot{x} - (m-1)\dot{x} = \dot{x}$: observando, punctum non nisi literae variabilem absolutam denotanti impositum, significare illam per n divisam, (nisi aliunde constet), atque $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots$ semper pro quovis supra dicto et eodem valore ipsius m intelligi. Si jam seriei ex $(A)x, \dots$ (quotvis insint variables) derivatae, terminus generalis $\equiv$ tali expressioni, in qua, si pro $m\dot{x}$ ubique x scribatur, (necnon si adsit $z_*m\dot{x}$, pro eo z scribatur, ita si plures adsint); nulla litera puncto insignita, ut factor ad prima altiore potetiam elevata occurrat: tum talis ex-

pressio (substituto x ipsi $m\dot{x}$, et si adsit, z ipsi $z * m\dot{x}$, &c), dicitur *differentiale strictius* ipsius $(A)x$ -- Summa vero coefficientis omnis, per quem litera puncto insignita multiplicata est, vocatur *coefficientis vel quotiens differentialis*, siue brevius *derivata ipsius* $(A)x$ --

Dum pro $m\dot{x}$, x idest $n\dot{x}$ scribitur: patet n termini ultimi numerum esse; uti seriei arithmeticae terminus generalis, per ultimum nempe $a + (n-1)d$ exprimitur. Nihilominus tamen, ut Tyrones minus confundantur, praecisiusque rem intelligant; ubi necesse est, pro dicto $n\dot{x}$, scribetur $m\dot{x}$; atque etiam ubi dicetur ex gr. $\dot{x}(a)x$ esse $d(A)x$, intelligatur $\dot{x}(a)m\dot{x}$ (sensu p. 185).

13. Si una tantum sit litera puncto insignita, in duobus differentialibus functionis ejusdem, sed non eadem; ex gr. $\dot{z}v \equiv \dot{x}u = dU$, (u, v, U certas functiones denotantibus): tum $\dot{z}v$ dicitur *differentiale quoad z* , et $\dot{x}u$ quoad x acceptum; atque v dicatur *derivata ipsius U* quoad z , et u derivata quoad x accepta, denoteturque differentiale strictius per d , derivata vero per $\int$, (annotando quoad x vel z &c). Est quoque manifesto $\dot{z} = 1\dot{z} = z^0\dot{z} = dz$ (quoad z), uti $\dot{x}$ est dx (quoad x); atque utrumque tam verum quam strictum differentiale est; nempe $\dot{z} = z * m\dot{x} - z * (m-1)\dot{x}$. Ita quum constans a cum quovis $m\dot{x}$ ponatur, differentiale constantis est 0 , nempe $a * m\dot{x} - a * (m-1)\dot{x} = a - a = 0$; unde et $\int 0 =$ quantitati cuilibet.

14. Si v nullam aliam variabilem nisi z complectatur, $\dot{z}v$ *differentiale purum* audit; ita $\dot{x}u$ si u nullam aliam nisi x complectatur: atque ita v et u *derivatae purae* sunt: patetque integrale ipsius $\dot{z}v$ esse functionem illam (ab Ill. LA GRANGE *primitivam* dictam) cujus derivata est v (quoad z) Ubi itaque nulla litera puncto insignita est in expressione aliqua ex gr $(a)z$, una tantum variabili ex gr. z gaudente: si ei signum $\int$ praeponatur, intelligatur per $\int (a)z$, functio illa primitiva cujus derivata quoad z est $(a)z$; id est plane id

quod $\int \dot{z}(a)z$ denotat (constantem in utroque casu semper addendo): nempe derivata ipsius $\int \dot{z}(a)z$ est $(a)z$ (quoad z accepta).

Si vero p, u item nulla litera puncto insignita affectae sint: per $\int u$ (quoad z) intelligatur $\int u \dot{z}$; atque ut u derivata pura fiat, u per z exprimendum est. Siquidem $\dot{z} \equiv p\dot{v}$, adeoque $u \dot{z} \equiv up\dot{v}$; erit up derivata quoad v ipsius $\int u \dot{z}$, atque haec, functio primitiva quoad v ipsius up , nempe $\int up$ (quoad v) $= \int u$ (quoad z).

15. Si plures insint functioni variables, et accipiat differentialiale derivataque ejus quoad aliquam variabilium, reliquis constantibus suppositis: dicuntur *differentialiale partiale, et derivata partialis quoad illam variabilem*. Patebit mox summam differentialium partialium quoad singulas variables acceptorum esse differentiale ipsum functionis, et idem quoad derivatam probabitur.

16. *Derivata* dicitur *prima* (quod tamen ubi necesse non est, omittitur); et μ tae derivatae prima derivata, dicitur *derivata* $(\mu+1)$ ta *functionis primitivae*, *functio* $(\mu+1)$ ta juxta *La Grange*.

Differentialiale quoque dici solet *primum*, et differentialiale primum μ ti differentialis ita acceptum, ut literae puncto insignitae constantes supponantur, *differentialiale* $(\mu+1)$ tum *functionis primitivae* dici solet. Sed derivatis 1ma, 2da - - - &c omnia juxta Ill. *La Grange* perfici possunt; ad summum derivatae alicujus μ tae differentialiale claritatis gratia adferri potest.

17. Quaecunque variables u, v, z - - fuerint, a certa variabili absoluta (ex gr. x) sive necessario sive per certam in quovis casu conditionem praeepta positione simultanea dependentes: u dicatur $(B)x$, ac v dicatur $(C)x$, et z dicatur $(D)x$; differentialiale verum ipsius u vero (id est $u_* m \dot{x} - u_*(m-1)\dot{x}$ dicatur $(b)x$, ita ipsius $(C)x$ sit $(c)x$, et $(d)x$ ipsius $(D)x$; atque sint $(b)x$ et $(b)'x$ aequivalentia, ita $(c)x$ et $(c)'x$, atque $(d)x$ et $(d)'x$,

nempe $\frac{(b)'x}{(b)x} \sim 1, \frac{(c)'x}{(c)x} \sim 1, \frac{(d)'x}{(d)x} \sim 1$

(pro x ubique $m\dot{x}$ ponendo, et omnia sensu superiore (p.188) intelligendo).

Quoad quâsvis variabilium $u, v, z \dots$ essent differentialia $(b)'x, (c)'x \dots$ accepta, imo etsi non gaudeant forma differentialis stricti; $(b)'x$ ut terminus generalis seriei summam eandem dat, quam $(b)x$; superius (186. seq.) dicta enim applicari possunt. Idem patet, si tam $(b)'x$ quam $(b)x$ per aequalia multiplicentur; imo etsi per aequipollentia multiplicentur; nempe (p. 81) etiam

$\frac{(b)'x \cdot (c)'x}{(b)x \cdot (c)x} \sim 1$, et eadem applicari posse manifestum est, pro x ponendo $m\dot{x}$, et substituendo ipsi m ut supra, ut prodeant termini simultanei $(b)'m\dot{x} \cdot (c)'m\dot{x}$ et $(b)m\dot{x} \cdot (c)m\dot{x}$, pro serie utraque.

Ad quotvis factores aequipollentes, semper uno altius ascendendo, idem extendi patet. Ita (p.81) si aequipollentibus serierum terminis generalibus aequipollentia addantur, prodibunt termini generales summis serierum incrementorum aequalibus gaudentes; nempe $\frac{(b)'x + (c)'x}{(b)x + (c)x} \sim 1$.

Unde etiam differentiale seriei convergentis $(B)x + (C)x \dots$ est summa differentialium functionum singularum. Si nempe $d(B)x$ sit $(b)'x$, et $d(C)x$ sit $(c)'x$ &c, atque summae serierum functionum $(B)x, (C)x \dots$ sint $B, C \dots$, et quas $(b)'x, (c)'x$ dant, sint $B', C' \dots$, atque $B+C \dots \sim S$, et $B'+C' \dots$ sit S' , ac summa totidem terminorum seriei $B+C \dots$ sit $S-\omega$; pro quovis N datur tale n (idem pro quotvis functionibus certo numero acceptis semper), ut $B'+C' \dots - (B+C) \dots$ sit $< \frac{S-\omega}{N}$, sive $S' - (S-\omega) < \frac{S-\omega}{N}$; unde quum $\omega \sim 0$, etiam $S' - S \sim 0$.

Est quoque manifesto derivata summae functionum quoad eandem variabilem (ex gr. x) accepta,

summa derivatarum singularum quoad eandem x acceptarum. Nempe si $d[(B)x + (C)x \dots] = \dot{x}p + \dot{x}q \dots$, est $\int [(B)x + (C)x \dots](\text{quoad } x) = p + q \dots$

Sed e prius dictis id quoque sequitur: quod in quovis termino seriei incrementorum generali, cuiusvis quantitati ei aequipollens (eatenus quod summa per id non mutetur) substitui possit. Itaque si terminus aliquis generalis integrandus sit; poterit in eo, differentiali cuiusvis quodvis aliud, quoad quamvis variabilem acceptum fuerit (dummodo omnia eidem variabili absolutae ut basi respondeant) substitui: imo si toti termino alius aequipollens substituatur, unam tantum variabilem (ex gr. z) continens; differentiale purum erit, termini aequipollentes vero integralia aequalia dabunt (p. 189) (praeter constantem). Imo etiam si tantum derivata accipiatur, functio primitiva quoad z , eadem prodibit.

18. Ut Tyrones (primis elementis aliquantum imbuti) ad sublimiora progredi animos capiant: exemplis quibusdam facilioribus (tam e Geometria quam e Mechanica) applicationem theoriae dictae illustrare libet: prius certarum functionum absolutarum valoris noti, differentialia derivatasque referendo; tum certarum functionum absolutarum, quarum valor quaerendus est, differentialia et derivatas exponendo; atque priora cum posterioribus (juxta p. 183) comparando; ut si aequipollean, valores quaesiti innotescant.

Supponantur (paulo Inferius demonstranda) sequentia. ($x, u, v, z, p \dots$ ut (n. 17) intelligendo).

I. $d au^k \equiv aku^{k-1} \dot{u} [\equiv aku^{k-1} v \dot{x}, \text{ si } v \dot{x} \equiv \dot{u} \text{ p. 196}]$. Ex gr. si $u = bx$ et $k = 3$, erit $d au^k \equiv 3ab^2 x^2 \dot{x}$, nam tum $\dot{u} = b m \dot{x} - b(m-1)\dot{x} = b \dot{x}$.

II. $d(u + v + z \dots) \equiv \dot{u} + \dot{v} + \dot{z} \dots$ (per praec).

III. $d(uv) \equiv v \dot{u} + u \dot{v}$, imo differentiale facti quovis functionum aequipollet summae productorum, e differentiali cujusvis in factum reliquarum.

IV. Ex I et III fit $d[\frac{u}{v} = uv^{-1}] \cong u.(-1v^{-2}) +$

$$+ v^{-1} \dot{u} \cong -\frac{u \dot{v}}{v^2} + \frac{\dot{u}}{v} = \frac{v \dot{u} - u \dot{v}}{v^2}.$$

V. $d \log u \cong \frac{\dot{u}}{u}$, [$\cong \frac{v \ddot{x}}{u}$ pro $v \dot{x} \cong \dot{u}$]. Per log intelligitur log nat, per Log vero *artificialis*.

VI. Hinc Imo si $(A)x$ functio absoluta fuerit, et $(B)x$ sit $= auk$, et $d(A)x \cong auk^{-1} \dot{u} \cong d(B)x$; erit (per I et 189) $(A)x = auk - (B)o + (A)o$; nempe $\int auk^{-1} \dot{u} = auk + \text{const}$ prodibit, si resecto $\dot{u}$, exponenti ipsius u addatur 1, et reliquum (nempe derivata ipsius $(B)x$ (quoad u) per summam dictam dividatur; excepto si $k=0$ sit (per V.); constans vero addenda ei quod hoc pacto prodit, postea quaeritur. Ex gr. si pro u ponatur x , erit $\int x^2 \ddot{x} = \frac{x^3}{3} + \text{const}$, et $\int x x^{-1} = \log x + \text{const}$. (V)

2do. Ex II est $\int (\dot{u} + \dot{v} - -) = \int \dot{u} + \int \dot{v} - - + \text{const}$.

3tio. Ex III est $\int (u \dot{v} + v \dot{u}) = uv + \text{const}$. et ex IV est $\int (\frac{v \dot{u} - u \dot{v}}{v^2}) = \frac{u}{v} + \text{const}$.

4to. Ex V vero est $\int \frac{\dot{u}}{u} = \log u + \text{const}$.

5to. Si vero terminus generalis seriei incrementorum, ut dictum (p. 185) est, sit $(b)m\dot{x}$, et alius seriei, terminus generalis sit $(a)m\dot{x}$, atque $\frac{(b)m\dot{x}}{(a)m\dot{x}} = \beta$; erit $B = \beta A$ (summa prioris B, et posterioris A dicta). Hinc $\int (a)x = \frac{\int (b)x}{\beta} + \text{const}$,

nempe $A = \frac{B}{\beta}$. Ex gr. $\frac{2x\ddot{x}}{x\dot{x}} = 2$, et $2x\ddot{x} = dx^2$ (I),

itaque $\int 2a\dot{x} = x^2$, et $\int x\dot{x} = \frac{x^2}{2}$; ita $\int \frac{x^2 \ddot{x}}{ux^2} = \dots$

$\frac{\log ax^3}{3a}$; nam si (in V) $u = ax^3$, tum du (per I)

$3ax^2\dot{x}$; itaque $\int \frac{3ax^2\dot{x}}{ax^3} = \log ax^3$; est vero $\frac{3ax^2\dot{x}}{ax^3}$;

$$\frac{x^2\dot{x}}{ax^3} = 3a.$$

6to. Sed ex $d \log u \cong \frac{\dot{u}}{u}$, sequitur etiam

$ud \log u \cong \dot{u} \cong du$; per quod functio, etsi variabilis in exponente sit, differentiari potest. Sit ex gr. $u = a^{ax}$; erit $du = a^{ax} \cdot d \log a^{ax} = a^{ax} d(ax \log a)$ (per p.96), quod $= \dot{x} a a^{ax} \log a$.

Hinc $\int a a^{ax} \log a = a^{ax} + \text{const}$; atque $\int a^{ax} = \frac{1}{a \log a}$

$\int a a^{ax} 1 = a = \frac{a^{ax}}{a \log a}$ (per praec). Ita $\int \frac{a a^{ax} \log a}{a^{ax}} =$

$\log a^{ax} + \text{const. (V)}$

7mo. Si terminorum plurium summa ad exponentem $\dot{x}$ vum elevata, sit derivata e talibus terminis constans, qui singuli integrari possunt: tum summa integralium singulorum terminorum, erit integrale totius (p.198); id est summa functionum primitivarum terminorum singulorum tanquam derivatarum erit functio primitiva derivatae datae. Sit nempe $\dot{u} \cong p\dot{x}$, $\dot{v} \cong q\dot{x} \dots$; erit (p. 81) $\dot{u} + \dot{v} \dots \cong p\dot{x} + q\dot{x} \dots$, atque $p + q \dots$ erit derivata (quoad x) ipsius $\int (p\dot{x} + q\dot{x} \dots)$ (p.191). Si autem differentiale sit series infinita convergens formae $\dot{x}(Ax^a + Bx^b \dots)$, (exponente ab aliquo incipiendo unitatem superante, et crescente in ∞ , uti fit per formulam binomii quoque); tum terminis pariter integratis, prodit $\frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} \dots$, quod =

$x \left(\frac{Ax^a}{a+1} + \frac{Bx^b}{b+1} \dots \right)$, quae item series convergens

est, si prior talis sit: nam ab aliquo termino denominator > 1 fit, abinde semper crescens: sit is β , et summa seriei prioris ab illo termino sit s , erit hujus seriei summa ab eodem termino $< \frac{x^s}{\beta}$, eo-

usque autem termini numero certo sunt, neque denominator 0 est (nempe si in (VI.) $k=0$ sit, patet.)

Pro litera puncto insignita vero literam nominis ejusdem signo d praeposito substitui posse, (quoad aequipollentiam, adeoque summam seriei incrementorum, et integrale) evidens (185. &c) est; uti etiam omnia dicta valent (ex 197), si litera puncto insignita ex gr. $\dot{z}$ ex $p\dot{z}$ omissa, coefficientis differentialis p , ut *derivatae quoad z , functio primitiva quoad z* quaeratur; imo si $\dot{z} \equiv \dot{u}$ adeoque $p\dot{z} \equiv pv\dot{u}$; et p ac v per variabilem u exprimatur, adeoque pv derivata pura quoad u fiat; tunc quoque etsi derivata prior quoad z pura non fuerit, hoc pacto quoad u pura reddita est; et erit $\int p\dot{z} = \int pv$ (quoad u) $= \int p$ (quoad z), si $\dot{z} \equiv \dot{u}$ (195).

VII. Ita demonstrabitur paulo inferius.

1mo. Si $(A)x$ aream in plano denotet, inter y, x coordinatas $\perp$ res, et lineam per complexum extremitatum ordinatarum factam, comprehensam: differentiale ejus est $y\dot{x}$, derivata vero y (nempe ordinata abscissae x variabilis absolutae).

2do. Si vero $(A)x$ lineam dictam denotet: derivata ejus quoad x est $[1 + (\dot{y})^2]^{\frac{1}{2}}$, seu $(1 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$ si y derivatam ipsius y (182.) significet.

3tio. Si $(A)x$ soliditatem corporis per revolutionem lineae dictae circa abscissarum lineam orti denotet; derivata ejus quoad x est πy^2 ; et superficiei corporis hujus derivata quoad x est $2\pi y [1 + (\dot{y})^2]^{\frac{1}{2}}$ seu $2\pi y (1 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$

4to. Ita paulo inferius (definiendo prius geometricum *centrum gravitatis*), demonstrabitur, derivatam (quoad abscissam x distantiae centri gravitatis ipsius M a certo plano P extra M cadente, esse

$$\frac{(a+x)JM}{M}, \text{ (per } a \text{ distantiam a } P \text{ talis puncti ipsi-}$$

us M intelligendo, quo nullum ipsi P propius est, per x vero, rectam a (omnino ad P $\perp$ rem, ut lineam abscissarum, pro M quoad illam exprimendo), continuatam intelligendo. Unde distantia ipsa

$$\text{centri gravitatis erit } \frac{\int (a+x)JM}{M}, \text{ quod item} = \frac{1}{M}$$

$\int (a+x)JM$, quia M (constans pro quovis casu) manet idem pro quovis $m\dot{x}$ in serie incrementorum ubique, adeoque et summa tota per M dividitur.

5to. Ita si in motu rectilineo, ad finem spatii s tempore t percursum, velocitas v dicatur, et w vis continuo agens, sive constans sive lege certa variabilis sit, sive ipsius mobilis directione sive ei contraria agat; ponaturque pro mobili, M punctum (vel sphaera massae 1); atque t sit variabilis absoluta, a qua reliquae in quovis casu in dependentia simultanea sunt. Erunt $s_* m \dot{t} - s_*(m-1)\dot{t}$ et $v_* m \dot{t} - v_*(m-1)\dot{t}$, nempe $\dot{s}$ et $\dot{v}$, differentialia vera ipsorum s et v (imo stricta quoque, prius quoad s posterius quoad v). Velocitas v est quantitas respectiva (p. 40), exprimiturque numero pedum qui sub temporis unitate (ex gr. sub 1'') motu aequabili percurrerentur; vis w vero velocitate finali, quae produceretur, si w constanter eadem ageret in ipsum M sub 1''.]

Paulo inferius demonstrabitur quod sit

$$\left(\frac{\dot{v}}{wt} = \frac{\dot{v}}{w} : t\right) \sim 1, \text{ et } \left(\frac{\dot{s}}{vt} = \frac{\dot{s}}{v} : t\right) \sim 1. \text{ Unde}$$

$$wt \cong \dot{v}, \text{ et } \frac{\dot{v}}{w} \cong t, \text{ atque } vt \cong \dot{s}, \text{ et } \frac{\dot{s}}{v} \cong t, \text{ w au-}$$

tem est derivata (quoad t) ipsius v , et $\frac{1}{w}$ derivata (quoad v) ipsius t , ac v est derivata (quoad s) ipsius t , et $\frac{1}{v}$ derivata quoad s ipsius t (194).

Itaque $\int wt$, sive $\int w$ (quoad t) $= \int \dot{v} = v$, et $\int \frac{\dot{v}}{w}$ sive $\int \frac{1}{w}$ (quoad v) $= \int t = t$; et $\int vt$ sive $\int v$ (quoad t) $= \int s = s$, et $\int \frac{s}{v}$ sive $\int \frac{1}{v}$ (quoad s)

$= \int t = t$. Imo quum $vt \equiv s$, et $t \equiv \frac{\dot{v}}{w}$, adeoque $vt \frac{\dot{v}}{w} \equiv st$, et $\frac{v\dot{v}}{w} \equiv s$ (p. 81), $v\dot{v} \equiv ws$, et hinc etiam

$s = \int \frac{v}{w}$ (quoad v), ac $\frac{v^2}{2} = \int ws$ (VI), et $v = \sqrt{2 \int ws}$. Ubilibet vero pro re nata applicatur (195).

Item ex eo quod $v = \int s$ (quoad t); sequitur (quoad eandem variabilem t accipiendo differentialia et derivatas), $dv = d \int s$, atque $\int v = \int^2 s$; idest differentiale ipsius v quoad t , est differentiale (quoad t) derivatae (quoad t) ipsius s ; derivata vero (quoad t) ipsius v , est derivata (quoad t) derivatae (quoad t) ipsius s , idest *derivata* ipsius s (quoad t) *secunda*, quod per $\int^2 s$ denotari potest; atque $\int d \int s$ sive $\int \int^2 s$ (quoad t) $= v$, et $\int^2 \int v = s$.

Solet hoc, quod dv sit $= dds$ sive d^2s , exprimi modo sequente: $v dt = ds$, et $v = \frac{ds}{dt}$, et inde

$dv = d\left(\frac{ds}{dt}\right)$, ita tamen, ut dt pro constante reputetur.

Exemplo sit $s = \frac{gt^2}{2}$ (ut in motu uniformiter accelerato), est $\int s = gt$, quia $ds = gt dt$, et $d \int s = d(gt) = gt$, ac $\int^2 s = g$; itaque $dv = gt$, et $\int v = g$, atque $\int gt$ sive $\int g$ (quoad t) $= gt$. Est etiam

$$d\left(\frac{ds}{dt}\right) \text{ (pro } dt \text{ constante posita)} = d\left(\frac{dgt^2}{2dt}\right) =$$

$$d\left(\frac{gt^2}{2}\right) = dgt = gdt, \text{ et } \int^2 gdt = \frac{gt^2}{2} = s.$$

VIII. 1mo. Quod $\int \dot{v}$ sive $\int 1$ (quoad v) seu $\int dv = v$, patet: quum $\dot{v}$ sit $= v * m\dot{t} - v * (m-1)\dot{t}$ (193), ubi si ipsi m omnes numeri ab n usque ad 1 (inclusive) substituantur; terminis (ut 184) intermediis seriei se mutuo destruentibus, manet $v * n\dot{t} - v * o\dot{t}$, idest v ipsum, quod ad finem ipsius t est, subtracto illo v , quod in initio est; nempe constans semper in integralibus et functionibus primitivis subintelligenda est, etsi alicubi omissa fuerit.

2do. Notandum adhuc est: quod si functio absoluta $(A)x$, cujus valor quaeritur, talis sit, ut crescente x valor ejus decrescat, ita ut minus $\ddagger$ vum fiat, adeoque $(A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x}$, $\vdash$ sit, atque $(B)x$ sit functio summatrix, adeoque $(A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x} \equiv (B)m\dot{x} - (B)(m-1)\dot{x} \equiv (u)m\dot{x}$ (189): erit quodvis horum differentialium $\vdash$ vum, aequipollens ipsi $-\left[(A)(m-1)\dot{x} - (A)m\dot{x}\right] \equiv -\left[(B)(m-1)\dot{x} - (B)m\dot{x}\right]$; eritque $(A)x - (A)o = (B)x - (B)o$, utrumque $\vdash$; $(A)o - (A)x$ vero $\ddagger$, atque $(A)o = (B)o - (B)x + (A)x$; et quum saepe valor ipsius $(A)x$ plane pro $x=o$ quaeratur, valor quaesitus hoc modo exhibetur: (idem patet, si valor ipsius $(A)x$ pro alio valore ipsius x quaeratur).

Ex gr. Sit $\triangle$ li abscissa $a - (b+x) = y$ (Fig 21), denotetque $(A)x$ aream inter abscissam et ordinatam atque rectam: erit $\frac{[a - (b+m\dot{x})]^2}{2} <$

$$\frac{[a - (b + (m-1)\dot{x})]^2}{2}, \text{ adeoque } (A)m\dot{x} < (A)(m-1)\dot{x};$$

est vero $(A)(m-1)\dot{x} - (A)m\dot{x} \equiv [a - (b + m\dot{x})]\dot{x}$; itaque $(A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x} \equiv -[a - (b + m\dot{x})]\dot{x}$. seu $\downarrow(A)x = -y$. Unde $\int -y$ seu hic $\int (b+x-a)$

$$\begin{aligned}
 (\text{quoad } x) &= \int b + \int x + \int -a \quad (198) = bx + \frac{x^2}{2} - ax \\
 &+ \text{const}; \text{ et hoc est } (B)x, \text{ cui addi debet } (A)o - \\
 &(B)o, \text{ ut } (A)x \text{ prodeat; interim heic } (A)x = o, \text{ et} \\
 &(B)o = o. \text{ At si area pro } x = o \text{ quaeratur; erit } (A)o \\
 &= (B)o - (B)x + (A)x = -(B)x = -\left(bx + \frac{x^2}{2} - ax\right) \\
 &= ax - bx - \frac{x^2}{2}, \text{ quod (pro } x = a - b) \text{ est } = a(a - b) \\
 &- b(a - b) - \frac{(a - b)^2}{2}, \text{ et hoc (reducendo ad denom.} \\
 &\text{eundem) est } = \frac{(a - b)(2a - 2b - (a - b))}{2} = \frac{(a - b)^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Si(F.22) $(A)x$ aream inter abscissam $1 - (b + x)$, et ordinatam ipsius, atque arcum circuli pro radio 1, a fine radii usque ad ordinatam e fine ipsius $b + x$ seu ipsius $1 - (b + x)$ erectam denotet: et hic est $d(A)x$ manifeste non $\pm y\dot{x}$ sed $-y\dot{x}$, adeoque derivata quoque $-y\dot{a}$ itaque $\int -y$ quaerendum est pro valore $(A)x - (A)o$; atque y (aequatione e centro) $= [1 - (b + x)^2]^{\frac{1}{2}}$, et $\int -[1 - (b + x)^2]^{\frac{1}{2}}$ $= \int [1 - (b + x)^2]^{\frac{1}{2}}$; nam ut (p. 169) dictum est, in evolutione binomiali (hic integranda), quum radicis quadratae valor etiam $-$ vus detur, valor uterque exhibetur (adeoque et $\pm$ vus pro $(A)o - (A)x$).

3tio. Est etiam aliquando functionis valor ∞ pro $x = o$; de quo casu aliquid adjiciendum est ad dilucidationem pag (188 et sequ.). In hoc casu si $(A)o = \pm \infty$, non fit $(A)x - (A)o \sim o$; et serierum ex $(A)x$ et $(B)x$ derivatarum termini non debent usque ad o extendi, sed tantum usque ad certum $x = p$; fietque $(A)x = (B)x - (B)p + (A)p$; adeoque constans tunc $(A)p - (B)p$ sumitur, haud immiscendo ∞ per $(A)o - (B)o$. In praec. est x ad finem ipsius x ; omnia tamen rite applicantur.

4to. Pag. 189. differentiale *terminum generalem* $(u)m\dot{x}$, non *valorem specialem* denotare dictum est:

at quaeri potest terminus seriei μ tus pro $x=a$; de punctis discretis, ubi n tus fit $=0$ vel ∞ , inferius.

IX. Hinc 1mo (ex I. et VII) lineae, cujus ordinata y ad abscissam x $\perp$ ris est $=ax^p$, areae inter coordinatas x, y atque lineam ipsam comprehensa, est $=\int y$ (quoad x , uti hic donec aliud monitum fuerit, semper intelligendum est), et hoc $=$

$\frac{ax^{p+1}}{p+1} + (\text{const} = 0, \text{ quum } (A)_0 - (B)_0 = 0, \text{ nam}$

tam area quam $(B)_x$ est 0 pro $x=0$). Est vero hoc de quovis valore sive fracto sive n vo ipsius p

verum, excepto si $p=-1$, tunc enim $\int y = \int \frac{a}{x}$

$=a \log x$ (VI 4), et tum haec erit areae expressio, ut statim hyperbolae exemplum ostendet.

Ita area parabolae, cujus $y=ax^{\frac{1}{2}}$ (pro a = radici quadratae parametri, est $=ax^{\frac{3}{2}} : \frac{3}{2} =$

$$\frac{2}{3} ax^{\frac{1}{2}} \cdot x = \frac{2}{3} xy.$$

2do. Si y sit $=\frac{1}{1+x}$, uti (Fig 23) ad hyperbolae aequilaterae asymptotam ordinata $\perp$ ris; area (VII. II) est $\int \frac{1}{1+x}$, et soliditas per revolutionem

orta est $\int \frac{\pi}{(1+x)^2}$; est vero $\frac{1}{1+x} = d \log(1+x)$

(V. et 194); itaque $\log(1+x) = (B)_x$, functio summatrix erit; et $\int \frac{1}{1+x} = \log(1+x)$; crescente ita-

que x ad dextram ∇ ve, crescet area in ∞ ; (de casu pro abscissa negativa statim dicetur). Soliditas vero erit finita semper, imo si $x \sim \infty$, soliditas hyperbolae circa asymptotam revolutae

$$\sim \pi; \text{ namque } \int \frac{\pi}{(1+x)^2} = \pi \int \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{\pi x}{1+x} +$$

const = etiam $\frac{-\pi}{1+x} + \text{const}$; nempe heic tam $\frac{\pi x}{1+x}$ quam $\frac{-\pi}{1+x}$, functio summatrix esse potest, discrimenque tantum in constante est (192), nimirum differentiale derivataque tam ipsius $\frac{x}{1+x}$ quam ipsius $\frac{-1}{1+x}$ eadem sunt, nempe derivata utriusque est (IV) $\frac{1}{(1+x)^2}$; nimirum $J(\frac{x}{1+x}) = \frac{(1+x)Jx - xJ(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x).1 - x.1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$; ita $J(\frac{-1}{1+x}) = \frac{(1+x)J(-1) - (-1)J(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{0+1}{(1+x)^2}$

Sed prouti $\frac{x}{1+x}$ vel $\frac{-1}{1+x}$ pro functione summatrice accipiat, constans alia erit; nam in casu primo (B)0 id est $\frac{0}{1+0} = 0$, in altero vero $\frac{-1}{1+0} = -1$; adeoque quum heic (A)0 = 0, erit const. prior (A)0 - (B)0 = 0, posterior vero erit (A)0 - (B)0 = 1; itaque integrale nempe $\int \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{1+x} + 0$, et simul $= \frac{-1}{1+x} + 1 = \frac{x}{1+x}$, idem in utroque casu.

Conseq. $\pi \int \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{\pi x}{1+x}$, quod $\sim \pi$, si $x \sim \infty$, quia tum $\frac{x}{1+x} \sim 1$. Est autem π area circuli cuius radius 1 est; nam diameter est tum = 2, peripheria = 2π , et $2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$; est igitur soliditas haec = basi, nempe areae circuli ipso ab = 1 tanquam radio in revolutione dicta descripti; omnibus quoad unitates suas expressis (p. 30).

* 3tio. Aliquid de area inter asymptotam et hyperbolam quoad logarithmos negativorum annotare liceat. Sit c centrum hyperbolae aequilaterae, ubi angulus asymptotarum rectus est; sitque $ac=de=1$; sintque e, f vertices hyperbolae; af, de (*potentiae hyperbolae dictae*) manifesto sunt unitati aequales. Dicantur abscissae ex c ad asymptotam sumtae (ad dextram +_{vae} , ad laevam --_{vae}) nomine generali z ; et sit z variabilis absoluta, adeoque $\dot{z} = \frac{z}{n}$. Accipiantur praeterea areae ab utraque potentia hyperbolae versus asymptotam alteram introrsum --_{ve} , +_{ve} extrorsum: et erit area inter ordinatam, abscissam z , hyperbolam, et potentiam hyperbolae (ordinatae proximam) comprehensa, logarithmus naturalis ipsius z . (sensu elem.)

Quodsi ordinatae inferius --_{ve} accipiantur, facile patet, per $y = \frac{1}{z}$ totam hyperbolam exhiberi. Nam si e quocunque hyperbolae puncto g , sint L_{res} gp, gh , pro abscissa cp esset ordinata $gp = \frac{1}{gh}$, quia $gh = cp$; consequ. $gh = \frac{1}{gp} = \frac{1}{ch}$; adeoque punctum g per ordinatam abscissae ch determinatur. Idem de plaga inferiore patet; uti etiam abscissam, quamvis (utvis parvam etiam) per ordinatam suam multiplicatam esse $= 1$.

* 4to. Derivetur series incrementorum ex $\log z$; erit terminus generalis $\log m \dot{z} - \log (m-1) \dot{z} = \log \left(\frac{m \dot{z}}{m \dot{z} - \dot{z}} \right)$ (p. 95), quod item $= \log \left(1 + \frac{m \dot{z} - \dot{z}}{m \dot{z}} \right) = -\log \left(\frac{m \dot{z} - \dot{z}}{m \dot{z}} \right) = -\log \left(1 - \frac{\dot{z}}{m \dot{z}} \right)$, quod quum n ita augere liceat, ut $\frac{\dot{z}}{m \dot{z}}$ fractio vera sit, est $= - \left(\frac{\dot{z}}{m \dot{z}} - \frac{\dot{z}^2}{2(m \dot{z})^2} - \frac{\dot{z}^3}{3(m \dot{z})^3} - \dots \right)$ (p. 162) sub-

stituendo $\frac{\dot{z}}{m\dot{z}}$ ipsi u , quum utrumque $\times$ sit, propter $\dot{z}$ et $m\dot{z}$ utrumque simul $-$ aut simul $\times$. Erit autem terminus seriei primus $\frac{\dot{z}}{m\dot{z}}$, et si summa seriei s dicatur, atque (188) $m\dot{z}$ utvis parvum sed determinatum q sit; poterit n ita augeri, pro dato quovis N , idem pro terminis omnibus quos q haud excedit (188), ut $(\frac{\dot{z}}{q} : s = \frac{\dot{z}}{qs}) - 1$ sit $< \frac{1}{N}$, seu breviter $\frac{\dot{z}}{q} : s \sim 1$. Nam seriei summa tota

$$\text{esset (per 162) } < u : (1 - \frac{u^2}{2}) = \frac{2u}{2-u^2}; \text{ et } u : \frac{2u}{2-u^2} = \frac{2u-u^3}{2u} = \frac{2-u^2}{2}, \text{ quod } \sim 1, \text{ dum } u \sim 0$$

Consequ. $\frac{\dot{z}}{m\dot{z}}$, idest modo consveto exprimendo $\frac{dz}{z}$

differentiale, $\frac{1}{z}$ vero derivata quoad z logarithmi naturalis ipsius z est.

Denotet jam superius $(A)z$ aream antea dictam, dicaturque differentiale verum ejus $(a)z$; et $\log z$ dicatur $(B)z$, atque differentiale verum ejus sit $(b)z$; erit $(B)z$ functio summatrix pro $(A)z$. Nam

$$(a)m\dot{z} \equiv \dot{z}y = \frac{\dot{z}}{z}; \text{ namque differentiale verum}$$

ipsius $(A)z$, est $(1)m\dot{z} - (A)(m-1)\dot{z}$, quod (Fig 23) est $< \frac{\dot{z}}{(m-1)\dot{z}} \text{ et } > \frac{\dot{z}}{m\dot{z}}$; atque $\frac{\dot{z}}{(m-1)\dot{z}} : \frac{\dot{z}}{m\dot{z}}$

$$= \frac{m}{m-1}, \text{ quod } \sim 1, \text{ quum pro quovis } q \text{ liceat}$$

n ita augere, ut dictum est: consequ. si $\frac{\dot{z}}{z} = \dot{z}y$,

sitque hoc superius (189) $(u)z$; erit $(a)m\dot{z} \equiv (u)m\dot{z} \equiv (b)m\dot{z}$; itaque esset (per 198) $(A)z =$

$\int(u)z$ id est $\int \frac{\dot{z}}{z}$, sive $\int \frac{1}{z}$, (quoad z) (si tantum derivata ponatur); nempe $(A)z = \log \text{nat } z$, quia demonstratum est, differentiale logarithmi naturalis ipsius z esse $\frac{\dot{z}}{z}$, et derivatam (quoad z) esse $\frac{1}{z}$.

Constans heic (et in casu simili), prodit sic. Est omnino $(A)z - (A)p = (B)z - (B)p$, pro p utvis parvo (188) et quovis z adeoque etiam pro $z=1$; itaque $(A)1 - (A)p = (B)1 - (B)p$; sed $(A)1 = 0 = (B)1$, adeoque $0 - (A)p = 0 - (B)p$; unde $(A)p = (B)p$, et $(A)p - (B)p = 0$; consequ. $(A)z = (B)z + (A)p - (B)p = (B)z$.

Patet autem inter potentias hyperbolae, crescente z decrescere tam logarithmum quam aream, quum z ibi < 1 sit; et logarithmum areamque $\rightarrow$ va esse, adeoque tam $(B)m \dot{z} - (B)(m-1) \dot{z}$, quam $(A)m \dot{z} - (A)(m-1) \dot{z} \rightarrow$ va, e minori $\rightarrow$ vo majus $\rightarrow$ vum subtrahendo. Ultra potentias extrorsum utrinque crescente z , area logarithmusque $\rightarrow$ ve crescit, et incrementum $\rightarrow$ vum fit, e majore $\rightarrow$ vo minus subtrahendo. Ita $\frac{\dot{z}}{z}$ nempe differentiale semper $\rightarrow$ erat.

Quod vero logarithmos abscissarum $\rightarrow$ varum attinget: etiamsi $(B)z = \log \text{nat } z$ sensu (168) sit, poterunt in terminis seriei incrementorum, cujus terminus generalis est $(B)m \dot{z} - (B)(m-1) \dot{z}$, logarithmi tales valores accipi, ut $(A)m \dot{z} - (A)(m-1) \dot{z} \cong (B)m \dot{z} - (B)(m-1) \dot{z}$, ut antea incrementa ab $(A)p$ et $(B)p$ incipiendo. Nempe $\log m \dot{z} = \log \text{elem. } m \dot{z} + \pi \sqrt{-1}$ (175), et si pro quovis m idem $\pi \sqrt{-1}$ ponatur, fiet $(B)m \dot{z} - (B)(m-1) \dot{z} = \log \text{elem. } m \dot{z} + \pi \sqrt{-1} - [\log \text{elem. } (m-1) \dot{z} + \pi \sqrt{-1}] = \log \text{elem. } m \dot{z} - \log \text{elem. } (m-1) \dot{z}$. Itaque hoc pacto fiet $(A)z - (A)p = (B)z - (B)p$; sed pro $z = -1$,

fiet $(A)(-1)=0$, $(B)(-1)$ vero $=\pi\sqrt{-1}$ (id est unus valor ipsius $\log(-1)$ est $\pi\sqrt{-1}$); consequ. $-\pi\sqrt{-1}=(A)p-(B)p$, atque $(A)z=(B)z-\pi\sqrt{-1}=\log \text{ elem. } z + \pi\sqrt{-1}-\pi\sqrt{-1}=\log \text{ elem. } z$. Non igitur areae inferiores logarithmos sensu (168) nempe quantitates imaginarias exhibent; sed elementares tantum; atque si in terminis seriei diversa imaginaria adnexa sint, se invicem haud elident imaginaria, ut cum terminis seriei areae simultaneis aequipolleant.

Notandum vero est, differentiale logarithmi nat. ipsius z tunc quoque $\frac{dz}{z}$ esse, si z non ipsa variabilis absoluta, sed qualisvis ejus functio fuerit. Sit nempe $z=(C)x$; erit $\dot{z}=(C)m\dot{x}-(C)(m-1)\dot{x}$. Sed $(C)(m-1)\dot{x}=(C)m\dot{x}-[(C)m\dot{x}-(C)(m-1)\dot{x}]=(C)m\dot{x}-\dot{z}=q-\dot{z}$, si $(C)m\dot{x}$ generaliter q dicatur. Itaque terminus generalis (seriei ex $\log z = \log(C)x$ derivatae), est $\log(C)m\dot{x}-\log(C)(m-1)\dot{x} = \log q - \log(q-\dot{z}) = \log\left(\frac{q}{q-\dot{z}}\right) = \log\left(1:\frac{q-\dot{z}}{q}\right) = -\log\left(1-\frac{\dot{z}}{q}\right)$; ubi pariter ut antea n ita accipi posse facile patet, ut $\frac{\dot{z}}{q} < 1$ sit, atque seriei

(ex 162) evolutae terminus primus $\frac{\dot{z}}{q}$ summae seriei totius aequipolleat. Est igitur $\frac{\dot{z}}{(C)m\dot{x}}$ (sive x pro $m\dot{x}$ ponendo (194) $\frac{\dot{z}}{(C)x}$), id est $\frac{\dot{z}}{z}$ differentiale quoad z est logarithmi nat. ipsius $z=(C)x$, et $\frac{1}{z}$ derivata quoad z . Potest vero ipsi $\dot{z}$ (197) $d(C)x$ substitui; estque $\int \frac{d(C)x}{(C)x} = \log(C)x + \text{const}$

5to. Soliditas paraboloidis est $\int \pi y^2 = \int \pi p x$
 (200) (pro parametro p) $= \frac{\pi p x^2}{2}$; constans est 0,
 quia pro $x=0$ est tam area quam $\frac{\pi p x^2}{2}$ (nempe
 functio summatrix)=0. Ita soliditas pro $y=ax^p$,
 est $\int a^2 x^{2p} = \frac{a^2 x^{2p+1}}{2p+1}$. Ellipsoidis soliditas pari-
 ter (per $y=(px - \frac{px^2}{a})^{\frac{1}{2}}$ pro a axem majorem de-
 notante) est $= \int \pi y^2 = \int \pi (px - \frac{px^2}{a}) = \int (\pi p x -$
 $\frac{\pi p x^2}{a}) = \frac{\pi p x^2}{2} - \frac{\pi p x^3}{3a} = \pi p (\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a})$; ea-
 dem expressio hyperboloidis est, signo — in +
 mutato; quum pro parametro p et axe majore a ,
 sit in ellipsi $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, et in hyperbola $y^2 =$
 $px + \frac{px^2}{a}$.

6to. Notandum vero est, ex (185) sequi; quod
 si duarum functionum $(A)x$ et $(B)x$ derivatae u ,
 et v quoad eandem variabilem acceptae tales fue-
 rint, ut $\frac{u}{v} = k$ (quosvis terminos simultaneos ita
 ut superius intelligendo); etiam $(A)x - (A)o$ (nem-
 pe summa seriei ex $(A)x$ derivatae) est $= k[(B)x$
 $- (B)o]$. Si nimirum termini generales sint $(a)m\dot{x}$,
 $(b)m\dot{x}$, et $(a)x = u\dot{x}$, atque $(b)x = v\dot{x}$, atque
 $\frac{u\dot{x}}{v\dot{x}} = k$, adeoque $u\dot{x} = kv\dot{x}$; perconsequ. $u = kv$, es-
 se e superioribus evidens est.

Aplicando hoc ad aream soliditatemque ellypseos,
 ad aream soliditatemque circuli relata: erit or-
 dinatis (pro eodem x) y', y dictis, et diametro cir-

$$\text{culi} = a, \quad \frac{y'}{y} = \left(px - \frac{px^2}{a} \right)^{\frac{1}{2}} : (ax - x^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{p(ax - x^2)}{a(ax - x^2)}} = \sqrt{\frac{p}{a}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{b}{a} : (\text{si nimirum}$$

b dicatur axis minor (p. 101), pro $y' = \frac{1}{2} b$ et

$$x = \frac{1}{2} a, \text{ erit } \frac{b^2}{4} = \frac{pa}{2} - \frac{pa^2}{4a} = \frac{ap}{4}, \text{ unde } b^2 = ap.$$

et $p = \frac{b^2}{a}$); quum ergo sit $\frac{y'}{y} = \frac{b}{a}$, est area cir-

culi C et area ellypseos E dicta, $\frac{E}{C} = \frac{b}{a}$, et $E =$

$$\frac{bC}{a} = \frac{ba^2\pi}{4a} = \frac{ba\pi}{4}, \text{ quum area circuli sit } \frac{a^2\pi}{4} \text{ pro}$$

diametro a .

Ita soliditatum E' et C' dictarum, derivatis Y'

et Y dictis; est $\frac{Y'}{Y} = \pi \left(px - \frac{px^2}{a} \right) : \pi (ax - x^2) =$

$$\pi y'^2 : \pi y^2 = \frac{apx - px^2}{a(ax - x^2)} = \frac{p(ax - x^2)}{a(ax - x^2)} = \frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2}. \text{ Ita-}$$

que $\frac{E'}{C'} = \frac{b^2}{a^2}$, et $E' = \frac{C'b^2}{a^2}$, quod (quum soliditas

sphaerae sit $\frac{a^3\pi}{6}$), est $= \frac{ab^2\pi}{6}$; quae nempe solidi-

tas ellypsoïdis cujus axis minor b est, circa axem majorem a revolutae est.

7mo. Si arcus circuli sit x variabilis absoluta; demonstrabitur paulo inferius, derivatam ipsius x quoad tangentem ejus acceptam, esse $= [1 + z^2]^{-1}$

si z dicatur tang x ; unde $x = \int (1 + z^2)^{-1}$ (quoad z) $= \int (1 - z^2 + z^4 - z^6 \dots)$ (per 150), quod item

est $= 1 - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} \dots$, et hoc (si $x = \frac{1}{2}$ qua-

dranti, adeoque $z = \text{radio} = 1$) est $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

$-\frac{1}{7} \dots$; quae series Leibnitiana est; totaque peripheria octuplum ejus est; atque et hic si ex gr. apud $\frac{1}{3}$ subsistatur, defectus nempe quod adhuc ad-

dendum esset, (per 131) est $< \frac{1}{5} : (1 - \frac{5}{7}) = \frac{7}{(7-5).5}$; et si illum terminum μ vum, in quo sub-

sistere libet, excipiens denominator μ sit; erit $< (\frac{\mu+2}{(\mu+2-\mu).\mu} = \frac{\mu+2}{2\mu}) \sim 0$.

8vo. Sit exemplum etiam ad longitudinem arcus per formulam superius allatam, determinandam (200). Sit u arcus circuli, pro abscissa x e cen-

tro, atque pro x sinu ipsius u , est $y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

pro radio 1; erat vero $Ju = [1 + (Jy)^2]^{\frac{1}{2}}$; estque

$Jy = \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} . 2x = x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, et $(Jy)^2 =$

$\frac{x^2}{1-x^2}$, atque $1 + (Jy)^2 = \frac{x^2+1-x^2}{1-x^2} = (1+x^2)^{-1}$

et $Ju = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, atque $u = \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$

$\int (1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.1}{2.4} x^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6} x^6 \dots) = x + \frac{1}{3.2} x^3 +$

$\frac{1.1}{5.2.4} x^5 + \frac{1.1.3}{7.2.4.6} x^7 \dots$, quod (pro $u=30^\circ$, adeoque

$x = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$), fit $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3.2.2^3} + \frac{1.1}{5.2.4.2^5} +$

$\frac{1.1.3}{7.2.4.6.2^7} + \frac{1.1.3.5}{9.2.4.6.8.2^9} \dots$; atque π [id est $\frac{1}{2}$ peri-

pheria pro radio 1, seu per quod diameter quilibet multiplicatus dat peripheriam, seu area circuli

radii 1, nempe $2\pi . \frac{1}{2} = \pi$] est series haec per 6

multiplicata; atque si ad n thum terminum subsistatur, denominator est $(2n-1).2.4 \dots 2(n-1)2^{n-1}$, et terminum sequ. producit $(2n-3) \cdot \frac{(2n-1)2^{n-1}}{(2n+1)2n \cdot 2^{n+1}}$ et quum exponens iste < 1 sit, in posterum decrescens, error summa (per 131) minor est.

9no. Si aequatio lineae u sit $y = \log \left[x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right]$ erit $dy = \left[1 + x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \right] : (x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ (per 208) =

$$\left(1 + \frac{x}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + x}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \right) : (x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}; \text{ atque } (dy)^2 = (x^2 - 1)^{-1}, \text{ et } 1 + (dy)^2$$

$$= \frac{1}{x^2 - 1} + 1 = x^2(x^2 - 1)^{-1}, \text{ et } du = [1 + (dy)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}; \text{ cujus integrale est } (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}; \text{ hujus enim derivata quoad } x \text{ est } \frac{1}{2} \cdot 2x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Consequ. arcus est $= \sqrt{x^2 - 1}$ exacte; quia pro $x=1$, est arcus $= 0$, et $\sqrt{x-1}$ quoque $= \sqrt{1-1} = 0$; itaque constans $= 0$, quum superius (A) $0 - (B) 0$ sit $= 0$ (189). Unitas per (96) mutatur.

Est vero linea haec, quae *catenaria* vocatur, (atque etiam quadrabilis est), insignibus alioquin etiam proprietatibus gaudens. Est lineá transcendens, quum aequatio ejus logarithmum involvat; estque linea illa, in qua filum perfecte flexibile (quasi lineam ubique aequè gravem), extremitatibus (Fig. 24) non in eadem verticali fixis, distantia earum longius, intensibile, conquiesceret; quam idcirco magnus *Galilaeus* parabolam esse arbitrabatur, et nonnisi progressu Matheseos ulteriori tan-

dem *Leibnitz*, *Jacobus* ac *Joh. Bernoullii* determinarunt.

Demonstratur nempe in *Mechanica*, quod si vires quorumvis arcuum ab imo puncto incipientium pondera directionibus tangentium ad fines eorum ductarum tenentes, ita decomponentur, ut pars horizontalis ubique sit aequalis, et altera sit verticalis, sint vires verticaliter tenentes, uti arcuum dictorum pondera, adeoque uti arcus. Si jam curva ista in eodem plano verticali invertatur, lineae quae antea quasi sursum trahendo tenebant, nunc pondera arcuum superiorum sustinebunt. Hinc catenaria in hoc situ limes est formae e quam plurimis (nempe tenuissimis) prismatibus aequalibus structi fornicis sine ullo caemento proprio pondere stantis.

Inservit eadem deorsum versa etiam pontibus extruendis: duabus caténis sat firmis nempe (extremitatibus ad litora fixis), sustinetur pons ipse horizontalis.

Superficie per revolutionem lineae circa abscissam x ortae derivata quoad x erat (200) $2\pi y (1+y^2)^{\frac{1}{2}}$; atque si linea circulus sit, $(1+y^2)^{\frac{1}{2}}$ erat (213) $= (1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$, et hoc per $2\pi y$ (id est per $2\pi (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$) multiplicatum; est $= 2\pi$. Consequ. $\int 2\pi = 2\pi x =$ zonae superficiei sphaericae pro abscissis ordinatisque e centro incipientibus; atque si $x=1$ fiat, prodit 2π , nempe dimidia superficiei sphaerica pro radio 1.

X. Exemplis his facilioribus e *Geometria* in gratiam Tyronum allatis, sit fas e *Mechanica* quoque faciliora quaedam addere; applicando ea, quae de motu rectilineo (201) dicta sunt, observandoque:

Imo. [quod quantitates respectivae plane diversae quoque eadem quantitate (ex gr. recta) sed diversis determinationibus expressae, etsi quoad

eas quantitates quibus exprimuntur, aequales sint; (nisi expresse aliud moneatur), tunc tantum dicuntur aequales, si cum determinationibus suis connexae aequales sint; atque ut determinationes oppositorum et imaginariorum, nec aliae determinationes cum quibus expresse ponuntur quantitates, sunt ab iisdem avellendae; ex gr. dici quidem potest $+1$ et -1 esse aequales (abstrahendo à determinatione), sed non potest $+1 = -1$ dici.

Ita tam *vis quae momentanea* dicitur, quam *vis constanter agens* recta exhiberi certis determinationibus possunt: nempe sit p punctum temporis expers, et dicatur primum $1''$ in p incipiens *primum* $1''$, et sequens $1''$ dicatur *2dum* $1''$; si jam in p talis vis adsit, quae massam $M=1$, sub primo $1''$ ad k pedum distantiam ferret, absque eo, ut inter initium finemque primi $1''$ ulla vis egisset; vis dicitur *momentanea* in p , si neque in censum veniat, virium numerus qualitas *tempusque actionis*, dummodo *resultatum* in p ; *vis constanter agens* vero exprimitur numero pedum, quos M describeret sub *2do* $1''$, si vis quae in p est sub primo $1''$ continuo ageret in M , adeoque hic, vis dictae *tempus actionis* figitur.

In puncto temporis experte p , vim motum producere concipi nequit: agere incipit, et in aliquo temporis puncto desinit. Potest quidem pro data quavis velocitate, vis tanta agere, ut dato quovis tempore minus requiratur ad eam producendam; sed si hoc pacto tempus actionis ~ 0 , velocitas finalis, quam eadem vis sub $1''$ continuo agendo produceret, $\sim \infty$.

2do Interim quidcunque sit vis (nonnisi in effectu nota), potest etiam non ut *respectiva* sed ut absoluta quantitas considerari, et inde velocitas educi; posito vim eandem μ tuplo tempore continuo agentem, μ tuplum effectum praestare, atque plurimum virium quotvis directione eadem in idem agentium, effectum esse summam effectuum singulorum: nempe vim illam, qua massa M prope ter-

ram deorsum urgetur (*pondus* M' *massae* M ad terram, dictam), sub $1''$ in ipsam M constanter agentem, illi velocitatem finalem $g =$ prope $31'$ procurare constat; si itaque eandem massam premat pondus P seu $vis = \mu M'$, vis ista constanter sub $1''$ agendo, velocitatem finalem $\mu g = \frac{Pg}{M'}$ ipsi M conciliabit.

3tio. Denotetur (193) pro variabili absoluta t , spatium usque ad finem mti $\dot{t}$ percursum, per $s_* m\dot{t}$, velocitas quae ad finem mti $\dot{t}$ est sit $v_* m\dot{t}$, vis autem velocitate finali (sensu 201) expressa quae ad finem mti $\dot{t}$ adest, continuo agens, denotetur pariter per $w_* m\dot{t}$; atque sit w prius constans $=$ (ex gr g).

Erit in hoc casu $\dot{s}$ id est $s_* m\dot{t} - s_*(m-1)\dot{t} > \dot{t}(v_*(m-1)\dot{t})$, quia spatium hoc sub $\dot{t}$ motu aequali nonnisi velocitate $v_*(m-1)\dot{t}$ percursum est, praeterea vero sub mti $\dot{t}$ agente v constante, sub quavis parte continua ipsius $\dot{t}$ crevit velocitas; at idem $\dot{s}$ est $< \dot{t}(v_* m\dot{t})$, quia velocitas sub mti $\dot{t}$ semper minor fuit antea quam ad finem. Est autem in hoc casu $v_* m\dot{t} = g m\dot{t}$, quia vis eadem quo longius constanter agit, eo maiorem velocitatem producit: atque $\frac{\dot{t}g(m-1)\dot{t}}{\dot{t}g m\dot{t}}$ est $= \frac{m-1}{m}$; hoc vero ~ 1 , dum $n \sim \infty$.

Itaque $\frac{\dot{s}}{\dot{t}g m\dot{t}} \sim 1$, (191); et gt ponendo pro $g m\dot{t}$, atque v pro gt , est et differentiale ipsius s . Differentiale ipsius v autem est $w\dot{t}$, in hoc casu gt ; nam $v_* m\dot{t}$ est $= g m\dot{t}$; quia si ad finem unius $1''$ producat vis constans velocitatem g , ad finem temporis $m\dot{t}$ dabit $m\dot{t}g$; itaque $v_* m\dot{t} - v_*(m-1)\dot{t} = m\dot{t}g - (m-1)\dot{t}g = \dot{t}g$. Ex $\dot{s} \stackrel{0}{=} v\dot{t} = g\dot{t}\dot{t}$, est $s = \int g\dot{t}$ (quoad t) $= \frac{gt^2}{2}$ (198).

Si vero w non sit constans; aut crescat aliquamdiu, aut decrescat: ponatur crescere, quum eadem

mutatis mutandis facile aplicentur. Erit, $s_* m t - s_*(m-1)t$ (ut antea) $\dot{s}$ dicto; $t[v_*(m-1)t] + i^2 \frac{w_*(m-1)t}{2} < \dot{s} < t[v_*(m-1)t] + t^2 \left[\frac{w_* m t}{2} \right]$;

nempe $\dot{s}$ est spatium sub $m t$ $\dot{t}$ percursum, partim velocitate finali illa, quae ad finem $(m-1)t$ $\dot{t}$ est quae sola motu aequabili produceret spatium $t[v_*(m-1)t]$, partim vi w quae ad finem $(m-1)t$ $\dot{t}$ est, abinde crescens; itaque incrementum istud spatii verum erit majus, quam si vis quae in initio $m t$ $\dot{t}$ fuit, eadem usque ad finem $m t$ $\dot{t}$ mansisset; esset vero hoc posito, incrementum hoc $= t^2 \left[\frac{w_*(m-1)t}{2} \right]$ (per praec.). Est etiam idem

incrementum verum minus quam si sub $m t$ $\dot{t}$ vis quae ad finem $m t$ $\dot{t}$ est (quavis antea agente major) egisset; ita vero (item per praec.) esset increm. $= t^2 \left[\frac{w_* m t}{2} \right]$.

Sed $\frac{i[v_*(m-1)t] + t^2 \left[\frac{w_*(m-1)t}{2} \right]}{i[v_*(m-1)t] + t^2 \left[\frac{w_* m t}{2} \right]} \sim 1$: nam

dividendo per i , terminus 2dus tam numeratoris quam denominatoris per primum divisus omnidabili minorem quotum dare potest (81), atque

$\frac{i[v_*(m-1)t]}{i[v_*(m-1)t]} = 1$. Consequ. (191) etiam

$\frac{i[v_*(m-1)t] + t^2 \left[\frac{w_*(m-1)t}{2} \right]}{i[v_*(m-1)t] + t^2 \left[\frac{w_* m t}{2} \right]} \sim 1$, imo (81) et.

iam $\frac{i[v_*(m-1)t]}{i[v_*(m-1)t]} \sim 1$; imo quum $\frac{v_*(m-1)t}{v_* m t}$

~ 1 . (patet si velocitates istae ut ordinatae proximae ad abscissam tempus repraesentantem, con-

cipiantur): erit etiam $\frac{i[v_* m t]}{i[v_* m t]} \sim 1$; atque hinc

juxta superiora, et $i v$ differentiale ipsius s , et v derivata (quoad t) est; nempe more solito n ponendo pro m , fiet $i[v_* m t] = i v$, quia $v_* m t$ significat illam velocitatem, quae ad finem ipsius t est.

Pari modo prodit $\frac{\dot{v}}{i[w_* m t]} \sim 1$. Nam per $\dot{v}$ intelligendo $v_* m t - v_*(m-1)t$; est $i[w_*(m-1)t] < \dot{v} < i[w_* m t]$; namque velocitas quae sub $m t$ accedit, producit per vim quae ab initio $m t$ i crescens constanter agit; si non cresceret, produceret velocitatem $i[w_*(m-1)t]$, quia sub $1''$ producit $w_*(m-1)t$, (et $1'' = 1$ ponitur); si vis $w_* m t$ ageret sub i , produceret $i[w_* m t]$; at vis ante finem $m t$ i agens est semper $< w_* m t$.

Est autem $\frac{i[w_*(m-1)t]}{i[w_* m t]} \sim 1$, (patet ut antea).

Consequ. (191) etiam $i \frac{\dot{v}}{w_* m t} \sim 1$; atque ut antea $i w$ est differentiale ipsius v , et w est derivata (quoad t).

Functio differentianda hic non in concreto (ut ex gr. area parabolae exhibetur, sed per limitem concipitur (191): quem dari patet, quum crescente n sine fine, crescat s sine fine, nunquam tamen fiat tantum, quam si per totum tempus velocitas ultima fuisset. Vide uberius, in exemplo centri gravitatis (paulo inferius) methodum, functionem nonnisi per limitem datam differentiandi.

Reliqua (202) dicta fluunt.

4to. Sit prius exclusa medii resistentia; sitque w prius ab s tum a t dependens.

Fig. 25. Sit c centrum terrae, initium ipsius x distantiam $\mp_{vam}$ a centro denotantis (sive ante sive post centrum sit); sitque $x < a$, de cujus fine massa M libere (seposita omni resistentia) sola vi gravitatis cadat; (supponendo, quasi nonnisi c et tota vis in eo, esset, plane usque ad centrum valere legem rationis inversae duplicatae distantiarum, quamvis pro globo uniformiter denso

sint vires attractivae intra superficiem, ut distantiae a centro); quaeritur velocitas v (directione prima) ad finem ipsius x (sive ante sive post centrum) corporis per $a-x$ aut $a+x$ delapsi quanta sit?

Spatium s ante centrum est $=a-x$, si post centrum terminetur, est $a+x$; vis w (sub conditione dicta) est $=\frac{r^2 g}{x^2}$ (pro radio terrae $=r$ et vi gravitatis ad superficiem g). Erat autem (202.) $v = \sqrt{2 \int w ds}$ (quoad t) $= r \sqrt{2g} \int \frac{1}{a} ds (a-x)$ (quoad x) (per 195); et hoc est $= r \sqrt{2g} \int \frac{-1}{x^2}$ (quoad x); nam $d(a-x)$ (quoad x) est $=-1$. Est vero $\int \frac{-1}{x^2}$ (quoad x) $= \frac{1}{x}$; nam $d \frac{1}{x} = \frac{x d1 - 1 dx}{x^2}$ (per 198) $= \frac{-1}{x^2}$. Itaque integrale quaesitum est $r \sqrt{\frac{2g}{x}} + \text{const.}$ Reperitur autem constans, si v dicatur $(A)x$, et functio summatrix sit $(B)x = r \sqrt{\frac{2g}{x}}$; nempe $(A)a$ (id est velocitas pro $x=a$) est $=0$; atque $(B)a = r \sqrt{\frac{2g}{a}}$; consequ. $(A)a = (B)a + \text{const.}$ sive $0 = r \sqrt{\frac{2g}{a}} + \text{const.}$ atque hinc $\text{const.} = -r \sqrt{\frac{2g}{a}}$; et integrale est $= r \sqrt{\frac{2g}{x}} - r \sqrt{\frac{2g}{a}} = \frac{r \sqrt{2ag} - r \sqrt{2gx}}{\sqrt{ax}}$, (nempe si ad denom. eundem reducantur), et hoc est $= r \sqrt{\frac{2g(a-x)}{ax}} = v$.

Manifesto sub conditione dicta, si $x \rightsquigarrow 0$, fit $v \rightsquigarrow \infty$; at non nisi in centro in puncto tempo-

ris experte esset velocitas ∞ , sine ullo tempore tamen, quo effectum aliquem producere queat; post centrum enim extemplo ad quasvis distantias aequales incrementa quae ante centrum $\pm$ va erant, $\mp$ va fiunt, et eadem velocitates finitae erunt ad distantias a centro easdem x , tam ante quam post centrum; eritque post centrum ad distantiam $x = a$ velocitas 0 uti ante centrum, ut formula exhibet. Inde vero iterum redeundo, patet oscillationem perpetuam fieri: atque reditu quovis directionem velocitatis mutari; et innumerabilibus, spatiis (quoad summam pedum percursorum acceptis, temporibusque competere velocitatem eandem: quaeri tamen minimum tempus spatiumque pro data velocitate (directione una vel altera) potest; loca autem duo tantum pro velocitate quavis dantur, ad distantias a centro aequales, et ad distantiam ipso a majorem formula quoque imaginarium dat.

Spatium s e valore ipsius v prodit; quum x inde repertum aut ex a substrahi, aut ipsi a addi debeat; prior est valor minimus, reliqua patent: temporis autem valor, formularum heic nondum traditarum plurium alicujus integrationem requirit.

Quod vero formula superior velocitatem etiam ultra centrum exhibeat, quamvis ibi vis alia, nempe negative agens sit, inde patet: quod si x etiam ultra centrum $\pm$ ve accipiatur (tantum ut distantia a centro), et sit ex gr. $n=3$, atque ad finem ipsius x sit $\alpha = \beta$ ante centrum; erit series ex $(A)x$ derivata (184), si post $(A)1\dot{x} - (A)0\dot{x}$ (quum pro x ultra centrum incrementa ad distantias aequales opposita priorum sint), quasi retrorsum continuetur, sequens: $(A)3\dot{x} - (A)2\dot{x} + (A)2\dot{x} - (A)1\dot{x} + (A)1\dot{x} - (A)0\dot{x} + (A)0\dot{x} - (A)1\dot{x} + (A)1\dot{x} - (A)2\dot{x} + (A)2\dot{x} - (A)3\dot{x}$, nempe incrementum supra β erit 0 ; id est erit et hic v velocitas eadem, nempe β .

Erat autem conditio tantum supposita, quasi punctum in spatio vi attractiva telluris tota pol

leret. Si vero globus radii r uniformiter densus esset; tum vires attractivae essent ut distantiae z a centro. Unde quum vis sit $\frac{zg}{r}$ (nempe $r:z = g$

$$\frac{zg}{r}), \text{ erit } v = \left[\sqrt{\frac{2g}{r} \int z dz (r-z)} = -\sqrt{\frac{2g}{r} \int z} \right.$$

$$\left. (\text{quoad } z) = -\sqrt{\left(\frac{2g}{r} \cdot \frac{z^2}{2} \right)} = -\sqrt{\frac{gz^2}{r}} \right] + \text{const.}$$

Est autem constans $\sqrt{rg}$: nam pro $z=r$ est (A)' $r = 0$, et (B)' $r = -\sqrt{\frac{gr^2}{r}} = -\sqrt{gr}$, adeoque const

$$= \sqrt{gr}. \text{ Conseq. (A)' } z = \sqrt{rg} - \sqrt{\frac{gz^2}{r}} = \sqrt{g \left(r - \frac{z^2}{r} \right)},$$

quod pro $z=0$, fit $=\sqrt{gr}$; et si hoc addatur velocitati priori, quam formula superior ad superficiem terrae dat, prodit velocitas finita ad centrum.

Si nempe s usque ad superficiem terrae protendatur; erit $x=r$; adeoque $v=r\sqrt{2g \frac{(a-r)}{ar}}$, et

$$\text{si altitudo celeritati huic competens } a \text{ dicatur, est } a = \frac{v^2}{2g} = \frac{2r^2g(a-r)}{2gar} = \frac{r(a-r)}{a}. \text{ Hoc } \sim r, \text{ si}$$

$a \sim \infty$; id est altitudo celeritati minimae competens, qua globus de superficie terrae verticaliter explodendus esset (seposita resistentia) ut nunquam redeat, [sive velocitati, qua ad terram sola telluris attractione ex aeternitate (in certo tamen tempore) perveniret], radio terrae aequatur. Ita pro quovis corpore coelesti, radius corporis illius prodit.

Sit jam w functio temporis, deinde velocitatis.

$$\text{Sit } w = gt^\mu; \text{ erit } v = \int w (\text{quoad } t) = \int gt^\mu = \frac{gt^{\mu+1}}{\mu+1} \quad (198) + \text{const}; \text{ quod si } \mu=0, \text{ fit } = \frac{gt^0+1}{0+1}$$

$=gt$, uti est in motu uniformiter accelerato, ubi in quovis tempore vis eadem gt^0 egit; est enim

constans = 0 si pro $t=0$ velocitas 0 sit, si vero velocitas c sit ($\pm$ vel $-$), erit $c = \frac{g \cdot 0^{0+1}}{0+1}$ (Pro $t=0$) + const, adeoque $c=0$ + const, et const = c . Est porro $s = \int v(\text{quoad } t) = \int \frac{gt^{\mu+1}}{\mu+1} = \frac{gt^{\mu+2}}{(\mu+1)(\mu+2)}$ + const; quod pro $\mu=0$ (ut in motu uniformiter accelerato) fit $\frac{gt^2}{2}$.

Sed erat etiam (202) $t = \int \frac{1}{v}$ (quoad s)
 $= \int \frac{\mu+1}{gt^{\mu+1}}$ (quoad s); potest autem t per s exprimi, ut substituendo derivata pura reddatur; nam
 $t = \sqrt[\mu+2]{\frac{(\mu+1)(\mu+2)s}{g}}$, adeoque $t^{\mu+1} = \beta s^{\frac{\mu+1}{\mu+2}}$
 (si coefficientis ipsius s ad $\frac{1}{\mu+2}$ elevati, β dicatur).
 Erit igitur $\frac{\mu+1}{gt^{\mu+1}} = \frac{\mu+1}{g\beta} \cdot s^{\frac{(-\mu-1)}{\mu+2}}$, atque hujus

functio primitiva est (per 198) $\frac{1}{g\beta} \frac{(\mu+1)s^{\frac{1}{\mu+2}} \cdot (\mu+2)}{(\mu+2)}$
 quod pro casu, ubi $\mu=0$, fit $\sqrt{\frac{2s}{g}}$; nam tum
 $\beta = \sqrt{\frac{2}{g}}$, $\frac{1}{\mu+2} = \frac{1}{2}$, $\mu+2=2$, $= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, e
 quo per $\sqrt{2}$ in valore ipsius β deletur unus factor,
 uti ex $g = \sqrt{g} \cdot \sqrt{g}$ unus per $\sqrt{g}$ ex β deletur.

5to. Sit jam vis w functio velocitatis v ; uti in medio resistente ponitur, resistantiam in ratione quadrata velocitatum esse, pro eadem densitate, tenacitate, et ejusdem corporis superficie eadem obversa (quamvis experimentis (a Clarissimo *Benzenberg*) institutis nonnisi intra certos limites comprobetur).

Si celeritas initialis C sit, adeoque pro $t=0$ sit $C=v$, et motus in medio uniformiter denso fiat, nec ulla alia vis agat praeter medii resistantiam; erit $w = -\frac{1}{2}at^2$, atque per $-av^2$ exprimi poterit, per α coefficientem ipsius v^2 illum constantem intelligendo, quem densitas medii, superficies obversa & c determinant.

Exemplo sit sphaera, cujus diameter sit D , massa M , densitas N ies major quam medii, pondus ad terram (in vacuo) sit $M'=1$ (ejusdem massae ad μ tuplam a centro terrae distantiam μ^2 ies minus, ad solem vero ultra 20ies majus esset).

Demonstratur in Physica: 1mo quod sive planum in fluidum, sive fluidum in planum impegerit perpendiculariter, celeritate c ; quantitas vis agentis sit (intra justos limites per alias causas physicas exortos) = ponderi prismatis ex illo fluido ad basin dicto plano aequalem constructi, ad altitudinem illam, qua corpus prope terram libere labendo, ad imum velocitatem finalem c acquireret. 2do demonstratur etiam, quod si pro plano dicto sphaera diametri D sit basis prismatis dicti (propter faciliorem per superficiem sphaericam defluxum) dimidia area circuli maximi ponenda sit. Dicatur hoc *prisma resistantiae*.

Erit hoc pacto prismatis resistantiae soliditas $\frac{\pi D^2}{8} \cdot \frac{v^2}{2g}$, pondus vero $\frac{3}{4DN} \cdot \frac{v^2}{2g}$; nam dimidia area circuli maximi est $\frac{\pi D^2}{8}$, altitudo velocitati v competens autem est $\frac{v^2}{2g}$ (pro g vim gravitatis ad terram velocitate finali expressam denotante); esset porro pondus prismatis hujus, si materia ejus cum sphaerae materia homogenea esset, $\frac{3v^2}{8gD}$, nam sphaerae soliditas est $\frac{\pi D^3}{6}$, pondus autem poni-

ur 1, unde $\frac{\pi D^3}{6} : \frac{\pi D^2 v^2}{8 \cdot 2g} = 1 : \frac{3v^2}{8Dg}$ (per reg. de-
tri); et si medii materia Nies rarior sit, pondus
prismatis est $\frac{3v^2}{8gDN}$. Si jam altitudo illa A quae-

ratur, (quae *exponens resistentiae* dicitur), de qua
libere lapsum corpus ad imum velocitatem fina-
lem c tantam acquireret, ut pondus prismatis
resistentiae (adeoque resistentia) ponderi sphae-
rae esset aequalis: erit pondus prismatis, cujus
basis $\frac{\pi D^2}{8}$, altitudo A, (eodem modo ut supra)=

$\frac{3A}{4DN}$; quod si $=1$ (ponderi sphaerae) sit, erit

$A = \frac{4DN}{3}$, atque velocitas c ipsi A competens est

$= \sqrt{2Ag}$. Unde resistentia pro velocitate v aequa-
tur $\frac{v^2}{2Ag} = \frac{v^2}{c^2}$; nam hoc est $= v^2 : \frac{8DNg}{3} = \frac{3v^2}{8DNg}$;

atque, quum vis ponderis 1 in sphaeram massae
M agens sub 1'', producat velocitatem g , vis pon-
deris $\frac{v^2}{c^2}$ in eandem massam agens produceret ve-

locitatem $\frac{v^2 g}{c^2}$ sub 1'', adeoque $\frac{v^2 g}{c^2}$ sub t . Erat ve-

ro (219) $wt \equiv \dot{v}$, et $t \equiv \frac{\dot{v}}{w}$, adeoque hic $\dot{v} \equiv$

$\frac{v^2 g}{c^2}$, et $t \equiv \frac{c^2 \dot{v}}{v^2 g} = \frac{c^2 v^{-2} \dot{v}}{g}$. Est igitur heic $\alpha = \frac{g}{c^2}$,

quod etiam $= \frac{1}{2A} = \frac{3}{8DN}$.

Est (202) $t = \int \frac{1}{w} \text{ (quoad } v \text{)} = \int \frac{-1}{\alpha v^2} = \frac{1}{\alpha v}$

+ const; nam $\frac{-1}{\alpha v^2} = \int \frac{1}{\alpha v} \text{ (quoad } v \text{) (198)}$

Constans vero prodit, si $\frac{1}{\alpha v}$ ponatur $= (B)t$, et t ponatur $(A)t$; erit $(A)o = o$, et $(B)o = \frac{1}{\alpha C}$, quia pro $t = o$ est $v = C$, adeoque $\frac{1}{\alpha v}$ fit $\frac{1}{\alpha C}$; itaque $(A)o - (B)o = -\frac{1}{\alpha C}$, atque $t = \frac{1}{\alpha v} - \frac{1}{\alpha C} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{C} \right)$. Unde patet; pro t utvis magno posse v tam parvum accipi, ut ei aequetur, et aeternitatem requiri, ut motus desinat, quantumvis fuerit C .

Hinc prodit $v = \frac{C}{\alpha C t + 1}$; unde si ipsi α substituat^{ur} $\frac{1}{2A} = \frac{3}{8DN}$, erit $v = \frac{8CDN}{3Ct + 8DN}$; quod crescet, si-
ve D crescat sive N ; patet enim sive D sive N per $i > 1$ multiplicetur (reducendo ad denom. eundem) valorem majorem fieri. Quo densior itaque massa, majorque globi diameter eadem velocitate C explosi eo majus v .

Est quoque $\int v(\text{quoad } t) = s$, et $\dot{t} \equiv \frac{\dot{v}}{w}$, si-
ve (ex $v\dot{t} \equiv \dot{s}$, et $\dot{t} \equiv \frac{\dot{v}}{w}$, adeoque $\frac{v\dot{v}}{w} \equiv \dot{s}$) etiam
 $\int \frac{v}{w} = s$: itaque pro hoc casu $\int \frac{v}{-\alpha v^2}$ [sive
 $\int \frac{1}{-\alpha v}$] (quoad v) $= s = -\frac{1}{\alpha} \log v$ (198) + const
Prodit vero const. $= -\alpha^{-1} \log C$; quum pro $s = o$ sit
 $v = C$, adeoque si s sit $(A)s$, et $(B)s$ sit $-\frac{1}{\alpha} \log v$,
erit $(B)o = -\frac{1}{\alpha} \log C$; con sequ. $(A)o - (B)o = \frac{1}{\alpha} \log C$,
atque $s = \frac{1}{\alpha} \log C - \frac{1}{\alpha} \log v = \frac{1}{\alpha} (\log C - \log v)$

$= \frac{1}{\alpha} \log \frac{C}{v}$. Itaque spatium omni dabili majus fieri potest.

Si vis constans g continuo agens supponatur (uti ad haud ita magnam a terra distantiam cum errore exiguo vis gravitatis est, atque supponatur item medium uniformiter densum: erit w (vis quae in corpus vi g deorsum sollicitatum agit) $= g - \alpha v^2$.

Eritque $t = \int \frac{1}{w} = \int \frac{1}{g - \alpha v^2}$ (quoad v); est autem $\frac{1}{g - \alpha v^2}$ (si $\frac{g}{\alpha}$ brevitatis causa β dicatur) $= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\beta}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\beta+v}} + \frac{1}{\sqrt{\beta-v}} \right)$; (substituendo patet); itaque $t = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\beta}} \int \left(\frac{1}{\sqrt{\beta+v}} + \frac{1}{\sqrt{\beta-v}} \right) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\beta}} \left[\int \frac{1}{\sqrt{\beta+v}} + \int \frac{1}{\sqrt{\beta-v}} \right] = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\beta}} \left[\log(\sqrt{\beta+v}) - \log(\sqrt{\beta-v}) \right]$; esset nempe $\frac{-1}{\sqrt{\beta-v}}$ derivata quoad v ipsius $\log(\sqrt{\beta-v})$, (198); itaque $t = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\beta}} \log \frac{\sqrt{\beta+v}}{\sqrt{\beta-v}} + (\text{const} = 0, \text{ si pro } t = 0, \text{ et } v = 0, \text{ adeoque } \frac{\sqrt{\beta+v}}{\sqrt{\beta-v}} = 1 \text{ et } \log 1 = 0 \text{ sit})$.

Hinc $2\alpha t\sqrt{\beta} = \log \left(\frac{\sqrt{\beta+v}}{\sqrt{\beta-v}} \right)$, adeoque (158 et 43)

$e^{2\alpha t\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta+v}}{\sqrt{\beta-v}}$, atque (unitatem per utrum-

que dividendo) est $e^{-2\alpha t\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta-v}}{\sqrt{\beta+v}}$; quod

itaque ~ 0 , si $t \sim \infty$; et hinc v (crescendo quidem semper) $\sim \sqrt{\beta} = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}$, hoc nunquam attingendo; (scil. cum $\sqrt{\beta-v} \sim 0$).

Patet vero v , datis α, t, g ex aequatione ista prodire.

Spatium s autem est $\int \frac{v}{w} = \int \frac{v}{g - \alpha v^2}$ (quoad v), quod (per 198) est $= -\frac{1}{2\alpha} \log (g - \alpha v^2) + \text{const}$; nam $\frac{-2\alpha v}{g - \alpha v^2}$ derivata quoad v ipsius $\log (g - \alpha v^2)$ est.

Constans vero est $\frac{1}{2\alpha} \log g$, nam $s=0$ pro $t=0$, et tum v quoque positum est $=0$; itaque $0 = -\frac{1}{2\alpha} \log (g - 0) + \text{const}$; itaque $\text{const} = \frac{1}{2\alpha} \log g$,

atque $s = \frac{1}{2\alpha} [\log g - \log (g - \alpha v^2)] = \frac{1}{2\alpha} \log \frac{g}{g - \alpha v^2}$

Notandum vero est, quod si durante motu per medium massa M gravitet, e pondere ejus nempe ex M' subtrahi debeat pondus medii cujus locum occupat, quum hoc a medio ipso teneatur; itaque si globus Nies densior sit medio, pro pondere sphaerae in hoc casu non 1, sed $1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}$, a-

deoque pro g in $g - \alpha v^2$, ponendum $\frac{(N-1)g}{N}$ erit.

Unde limes dictus velocitatis est $\sqrt{\beta} = \sqrt{\left[\frac{(N-1)}{N} g \right]}$

$:(1:2A)] = \sqrt{\frac{2A(N-1)}{N} g} = c \sqrt{\frac{N-1}{N}}$, si velocitas

altitudini A competens c dicatur; nam α erat $= \frac{1}{2A}$, et $c^2 = 2Ag$, adeoque $c = \sqrt{2Ag}$. Et quo den-

sior globus est, id est quo majus N , celeritas eo propius ipsi c venit, nunquam, tamen eam assequens, de quacunque altitudine per medium uniformiter densum cadat: unde cur pluviae per ae-

rem cadentes crania haud perforant, intelligitur; (densitas quidem aeris sursum decrescit, quod tamen etiam data lege in calculum revocari potest). Patet etiam globum verticaliter deorsum celeritate dicta explosum, ut resistentia ponderi ejus aequetur, in medio uniformiter denso, uniformiter cadere.

XI. Si C continuum aliquod e spatio sit, deturque tale punctum, per quod transeunte plano quovis ejusmodi, ut una portio ipsius C in unam illius plagam, altera in alteram cadat, ipsum C bisecetur: dicitur punctum illud *centrum magnitudinis* ipsius C .

Per 3 plana unum punctum A commune habentia, et ad se invicem $\perp$ ria, quodvis spatii punctum, data ejus a singulis distantia, manifesto determinatur (193) pro A tanquam capite abscissarum: potestque quodvis finitum M ita poni, ut totum M in aliquem 8 angulorum qui per ejusmodi 3 plana efformantur, (saltem nulla pars extus) cadat.

Si M ita cadat, ut plane dicebatur, et pro quovis P dictorum 3 planorum, ductis ad aliquod eorundem planis ad intervalla numero n aequalia parallelis, a puncto proximo ipsius M usque ad remotissimum (id est ab illo, quo nullum propius est, usque ad illud, quo nullum remotius est); et partibus ipsius M inter quaevis proxima plana parallela dicta contentis, nomine generali α' dictis, respondeat cuivis α' inter eadem plana contentum aliquod α'' , aut ipsum gaudens centro magnitudinis, aut constans e partibus certis centro magnitudinis gaudentibus; deturque tale punctum p ad distantiam D a P ; ut si quodvis α'' , ipsum, si centro magnitudinis gaudeat, si non, tum partes dictae centro magnitudinis gaudentes, nomine generali α dicantur, et S dicatur summa omnium productorum e quovis α in distantiam centri magnitudinis ejus a P , possit n pro quovis dato ω ita augeri, et ipsa α ea lege accipi, ut $S - MD$ sit $< \omega$

(aut $=0$ sit), atque $\frac{z'}{z''}$ sit $=1$ aut ~ 1 si $n \sim \infty$: tum p dicitur *centrum gravitatis geometricum ipsius M*.

Demonstrari potest dari pro quovis M tale p , ut $S=MD$, sive $S \sim MD$, adeoque $\frac{S}{M} = D$, vel $\frac{S}{M} \sim D$, atque pro $S \sim S'$ esse $\frac{S'}{M} = D$. Dari igitur talem limitem pro tali casu demonstrandum est, et quidem ita ut (pro quovis z' et z'' simultaneis) $\frac{z''}{z'} \sim 1$; atque tum methodus exponen-

da est, functionem istam, non in concreto sed non-nisi per limitem datam (191) differentiandi.

1mo. Si u sine fine crescat ex b (Fig. 26) versus c , et simul u' sine fine decrescat ex b versus b , atque u semper $< ac$ sit: tum u gaudet limite (per p. 47), et si limes iste β dicatur, ex a incipiendo neque ultra c nec intra nec in b terminatur; adeoque est $< ab$, et $> ab$.

Nam si ultra c ex gr. in $*$ terminaretur; tum cujusvis u differentia a β esset $> c_*$, quia quodvis u ante limitem $< ac$ est. Ita si ante b terminaretur β , quantitate q , cujusvis u (quum inter b et c terminetur) differentia a β esset $> q$. Quum igitur in neutro casu tendere differentia ad 0 posset, β limes ipsius u non esset. Ita nec in b terminatur.

2do. Atque hinc si β sit $= (F)m\dot{x} - (F)(m-1)\dot{x} = (f)m\dot{x}$, et u' sit $= (U')m\dot{x} - (U')(m-1)\dot{x}$, et hoc dicatur $(u')m\dot{x}$, atque u sit $= (U)m\dot{x} - (U)(m-1)\dot{x}$, quod dicatur $(u)m\dot{x}$; ac (pro $n \sim \infty$), $\frac{(u)m\dot{x}}{(u')m\dot{x}}$

~ 1 ; tum etiam $\frac{(u)m\dot{x}}{(f)m\dot{x}} \sim 1$; et si $(B)n\dot{x} -$

$(B)(m-1)\dot{x} = (b)m\dot{x}$ tale sit, ut $\frac{(u)m\dot{x}}{(b)m\dot{x}} \sim 1$,

erit $(F)x - (F)o = (B)x - (B)o$; et si $(B)x$ functio summatrix valoris noti sit, fiet $\int (u)x = (F)x = (B)x + \text{const.}$

Sit ex gr. (Fig. 27) centri gravitatis areae in plano inter abscissam x , et ordinatam y atque lineam cujus aequatio sit $y = (A)x$, comprehensae, distantia prius a plano P, deinde ab alio ex x ad P $\perp$ ri quaerenda.

Consideretur cuivis $\dot{x}$ appertinens $\dot{x}'$ superius inter plana ad P parallela contentum, sitque $\dot{x}$ rectangulum 2α ; erit distantia centri magnitudinis hujus $\alpha + v + \frac{\dot{x}}{2}$; multiplicato autem n per 2, ori-

entur duo rectangula, α , et $\alpha + \omega$, atque distantiae centrorum magn. (retinendo valorem ipsius $\dot{x}$ priorem) erunt $\alpha + v + \frac{\dot{x}}{4}$ et $\alpha + v + \frac{3\dot{x}}{4}$, et produ-

cta ex ipsis $\dot{x}$ in distantias erunt prius $2\alpha(\alpha + v + \frac{\dot{x}}{2})$, postea vero $\alpha(\alpha + v + \frac{\dot{x}}{2}) + (\alpha + \omega)(\alpha + v + \frac{3\dot{x}}{4}) = 2\alpha(\alpha + v + \frac{5}{8}\dot{x}) + \omega(\alpha + v + \frac{3\dot{x}}{4})$. Quod si con-

tinuetur semper porro multiplicando n per 2, manifesto crescet productorum istorum summa, tam huic quam cuivis $\dot{x}$, adeoque etiam toti x appertinens; manebit tamen ipsi x appertinens $\leq xy(\alpha + x)$ et pars ipsi $\dot{x}$ (valorem ejus priorem intelligendo) appertinens manebit $\leq \dot{x}y(\alpha + x)$. Gaudet igitur tam pars toti x quam ipsi $\dot{x}$ appertinens limite (p. 47) et summa limitum ad quos tendent partes omnibus $\dot{x}$ appertinentes, est limes ipsi x appertinens, qui per constantem M divisus, dat (per def) distantiam D a P.

Manifesto vero, si limes toti x appertinens $(F)x$ dicatur, erit $(F)m\dot{x} - (F)(m-1)\dot{x}$ sive brevius $(f)m\dot{x}$, limes m to $\dot{x}$ appertinens, differentiale verum ipsius $(F)x$.

Sed ex 1mo si $\dot{x}y(a+x)$ (omnia ad rectam reducendo) sit, id quod ibi ad erat, et $(\dot{x}y-k)(a+x)$ sit id quod ibi ac erat, et u sit summa productorum e rectangulis inscriptis in distantias centrorum magn. (nonnisi ipsi $\dot{x}$ priori appertinentibus, semper per 2 dividendo), u' vero sit summa rectangulorum circumscriptorum simultaneorum per distantias centrorum magn. multiplicatorum: manifesto manebit u semper $<(\dot{x}y-k)(a+x)$, crescens sine fine a $2a(a+v+\frac{\dot{x}}{2})$ incipiendo; limes igitur dictus ipsi $\dot{x}$ appertinens est $>y'\dot{x}(a+x-\dot{x})$ atque est $<y\dot{x}(a+x)$. (230)

Valet autem hoc de quovis $\dot{x}$, etsi n pro μ integro utvis magno per 2^μ multiplicetur; estque $\frac{y'\dot{x}(a+x-\dot{x})}{y\dot{x}(a+x)} \sim 1$; nam $\frac{\dot{x}}{\dot{x}}=1$, $\frac{y'}{y} \sim 1$, et

$\frac{a+x-\dot{x}}{a+x} \sim 1$ (p. 80); consequ. etiam $\frac{y\dot{x}(a+x)}{(f)m\dot{x}} \sim 1$; estque $\frac{y\dot{x}(a+x)}{M}$ differentiale ipsius $\frac{(F)x}{M}$

et $\frac{y(a+x)}{M}$ derivata quoad x est, atque $\frac{\int(a+x)JM}{M}$

est dist. centri grav. a P, quum $y=JM$ in hoc casu; et pariter pro aliis casibus idem prodit.

Si vero distantia centri grav. ab $a+x$ quaeratur: prius $\propto$ erit $y'\dot{x}$, et distantia centri magn. est $\frac{y'}{2}$,

adeoque factum $=\frac{1}{2}\dot{x}y'^2$; si vero bisecetur $\dot{x}$, erit

summa factorum $=\frac{1}{2}ay' + \frac{1}{2}(a+\omega)(y'+\lambda)$, si

ordinata intermedia praecedentem quantitate λ superet. Crevit itaque, crescetque sine fine summa productorum (ut antea), manens tamen $<xy$, quapropter hic quoque limitem dari constat. Est quo-

que limes hic $> \frac{1}{2} \dot{x} y'^2$, et $< \frac{1}{2} \dot{x} y^2$, ac $\frac{1}{2} \dot{x} y'^2$:

$\frac{1}{2} \dot{x} y^2 = \frac{y'^2}{y^2} \sim 1$; hinc $\frac{\dot{x} y^2}{2M}$ differentiale, et $\frac{y^2}{2M}$

derivata (quoad x) distantiae ab axe centri grav.

areae est; pro linea ipsa vero prodire $\frac{y \sqrt{M}}{M}$ (pro M

lineam denotante) facile patet.

Si $a+x$ figuram in 2 partes geometricè aequales synmetricè dividat; atque distantia cenri grav. a H ultra figuram ad distantiam D' ipsi $a+x$ parallelam, quaeratur: rectangulorum priorum inscriptorum (ita et circumscriptorum) dupla fient, et cujusvis ejusmodi dupli centrum magn. in $a+x$ cadet; unde manifesto etiam limes summae productorum e rectangulis inscriptis in distantiam a H constantem D' , erit MD' , atque dist. centri grav.

a H erit $\frac{MD'}{M} = D'$ (per def.)

Quoad lineam ipsam autem pro hoc casu erit z'' superius, complexus cordarum arcuum inter plana ad P parallela proxima; quarum nunc aequalium quaevis (sensu 229) z dici potest; est autem unum z ipsi H propius altero eidem synmetricè respondente; atque si illius z , quod ipsi H propius est, distantia centri magn. a H dicatur b , remotioris vero distantia ab $a+x$ dicatur c ; erit summa productorum ex utroque z in centrorum magn. eorum distantias $= bz + (b+2c)z = 2z(b+c)$; est autem $2(b+c)$ constans, utcunque mutantur b et c ; adeoque et hic limes summae productorum omnium z in suas distantias, erit $2M(b+c)$, (pro M lineam dimidiam denotante) et distantia centri grav. a H

erit $\frac{2M(b+c)}{2M} = b+c$; quae distantia ipsorum H et

$a+x$ est. Consequ. centrum grav. in $a+x$ cadit.

Corporis per revolutionem circa axem generati quoque, centrum grav. in axem cadere pariter patet.

Omnia dicta vero ad ordinatas decrescentes quoque facile applicantur.

Pro linea curva (etsi non in planum cadat) cordae arcuum inter plana dicta parallela contentorum, sunt ipsa $\propto$ centro magnitudinis gaudentia; pro superficiebus autem talia plana $\propto$ ponuntur centro magnitudinis gaudentia, quorum summae limes sit superficies ipsa; idem quoad solida patet.

Est autem etiam dum tantum longitudo curvae, aut area superficiei curvae quaeritur, functio cujus differentiale quaeritur, non in concreto (ut ex gr. area parabolae) data: sed demonstrandum est litem dari, qui functionem absolutam differentiandam praebeat. Ita (219) spatium in motu difformi, est functio absoluta per litem tantum data; quem dari ibi quoque patet.

Demonstrari potest, pro quavis linea, superficie, et corpore quovis dari centrum gravitatis; imo si planum quodvis Q per id ducatur, atque agantur plana ei utrinque ad distantias aequales parallela, et respectiva $\propto$ inter proxima plana parallela contenta per distantias centrorum magnitudinis a Q multiplicata *momenta* vocentur, ac in una ipsius Q plaga accipiantur $\pm$ ve in altera $\mp$ ve; erit limes summae omnium momentorum 0. Si vero in P e fine ipsius D (in casu superiore) ducatur L_{ris} ad D , et ad hanc L_{rem} fiat planum L_{re} P' ultra M , et sectio planorum P et P' fiat axis motus plani P' : tum in vecte homodromo quies erit; si ex gr. P' horizontaliter concipiatur, et singulae partes ipsius M in distantiis suis deorsum gravitent, atque vis tota M in p sursum agat: erit nempe summa momentorum 0, quum nulla assignabili sit $>$ vel $<$ unum nempe MD , quam summa reliquorum.

Exempla. Imo. Si M dimidium segmentum parabolae sit: et quaeratur distantia centri grav. a vertice: erit

$$\frac{\int x \mathcal{M}}{M} = \frac{\int x y}{M}, \text{ per } \mathcal{M} = y, \text{ et hoc est} =$$

$$\int \frac{x p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{M} = \frac{p^{\frac{1}{2}}}{M} \int x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}} : \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}}$$

$x^{\frac{3}{2}}$ (205) $= \frac{3}{5} x$. Si hoc in axe sumatur, erit centrum grav. totius segmenti (233); si vero centrum grav. dimidii segmenti quaeratur, tum (per 233) etiam distantia ejus ab axe $= \frac{\int x^2}{2M}$ quaerenda est.

2do. Si M paraboloidem denotet; est $\frac{\int x dM}{M} = \frac{\pi p}{M}$

$$\int x^2 \text{ (211) } = \frac{\pi p x^3}{3M} = \frac{\pi p x^3}{3} : \frac{1}{2} p x^2 = \frac{2}{3} x,$$

per $M = \frac{\pi p x^2}{2}$.

3tio. Si M segmentum sphaerae sit: est $\frac{\int x dM}{M}$

$$= \frac{\int x \pi y^2}{M} = \frac{\pi}{M} \int x(2x - x^2) \text{ (pro abscissa a fine}$$

ne diametri, et radio 1); et hoc est $= \int \frac{2\pi x^2}{M}$

$$= \int \frac{\pi x^3}{M} \text{ (per 198) } = \left(\frac{2\pi x^3}{3} - \frac{\pi x^4}{4} \right) : M = \pi \cdot \frac{8x^3 - 3x^4}{3 \cdot 4}$$

$$: M. \text{ Sed } M = \int \pi y^2 = \int \pi (2x - x^2) = \int 2\pi x - \int \pi x^2$$

$$= \pi x^2 - \frac{\pi x^3}{3} = \pi \frac{(3x^2 - x^3)}{3}. \text{ Conseq. } \frac{\int x dM}{M} =$$

$$\pi \cdot \frac{8x^3 - 3x^4}{3 \cdot 4} : \frac{\pi(3x^2 - x^3)}{3} = \frac{2x - \frac{3}{4}x^2}{3 - x}$$

4to. Si M arcum circuli a fine diametri incipientem denotet usque ad ordinatam abscissae a † x e centro acceptae: erit pro distantia centri grav.

a centro , $\frac{\int (a+x) \mathcal{M}}{M} = \frac{\int -(a+x) (1+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{M}$

(per 200 et 204) ; quod item, quum y sit =

$[1-(a+x)^2]^{\frac{1}{2}}$, et $y = -(a+x)[1-(a+x)^2]^{-\frac{1}{2}}$, at-

que $1+y^2 = \frac{(a+x)^2 + 1-(a+x)^2}{1-(a+x)^2} = [1-(a+x)^2]^{-1}$,

eritque $\frac{\int -(a+x) [1-(a+x)^2]^{-\frac{1}{2}}}{M} = \frac{[1-(a+x)^2]^{\frac{1}{2}}}{M}$

Unde si (ut 1mo) et ab altera parte accipiatur arcus aequalis: totius arcus dist. centri grav. a centro, erit 4ta prop. ad totum arcum, cordam et radium (heic = 1).

5to. Si M segmenti circularis dimidium sit; et dist. centri grav. a centro quaeratur: erit

$$\begin{aligned} \frac{\int (a+x) \mathcal{M}}{M} &= \frac{\int -(a+x)y}{M} = \frac{\int -(a+x)[1-(a+x)^2]^{\frac{1}{2}}}{M} \\ &= \frac{\frac{2}{3} [1-(a+x)^2]^{\frac{3}{2}}}{M} = \frac{\frac{2}{3} y^3}{M} = \text{dist. centri} \end{aligned}$$

grav. a centro pro segmento toto quoque (ut 1mo.).

6to. Pro sphaerae superficie est $\frac{\int x \mathcal{M}}{M}$ (pro abscissa et dist. centri grav. a fine diametri), $= \int 2\pi x (2x-x^2)^{\frac{1}{2}} (2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$; nam heic $\mathcal{M} = 2\pi y (1+y^2)$ (per 200), y autem $= (2x-x^2)^{\frac{1}{2}}$, et $y = (1-x)(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, atque $1+y^2 = \frac{(1-x)^2}{2x-x^2} + 1 = \frac{1}{2x-x^2}$; adeoque $2\pi xy(1+y^2)^{-\frac{1}{2}} =$

$$2\pi x \frac{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}{1} = 2\pi x; \text{ et } \frac{\int 2\pi x}{M} = \pi x^2 : \int 2\pi y$$

$$(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(1+y^2)^{\frac{1}{2}} (\text{per } 200) = \pi x^2 : \int 2\pi = \frac{\pi x^2}{2\pi x} = \frac{x}{2}.$$

6to. Superficies per revolutionem circa axem generata $= \int 2\pi y (1+y^2)^{\frac{1}{2}}$, est aequalis lineae, cujus revolutione generata est, per distantiam ab axe centri grav. lineae, multiplicatae.

Nam linea est $= \int (1+y^2)^{\frac{1}{2}}$, distantia centri grav. lineae ab axe est $\int y (1+y^2)^{\frac{1}{2}} : \int (1+y^2)^{\frac{1}{2}}$; nam heic $\int M = \int (1+y^2)^{\frac{1}{2}}$, et dist. ab axe centri grav. est $= \frac{\int y M}{M}$ (233). Est autem peripheria (radii distantiae centri grav. aequalis) $= \frac{2\pi \int y (1+y^2)^{\frac{1}{2}}}{\int (1+y^2)^{\frac{1}{2}}}$; et hoc per lineam ipsam $=$

$\int (1+y^2)^{\frac{1}{2}}$ multiplicatum est $= \int 2\pi y (1+y^2)^{\frac{1}{2}}$ = superficiei. Soliditas eadem revolutione generata est = areae per peripheriam centro grav. areae descriptam multiplicatae: nam soliditas est $\int \pi y^2$,

et haec est $= \frac{2\pi \int \frac{1}{2} y^2}{\int y}$. $\int y$; atque centri grav.

areae dist. ab axe erat $= \frac{\int \frac{1}{2} y^2}{M} = \frac{\int \frac{1}{2} y^2}{\int y}$.

et peripheria radii huic aequalis, est $= \frac{2\pi \int \frac{1}{2} y^2}{\int y}$,

quod per aream $= \int y$ multiplicatum est $= \int \pi y^2$.

XII. Si vero M in plani P plagam aliquam cadens, circa rectam in P cadentem ut motus axem, vi gravitatis descendat: punctum illud, cujus distantia q ab axe aequatur longitudini penduli simplicis cum dicto composito isochroni, *centrum oscillationis* audit. Si tantum geometrice pro ipso M ubique aequedens et aequigravi consideretur: prodit q , si quodvis x (in XI) per distantiae (heic ab axe motus) non primam ut ibi sed 2^{dam} potentiam multiplicetur, et summae productorum ejusmodi limes per MD dividatur, (D distantiam centri grav. ab axe denotante); nempe $q = \frac{\int x^2 \mathcal{M}}{MD}$ (pro eo quod ibi $\alpha + x$ erat, heic distantia ab axe, x dicta.

Si ex gr. M rectam x denotet, extremitate una fixa oscillantem: erit $D = \frac{x}{2}$, et $\mathcal{M} = 1$, atque

$$\int x^2 \mathcal{M} = \frac{x^3}{3}, \text{ adeoque } q = \frac{\int x^2 \mathcal{M}}{DM} = \frac{x^3}{3} : \frac{x}{2} \cdot x =$$

$$\frac{2}{3} x; \text{ et pendulum simplex longitudinis } \frac{2}{3} x$$

ipsi x circa finem oscillanti isochronum est.

* (Fig. 28). Si nimirum (juxta ingeniosum *Johannis Bernoullii* conceptum) rectae rigidae et gravitatis expertis, extremitate superiore fixae, non verticaliter sitae, certis punctis affigi certa pondera α, β -- (ut res simplicior sit, instar puncti considerata) concipiantur: descendant massae hoc pacto connexae, motu quidem accelerato (nam undevs descenderent, donec centrum grav. in verticalem pervenerit), at minus accelerato, quam si sola massa α ad distantiam a posita esset, et magis accelerato, quam si sola massa β ad distantiam b esset.

Quasvis massarum α, β - - tamen eadem vis gravitatis sollicitat verticaliter deorsum; quod *Bernoullius* per *massas gravitate* (hac vel alia) *animari* exprimit: at cuiusvis massarum α, β - - certam certa gravitate animatam substituit, et omnibus prioribus annihilatis, omnes substitutas gravitatibus propriis animatas eidem puncto * affigendo, novum pendulum simplex fictitium construit, cujuscunque longitudinis datae priori composito isochronum; et inter omnia talia pendula simplicia priori isochrona, illud quaerit, quod plane gravitate quae ad terram est, animatur.

Ponatur gravitas ista, quae ad terram est, $=1$, ad quam reliquae gravitates referantur. Notum est, spatium, quod verticaliter quaevis massarum α, β - - sub i vi gravitatis describeret, esse idem; atque decomponendo, virium una a puncto suspensionis elisa, alteram esse vim w quae punctum quodvis in arcu percurrere urget; atque hanc esse vi gravitatis per sinum anguli u (pro radio 1 acceptum) multiplicatae aequalem (pro quovis angulo u).

Ita etiam notum est, pro temporis oscillatione eodem, esse longitudes pendulorum simplicium, uti gravitates. Hinc si massa ad μ tuplam distantiam μ tupla gravitate animetur; pendula simplicia (quantavis fuerit massa eadem gravitate animata) isochrona erunt.

Si jam massam α tollere libeat, et ad distantiam q massa $\frac{\alpha a^2}{q^2}$ gravitate $\frac{q}{a}$ animata ponatur:

erit vis illa qua gravitas $\frac{q}{a}$ massam $\frac{\alpha a^2}{q^2}$ ur-

get, ad vim illam qua gravitas $=1$ massarum α, β - - quamlibet urget, uti $\frac{a}{a}$ ad 1, id est uti q ad a ,

adeoque uti arcus simul per fines rectarum q et a describendi; momentaque nempe producta e distantis a puncto fixo k in massas per ipsarum

vires multiplicatas erunt aequalia; nempe si vis qua urgetur α , dicatur w , momentum ipsius α erit αaw , momentum massae $\frac{\alpha a^2}{q^2}$ vero erit $\frac{\alpha a^2}{q^2} \cdot \frac{qw}{a} \cdot q$

$= \alpha aw$. Sublato itaque α , massa $\frac{\alpha a^2}{q^2}$ gravitate $\frac{q}{a}$

animata ad distantiam q a puncto suspensionis posita, massarum reliquarum motum non magis promovebit aut retardabit, quam α ad distantiam a .

Sublato β etiam massa $\frac{\beta b^2}{q^2}$ gravitate $\frac{q}{b}$ animata

ad dist. q posita, [idem in motu penduli, quod antea β , praestabit. Eodem modo sublatis α, β - - -

omnibus, et ad distantiam q positis massis $\frac{\alpha a^2}{q^2}$,

$\frac{\beta b^2}{q^2}$ - - - gravitatibus $\frac{q}{a}$, $\frac{q}{b}$ - - - animatis, orietur

novum pendulum, simplex longitudinis q , massis dictis, gravitatibus propriis animatis ad imum appensis, priori composito isochrorum.

Si unitatis massarum, gravitate ad terram $= 1$ posita, pondus sit P (ex gr. unius librae), et $P=1$ ponatur: massae μ gravitate γ animatae pondus erit $\mu\gamma P$, sive $\mu\gamma$ (pro $P=1$ posito); si ex gr. μ quoad unitatem massarum expressum sit $\frac{2}{3}$, et γ quoad

gravitatum unitatem sit $= 4$, erit pondus $\frac{2 \cdot 4}{3}$, id-

est $\frac{8}{3}$ librarum.

Sint massae plures μ, μ' - - - gravitatibus γ, γ' - - - animatae: erit summa ponderum $= \mu\gamma + \mu'\gamma' - - -$; et si omnes hae massae gravitate Q animari concipiantur, pondus summae earum erit $(\mu + \mu' - - -) Q$; atque pondus hoc priori summae ponderum aequa-

le erit, si $Q = \frac{\mu\gamma + \mu'\gamma' - \dots}{\mu + \mu' - \dots}$, nam ex hoc sequitur

$Q(\mu + \mu' - \dots) = \mu\gamma + \mu'\gamma' - \dots$. In hoc casu itaque pondera massarum ad idem punctum * positarum gra-

vitatibus propriis animatarum, erunt $\frac{\alpha\alpha^2}{q^2} \cdot \frac{q}{\alpha} +$

$\frac{\beta b^2}{q^2} \cdot \frac{q}{b} - \dots$, nempe massae $\frac{\alpha\alpha^2}{q^2}$, $\frac{\beta b^2}{q^2} - \dots$ gravitati-

bus $\frac{q}{\alpha}$, $\frac{q}{b} - \dots$ animantur; unde Q prodibit di-

videndo (ut prius) summam ponderum per sum-

mam massarum; nempe $Q = \frac{\alpha\alpha + \beta b - \dots}{q} : \frac{\alpha\alpha^2 + \beta b^2 - \dots}{q^2}$

$= \frac{q(\alpha\alpha + \beta b - \dots)}{\alpha\alpha^2 + \beta b^2 - \dots}$; atque si ex omnibus quibuslibet

valoribus ipsius q , is quaeratur, pro quo fit $Q=1$

(nempe gravitati ad terram), erit $q = \frac{\alpha\alpha^2 + \beta b^2 - \dots}{\alpha\alpha + \beta b - \dots}$

$= \frac{\alpha\alpha^2 + \beta b^2 - \dots}{MD}$, si $\alpha + \beta - \dots$ dicatur M, et D sit di-

stantia centri grav. ab axe motus, nam (in XI) est $\alpha\alpha + \beta b - \dots = MD$. Erit autem etiam pro hoc q (quum pro quolibet sit) pendulum priori composito isochronum; atque nunc massa penduli simplicis gravitate 1 animatur, nec massa influit.

Centrum percussionis, ipsius M quo feriente omnis partis hujus celeritas o fieri potest, non supponit gravitatem: recta cum massis $\alpha, \beta - \dots$ mota circa k , sit $\gamma\alpha$ celeritas finalis ipsius α , dum istud M in puncto * aliquam massam ferit (γ coefficientem aliquem denotante); erit celeritas tunc γb ipsius β , ita cujusvis reliquarum celeritas erit γ per distantiam a k multiplicata. Quantitates actionis autem erunt $\alpha\gamma\alpha, \beta\gamma b^2 - \dots$, nempe per distantias sunt vires multiplicandae. Si jam vires aequales ipsis $\alpha\gamma\alpha, \beta\gamma b - \dots$ ad dist. q ponantur directione

opposita, et q tale sit, ut $(\alpha\gamma a + \beta\gamma b \dots)q = \alpha\gamma a^2 + \beta\gamma b^2 \dots$; tum omnis actio elidetur; erit autem $q = \frac{\alpha a^2 + \beta b^2 \dots}{\alpha a + \beta b \dots}$, ubi denominatori pariter substitui potest MD. Itaque formula eadem prodit; at centrum percussionis est idem in vacuo, aere, aqua &c, centrum oscill. si rectae dictae massae densitatis diversae affigantur, mutatur in diversae gravitatis specificae fluidis; e contra in eodem fluido centrum percussionis a situ percussi dependet; quum pro hoc casu centrum oscill. maneat.

§. 37. Plura adferre, quum nonnisi primaria fundamenta, e quibus reliqua promanant, exponere propositum sit, supervacuum est: attamen in §. 36. supposita demonstrare superest; et tum paucis adhuc, intellectu facilioribus, campum visionis in gratiam Tyronum augere licebit.

I. Sit $u = (A)x$, atque $(A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x}$ dicatur (ut supra) $\dot{u}$; erit $\dot{u} = (A)m\dot{x} - [(A)m\dot{x} - \dot{u}] = q - (q - \dot{u})$, si $(A)m\dot{x}$ generaliter q dicatur (sensu 187) et $(A)(m-1)\dot{x} = q - \dot{u}$; atque si quaeratur differentiale derivataque functionis $u^k = (A)x^k$ quod dicatur $(A')x$; erit terminus generalis seriei ex $(A')x$ derivatae, $(A')m\dot{x} - (A')(m-1)\dot{x} = q^k - (q - \dot{u})^k = q^k - [q^k - kq^{k-1}\dot{u} \dots]$ (per 150); quod item est $= kq^{k-1}\dot{u} + s$ (si summa aut limes summae terminorum post $kq^{k-1}\dot{u}$ sequentium s dicatur).

Sed $\frac{kq^{k-1}\dot{u}}{kq^{k-1}\dot{u} + s} \sim 1$ (si $n \sim \infty$); nam (per 143) in formula binomiali, pro exponente k , si $k > 1$, *exponens coeff.* semper decrescit, si vero $k < 1$, *exponens coeff.* semper < 1 est, et quidem in utroque casu sive $+$ sive $-$ fuerit k ; nempe pro $+$ $k > 1$, duo proximi exponentes *coeff.* exprimi possunt pro μ integro per $\frac{k-\mu}{\mu+1}$ et $\frac{k-\mu-1}{\mu+2}$; et re-

ducendo ad denom. eundem, patet priorem esse $>$ posteriore, (etiam pro $\mu = 0$), si vero $-k > 1$, demonstratum (143) est, maximum exponentem coeff. esse ipsum $-k$; et pro k (sive $+$ sive $-$) < 1 , esse quemvis exponentem coeff. < 1 .

Hinc quum duo casus sint; nempe series binomialis, aut terminata aut infinita est: terminatur pro k $\pm$ vo et integro; si non terminetur, tum exponens coeff. quivis aut $< k$ aut < 1 est. Consideretur prius ubi series infinita est, et exponentium coeff. maximus k est. Exponens seriei a $kq^{k-1}\dot{u}$ incipiendo semper fractio vera pro terminis sequentibus semper decrescens (pro $-k > 1$) esse poterit; nempe n ita augeri potest pro dato quovis ω , ut $\dot{u} < \omega$, adeoque $\dot{u} < \frac{q}{k}$, et $\frac{k\dot{u}}{q} < 1$ fiat; est au-

tem quivis seriei exponens, $\frac{\dot{u}}{q}$ per exponentem coeff. multiplicatus, adeoque $< \frac{k\dot{u}}{q}$ est.

Erit igitur, si $kq^{k-1}\dot{u}$ dicatur K , et limes summae terminorum post K sequentium (etsi omnes $\pm$ vi essent) s dicatur; $s < \frac{(k-1)K\dot{u}}{2q} : (1 - \frac{k\dot{u}}{q})$

(per 131), nempe terminus post K sequens est $\frac{(k-1)K\dot{u}}{2q}$; itaque $s < \frac{(k-1)K\dot{u}}{2(q-k\dot{u})}$, et $\frac{s}{K} < \frac{(k-1)K\dot{u}}{2(q-k\dot{u})K}$

id est $\frac{s}{K} < \frac{(k-1)\dot{u}}{2q-2k\dot{u}}$, quod ~ 0 si $\dot{u}$ quovis dabili minus fieri queat.

Unde (per 81) $\frac{K}{K+s} \sim 1$.

Consequ $\frac{k(A)m\dot{x}^{k-1}\dot{u}}{(A')n\dot{x} - (A')(m-1)\dot{x}} \sim 1$, id est

differentiale verum (sive terminus generalis) seriei ex $(A')x = (A)x^k = u^k$ derivatae, aequipollet

ipsi $k(A)m\dot{x}^{k-1}\dot{u}$: estque n ponendo more consueto pro m , $k(A)x^{k-1}\dot{u} = d(A')x$, id est $ku^{k-1}\dot{u}$ est differentiale (sensu stricto 191), et ku^{k-1} derivata ipsius u^k (quoad u).

Idem etiam ad integrum $\mp k > 1$ applicari potest; nempe tum quoque exponens seriei quilibet $< \frac{k\dot{u}}{q} < 1$ fieri potest, atque ibi s adhuc minus est, quam si series geometrica exponentis $\frac{k\dot{u}}{q}$ in ∞ extendatur.

Si vero $k < 1$, sive $\mp$ sive $-$ sit, exponens coeff. ubique < 1 erit, adeoque exponens seriei quilibet $< \frac{\dot{u}}{q}$ erit; atque tum in $\frac{s}{K} < \frac{(k-1)\dot{u}}{2q-2k\dot{u}}$, erit (si $k \mp$ sit), $k-1 < 1$, si vero $k -$ sit, $k-1 < 2$, et pariter in utroque casu patet, (ut prius), quod $\frac{(k-1)\dot{u}}{2q-2k\dot{u}} \sim 0$. Unde reliqua fluunt: nempe (per 197) 1mo. Si $\dot{u} \equiv \dot{x}(a)x$, hoc ipsi $\dot{u}$ substitui potest, ut sit $\dot{x}(a)x ku^{k-1}$ differentiale, et $(a)x u^{k-1}$ derivata quoad x ipsius u^k . Ex gr. $d(\alpha - \alpha x)^k$ quoad x) pro $u = \alpha - \alpha x$ atque α constante posita, $= -\alpha k(\alpha - \alpha x)^{k-1}\dot{x}$, et derivata $= -\alpha k(\alpha - \alpha x)^{k-1}$.

2do. Dari autem tale n idem pro omnibus q , pro dato quovis N et ε , ut (188) poscitur; in quovis casu (per 189) patet, si demonstretur, pro quovis q dari tale aliquod n , atque id pro eodem q , crescente n adhuc fortius valere.

Generaliter si superius $(A)q - (A)(q - \dot{u})$ sit $= \dot{u}(a)q + s$, atque $\frac{\dot{u}(a)q}{\dot{u}(a)q + s} \sim 1$, id est pro N utvis magno, manente q possit n ita accipi, ut

$\frac{\dot{u}(a)q - [\dot{u}(a)q + s]}{\dot{u}(a)q + s}$ idest $\frac{-s}{\dot{u}(a)q + s} < \frac{1}{N}$ sit; tum

$\frac{\dot{u}(a)q + s}{s} > N$ est, adeoque $\frac{\dot{u}(a)q}{s} > N - 1$, pro

casu, si $\dot{u}(a)q$ et s utrumque $\mp$, aut utrumque $\mp$ est, si vero opposita sint, tum $\frac{\dot{u}(a)q}{s} > N + 1$.

Si jam expressiones pro quovis n eadem maneant, sintque in quovis termino ipsius s , literae puncto insignitae una plures, eadem aut diversae quoque, inter quas tamen $\dot{u}$ adsit; atque crescente priore n , ex $\dot{u}$ fiat $\frac{\dot{u}}{v}$ (pro $v > 1$), et per hoc

quaevis litera puncto insignita, dividatur per quantitatem unitate majorem: quivis terminus ipsius s per ipso v majus dividetur; sit $p > 1$ minimum illorum, (saltem quo nullum est minus) per quae terminus aliquis ipsius s dividitur; manifesto si ex s fieret $\frac{s}{p}$, ex $\frac{\dot{u}(a)q}{s}$ fieret $\frac{p\dot{u}(a)q}{vs}$, quod

priore valore majus est; reipsa autem s per ipso p majus dividitur. adeoque valor adhuc major est. Consequ. crescente n , tanto fortius est novum $\frac{\dot{u}(a)q}{s} > N - 1$, si ex gr. tam $\dot{u}(a)q$ quam s $\mp$ sit;

et si opposita sint, tum $\frac{\dot{u}(a)q}{s} > N + 1$; adeoque

in casu utroque est $\frac{\dot{u}(a)q + s}{s} > N$; et hinc $\frac{s}{\dot{u}(a)q + s} < \frac{1}{N}$, sive $\frac{\dot{u}(a)q - \dot{u}(a)q - s}{\dot{u}(a)q + s} < \frac{1}{N}$.

Attamen pro casu antea relato, valorem quoque talis n , ejusdem (dato s et N) pro omnibus q , exhibere Tyronibus supervacuum non erit. Consideretur prius casus simplicior, nempe x^k , pro $u = x$: est id, quod antea $\dot{u}(a)q$ erat, heic $x^k q^{k-1}$, di-

caturque hoc, K ut supra. Erit (ut ibidem) s

$$< \frac{(k-1)K\dot{x}}{2q-2k\dot{x}}, \text{ id est } \frac{x}{n} \text{ ponendo pro } \dot{x}, \text{ erit}$$

$$s < \frac{K(k-1)x}{2qn-2kx}; \text{ atque si ipsi } n \text{ substituaturs}$$

$$\frac{[(N+1)(k-1)+2k]x}{2q}, \text{ posito (sed statim demon-}$$

strando) dato quolibet majus tale N accipi posse,

ut hic valor integer $\mp$ vus sit, per quem variabilis absoluta dividitur, atque sit $> \frac{kx}{q}$, ut expo-

nens seriei (ut supra) $\frac{k\dot{x}}{q}$ sit < 1 ; erit

$$s < K(k-1): \frac{2q(N+1)(k-1)+2k}{2q} - 2k; \text{ id}$$

$$\text{est } s < \frac{K(k-1)}{(N+1)(k-1)+2k-2k}, \text{ et } s < \frac{K}{N+1}; \text{ un-}$$

de $K > (N+1)s$, atque etsi K et s opposita sint, s ex k nonnisi unum s delendo, manet $K+s > Ns$;

consequ. $\frac{-s}{K+s} < \frac{1}{N}$ (abstrahitur scilicet heic a de-

terminatione $\mp$ et $-$ sensu p. 31).

Quod vero ipsum N quovis dato majus ita eligere liceat, ut n dato quovis majus $\mp$ vum sit; patet sic.

Si $\alpha > \beta$ sit: est pro $\mu \mp$ et > 1 , $\mu\alpha - \beta > \alpha - \beta$. Nam α et $\mu\alpha$ tunc aut utrumque $\mp$ aut utrumque $-$ est; atque erit (pro β et ω aut utroque $\mp$ vo aut utroque $-$ vo) $\alpha = \beta + \omega$, aut $\alpha = -\beta - \omega$; in casu primo est $\mu\alpha - \beta = \mu\beta + \mu\omega - \beta = \mu\omega + \beta(\mu - 1)$, et $\alpha - \beta = -\beta - \omega + \beta = -\omega$; quod est $< \mu\omega + \beta(\mu - 1)$; nam $\mu - 1$, ita μ est $\mp$, atque ω, β est aut utrumque $\mp$, aut utrumque $-$; in altero casu autem est $\mu\alpha - \beta = -\mu\beta - \mu\omega - \beta = -\mu\omega - \beta(\mu + 1)$, et $\alpha - \beta = -2\beta - \omega$, quod item est $< -\mu\omega - \beta(\mu + 1)$; nam $\mu\omega > \omega$, et $2\beta < \beta(\mu + 1)$, quia $\mu > 1$.

Multiplicetur jam n per μ ; erit $\frac{K(k-1)x}{2qn-2kx} >$

$\frac{K(k-1)x}{2\mu qn-2kx}$, si $2qn > 2kx$; nam denominator prioris est minor (per praec.). Si igitur $2qn > 2kx$, ac superius $s < \frac{K(k-1)x}{2\mu qn-2kx}$, et hoc $< \frac{K}{N+1}$, erit et quod vis tale $s < \frac{K(k-1)x}{2qn-2kx}$, et tanto fortius $< \frac{K}{N+1}$; nam denominator, ubi μ est, major adeoque quotus minor est. Quaerendum itaque tantum maximum eorum n erit, quae pro quopiam q requiruntur, ut idem omni q satisfaciat; nempe illi q quoque inserviente majore n , quod minoris n indigeret.

Ut $qn > 2kx$ sit, sumatur prius $v = (k-1)(N+1)$, unde $N = \frac{v}{k-1} - 1$, atque accipiat $v >$ vel $= 5k$;

substituendo hunc valorem ipsius N in valore superiore ipsius n , erit $2qn = \frac{[v - (k-1) + (k-1)](k-1)x}{k-1} + 2kx = vx + 2kx$, quod

si $v =$ aut $> \pm 5k$ sit, est $> 2kx$, nempe $\pm 5k + 2k > 2k$, sive opposita sint v et k sive non.

Itaque si tale $2qn = (v + 2k)x$ sit superius α , et $2kx$ sit β ; de $\alpha - \beta$ et $\mu\alpha - \beta$ dicta applicari poterunt, et $\frac{K(k-1)x}{2qn-2kx}$ decrescet, crescente n .

Poterit autem n utvis magnum accipi, adeoque etiam tantum, ut exponens seriei < 1 sit, (nempe hic $\frac{kx}{nq}$ fit < 1 , si $n > \frac{kx}{q}$). Nam ex $2qn = (v + 2k)x$,

est $n = \frac{(v + 2k)x}{2q}$, atque pro hoc n est $v = \frac{2qn}{x} - 2k$; sit n' prius n pro $v = 5k$; pro novo $n = \mu n'$, erit $v = \frac{2q\mu n' - 2kx}{x}$; nam substituendo in $\frac{(v + 2k)x}{2q}$,

erit $\frac{(2q\mu n' - 2kx + 2kx)x}{2qx} = \mu n'$. Crescit vero ere-

scente n etiam $N = \frac{v}{k-1} - 1 = \frac{2q\mu n' - 2kx}{x(k-1)} - 1$;

nam hoc $> \frac{2q\mu n' - 2kx}{x(k-1)} - 1$, (qui valor prioris N

est pro v priore), imo dato quovis majus esse po-
test; si nempe μ accipiatur =

$\frac{N'x(k-1) + x(k-1) + 2kx}{2qn'}$; substituendo patet, N'

prodire. Si valor ipsius μ negative prodiret, po-
nendo oppositum ejus $\mp$ erit.

Ut vero n integer prodeat, μ ita eligi potest ut
 $\mu n'$ integer sit; atque si prius v tale est, ut $N =$
 $\frac{v - (k-1)}{k-1}$, daret $n = \frac{(v + 2k)x}{2q}$ negativum; erit

$-N = \frac{v - (k-1)}{-(k-1)}$, atque in valore superiore i-

psius n ponendo $-(N+1)$ pro $N+1$, erit $2qn =$
 $\frac{[v - (k-1) + (k-1)](k-1)x + 2kx}{-(k-1)} = -vx + 2kx$,

erat vero $v =$, ut $v + 2k =$ sit, quia $v > 2k$; un-
de $n = -\frac{(v - 2k)x}{2q} \mp$ est. Denique valor i-

psius n pro omni q quod non $< \infty$ (188) idem
reperitur sic. Sit $\infty = q'$, quodvis aliud q est $> \infty$,
sit $\infty = \frac{1}{r}$ (pro $r > 1$), sitque q aliquod quodvis

$= \frac{x}{r'}$; est $r > r'$, sitque $r = r''r'$; erit $K(k-1)x$

$\frac{2x}{r'} \frac{[(N+1)(k-1)x + 2kx]}{\frac{2x}{r'}} - 2kx = \frac{K(k-1)x}{2qn - 2kx} =$

$\frac{K}{N+1} < \frac{K}{N}$; si vero pro r' ponatur $r''r'$ in deno-

minatore infimo divisoris , denominator ipsius $K(k-1)$, manebit $2qr''n-2kx$. Consequ. si pro n ponatur valor $[(N+1)(k-1)x+2kx]:[\frac{2x}{q''q'}=2q']$, idem et cuivis q satisfaciet.

Idem ad $(A)_x = u$ applicatur modo sequi: sit pro certo q (188) $(A)q - (A)q' = u = \frac{u}{n''}$, id est

pro certo n per quem variabilis absoluta x dividitur , cum qua , u in dependentia simultanea (193) est , fiat pro hoc q , $u = \frac{u}{n''}$ et $n'' > \frac{ku}{q}$

ut exponens seriei $\frac{kx}{q}$ sit < 1 , atque etiam $2qn''$

$> 2ku$ in $s < \frac{(k-1)Ku}{2qn''-2ku}$; ut dicta aplicentur. Hoc

pacto manifesto tantum n erit ita augendum , ut sit $n'' =$ aut $> \frac{[(N+1)(k-1)+2k]x}{2q'}$, pro $q' = 2x$; et

hoc n'' adeoque illud n per quod hoc ponitur , idem omnibus satisfaciet.

II. Quod $duv = u dv + v du$ (197) patet sic. Sit $u = (A)_x$, $v = (B)_x$; erit seriei ex $uv = (A)_x \cdot (B)_x$ derivatae terminus generalis

$(A)m\dot{x} \cdot (B)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x} \cdot (B)(m-1)\dot{x} = (A)q \cdot (B)q - [(A)q - \dot{u}][(B)q - \dot{v}]$; nam pro $m\dot{x}$ (ut supra) q poni potest , atque $(A)(m-1)\dot{x} = (A)m\dot{x} - [(A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x}] = (A)q - \dot{u}$, ita

$(B)(m-1)\dot{x} = (B)q - \dot{v}$. Conseq. terminus generalis seu differentiale verum est $(A)q \cdot (B)q - (A)q \cdot (B)q + \dot{u}(B)q + \dot{v}(A)q - \dot{u}\dot{v} = \dot{u}(B)q + \dot{v}(A)q - \dot{u}\dot{v}$. Sed

$\frac{\dot{u}\dot{v}}{\dot{u}\dot{v}} = \frac{(B)q}{\dot{v}} + \frac{(A)q}{\dot{u}} - 1$ quovis dabili majus

fieri potest: consequ. $\frac{\dot{u}(B)q + \dot{v}(A)q}{\dot{u}(B)q + \dot{v}(A)q - \dot{u}\dot{v}} \sim 1$;

atque $m\dot{x}$ pro q et n pro m , atque u pro $(A)x$ et v pro $(B)x$ ponendo, est $duv \equiv \dot{u}v + \dot{v}u$; et si ex gr. $\dot{u} \equiv p\dot{z}$ et $\dot{v} \equiv r\dot{z}$, est $\int uv = \frac{1}{1} p\dot{v} + r\dot{u}$ (quoad z).

Ex gr. si $u = ax$ et $v = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, est $\int uv = a(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - ax(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

Si accedat z , et uv dicatur p ; erit $\int(pz) = p\int z + z\int p = uv\int z + z\int u + z\int v$; et ita semper ad uno plura eundo, patet regula (197).

* III. Quum de logarithmi differentiali (208) dictum sit, differentialia functionum trigonometricarum quoque adnectere liceat; quum a primis Trigonometriae elementis imbuto facile intelligi possint. Sit variabilis absoluta, arcus x per n divisus; atque tam differentialia quam derivatae et integralia (ubi non aliud monitum fuerit), quoad x hic arcum denotantem intelligantur.

Imo. Si $d \sin x$ quaeratur: erit item $m\dot{x} = q$ ut antea, et terminus generalis seriei ex $\sin x$ derivatae, est $\sin m\dot{x} - \sin(m-1)\dot{x} = \sin q - \sin(q-\dot{x}) = \sin q - \sin q \cos \dot{x} + \cos q \sin \dot{x}$; atque

$$\frac{\dot{x} \cos q}{\sin q - \sin q \cos \dot{x} + \cos q \sin \dot{x}} \sim 1.$$

Nam $\sin q - \sin q \cos \dot{x} = \sin q(1 - \cos \dot{x}) = \sin q \left[1 - \frac{1}{2} \sin^2 \dot{x} \right]$ quum $\cos \dot{x} = \sqrt{1 - \sin^2 \dot{x}}$, omnia pro radio 1 intelligendo.

Est autem $(1 - \sin^2 \dot{x})^{\frac{1}{2}}$ (quum $\sin^2 \dot{x} < 1$ sit) $= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \dot{x} - \frac{1}{4} \sin^4 \dot{x} - \frac{1}{8} \sin^6 \dot{x} \dots$, atque si

limes summae omnium post $-\frac{1}{2} \sin^2 \dot{x}$ sequentium s dicatur, pro dato quovis N fieri $-\frac{1}{2} \sin^2 \dot{x}$

$> Ns$ potest; adeoque $(1 - \sin^2 \dot{x})^{\frac{1}{2}}$ per $1 - \frac{1}{2} \sin^2 \dot{x}$

exprimi pōtest, ipso u quantitatē aliquam inter 0 et 1 denotante; eritque $1 - \cos \dot{x} = 1 - (1 - u \sin \dot{x}^2) = u \sin \dot{x}^2$, atque $\sin q - \sin q \cos \dot{x} = \sin q u \sin \dot{x}^2$.

$$\text{Itaque } \frac{\dot{x} \cos q}{\sin q - \sin q \cos \dot{x} + \cos q \sin \dot{x}} =$$

$$\frac{\dot{x} \cos q}{\sin q \cdot u \sin \dot{x}^2 + \cos q \sin \dot{x}}, \text{ quod } \sim 1 \text{ (per 81);}$$

$$\text{nam } \frac{\dot{x}}{\sin \dot{x}} \sim 1, \text{ (261) et } \frac{\cos q}{\cos q} = 1 \text{ atque}$$

$$\frac{\cos q}{\sin q \cdot u \sin \dot{x}} \text{ dato quovis majus fieri potest; nam}$$

$\sin \dot{x}$ quovis dato minus fieri potest, u vero est < 1 , adeoque $\sin q u \sin \dot{x} \sim 0$ manente dividendo $\cos q$.

$$\text{Consequ. } \frac{\dot{x} \cos m\dot{x}}{\sin m\dot{x} - \sin (m-1)\dot{x}} - 1 < \frac{1}{N} \text{ fieri}$$

(pro dato quovis N) potest; adeoque $\dot{x} \cos m\dot{x}$ termino generali seriei ex $\sin x$ derivatae aequipollet; adeoque (juxta saepius dicta) $\dot{x} \cos x$ est differentiale ipsius $\sin x$, et quidem sensu stricto, {quum forma quoque requisita gaudeat; et $\cos x$ derivata {quoad x } ipsius $\sin x$ est.

2do. $d \cos x = -\dot{x} \sin x$, et $d \sin x = \dot{x} \cos x$. Nam terminus generalis seriei e $\cos x$ derivatae est $= \cos q - \cos (q - \dot{x}) = \cos q - \cos q \cos \dot{x} - \sin q \sin \dot{x} = \cos q u \sin \dot{x}^2 - \sin q \sin \dot{x}$ (per praec. $u \sin \dot{x}^2$ pro $1 - \cos \dot{x}$ ponendo); atque
$$\frac{-\dot{x} \sin q}{\cos q u \sin \dot{x}^2 - \sin q \sin \dot{x}}$$

$$\sim 1; \text{ nam } \frac{\dot{x}}{\sin \dot{x}} \sim 1, \frac{\sin q}{\sin q} = 1, \text{ adeoque}$$

$$\frac{\dot{x} \sin q}{\sin q \sin \dot{x}} \sim 1, \text{ atque etiam } \frac{\sin q \sin \dot{x}}{\cos q u \sin \dot{x}^2} \sim \frac{\sin q}{\cos q \cdot u \sin \dot{x}}$$

dato quovis majus fieri potest; nam $\frac{\sin q}{\cos q}$ manet,

u est < 1 , atque $\sin \dot{x} \sim 0$.

3tio. $d \tan x = \frac{\dot{x}}{\cos^2 x}$, $\int \tan x = \frac{1}{\cos x^2}$. Nam ter-

minus generalis seriei e $\tan x$ derivatae est $\tan q -$

$$\tan(q - \dot{x}) = \frac{\sin q}{\cos q} - \left[\frac{\sin(q - \dot{x})}{\cos(q - \dot{x})} = \frac{\sin q \cos \dot{x} - \cos q \sin \dot{x}}{\cos q \cos \dot{x} + \sin q \sin \dot{x}} \right]$$

$$= \frac{\sin q \cos q \cos \dot{x} + \sin q^2 \sin \dot{x} - \cos q \sin q \cos \dot{x} + \cos q^2 \sin \dot{x}}{\cos q^2 \cos \dot{x} + \cos q \sin q \sin \dot{x}}$$

$$= \frac{\sin \dot{x} (\sin q^2 + \cos q^2)}{\cos q^2 \cos \dot{x} + \cos q \sin q \sin \dot{x}} = \frac{\sin \dot{x}}{\cos q^2 \cos \dot{x} + \cos q \sin q \sin \dot{x}}$$

(nam $\sin q^2 + \cos q^2 = 1$); hoc autem per $\frac{\dot{x}}{\cos q^2}$ di-

visum ~ 1 ; fit enim quotus

$$\frac{\sin \dot{x} \cos q^2}{\dot{x} \cos q^2 \cos \dot{x} + \cos q \sin q \sin \dot{x}}, \text{ quod } \sim 1$$

(80); nam $\frac{\sin \dot{x}}{\dot{x}} \sim 1$, $\frac{\cos q^2}{\cos q^2 \cos \dot{x}} \sim 1$, et

$\frac{\cos q^2 \cos \dot{x}}{\cos q \sin q \sin \dot{x}}$ quovis dato majus fieri potest; fiat

ex gr. $\cos \dot{x} > \frac{3}{4}$, crescente n fit cosinus semper major tendens ad limitem 1, denominator autem ~ 0 .

Consequ. $\frac{\dot{x}}{\cos \dot{x}^2} = d \tan x$, et $\int \tan x$ (quoad

$$x) = \frac{1}{\cos x^2}.$$

4to. $d \cot x = \frac{-\dot{x}}{\sin^2 x}$, et $\int \cot x$ (quoad $x) =$

$\frac{-1}{\sin x^2}$. Nam terminus generalis seriei ex $\cot x$ de-

rivatae est $\cot q - \cot(q -) = \frac{\cos q}{\sin q} -$

$$\frac{\cos q \cos \dot{x} + \sin q \sin \dot{x}}{\sin q \cos \dot{x} - \cos q \sin \dot{x}} =$$

$$\frac{\cos q \sin q \cos \dot{x} - \cos q^2 \sin \dot{x} - \sin q \cos q \cos \dot{x} - \sin q^2 \sin \dot{x}}{\sin q^2 \cos \dot{x} - \sin q \cos q \sin \dot{x}} - \sin \dot{x}$$

$$= \frac{-\sin \dot{x}}{\sin q^2 \cos \dot{x} - \sin q \cos q \sin \dot{x}}, \text{ cui item (ut ante)}$$

tea) aequipollet $\frac{-\dot{x}}{\sin q^2}$; nam prius per posterius dividendo, quotus ~ 1 . Consequ. $\frac{-\dot{x}}{\sin q^2}$ diffe-

rentiale et $\frac{-1}{\sin q^2}$ derivata est.

5to. Sed differentiale derivataque alicujus functionis trigonometricae quoad aliam quoque saepius quaeritur. Denotentur hic brevitatis caussa, $\sin x$ per s , $\cos x$ per c , $\tan x$ per t , $\cot x$ per C , atque literae eadem puncto insignitae differentialia denotent.

Erit ds (quoad C) $= -\dot{C}cs^2$, et $\int s$ (quoad C) $= -cs^2$. Nam (251) $\frac{\dot{s}}{\dot{x}c} \sim 1$, et $\dot{C} : \frac{-\dot{x}}{s^2}$ id est

$$\frac{\dot{C}s^2}{-\dot{x}} \sim 1; \text{ atque hinc } \frac{\dot{s}}{\dot{x}c} : \frac{\dot{C}s^2}{-\dot{x}} \text{ id est } \frac{\dot{s}}{-cs^2\dot{C}}$$

~ 1 . Consequ. $-cs^2\dot{C} \equiv \dot{s}$, et $-cs^2\dot{C}$ differentiale sinus quoad C , atque cs^2 derivata est.

Ita reliquarum functionum trigonometricarum differentialia, tam quoad x quam quoad alias earundem reperiuntur.

6to. At ex his arcus quoque differentiale derivataque quoad functiones trigonometricas ejusdem prodeunt. Nempe.

$$\text{Ex } \frac{\dot{s}}{\dot{x}c} \sim 1, \text{ sequitur } \frac{\dot{x}c}{\dot{s}} \sim 1, \text{ seu } \dot{x} : \frac{\dot{s}}{c}$$

~ 1 ; consequ. $\frac{\dot{s}}{c} \equiv \dot{x}$, et $-\frac{\dot{s}}{c}$ differentiale, ac

$\frac{1}{c}$ derivata quoad s ipsius x (nempe arcus) est;

et hinc $\int \frac{1}{c} (\text{quoad } s) = x$; adeoque quum $c =$

$$(1-s^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ et } \frac{1}{c} = (1-s^2)^{-\frac{1}{2}}, \text{ est } \int (1-s^2)^{-\frac{1}{2}}$$

(quoad s) = arcui; est videlicet differentiale purum (194), et per theorema binomiale evolvi potest, quum s ex gr. $= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ accipere liceat; atque tum (per 198) integrari potest.

Simili modo est $dx (\text{quoad } c) = \frac{-c}{s}$, et deri-

vata $\frac{-1}{s}$ est. Nam erat $\frac{\dot{c}}{-\dot{x}s} \sim 1$, adeoque $\frac{-\dot{x}s}{\dot{c}} \sim 1$, et hinc $\dot{x} : \frac{-\dot{c}}{s} \sim 1$.

Est porro $dx (\text{quoad } t) = \dot{t}c^2$, et derivata (quoad t) est c^2 . Erat enim $\dot{t} : \frac{\dot{x}}{c^2} \sim 1$, et hinc $\frac{\dot{t}c^2}{\dot{x}}$

seu $\frac{\dot{x}}{\dot{t}c^2} \sim 1$. Consequ. $\dot{x} \equiv \dot{t}c^2$, et $\dot{t}c^2$ diffe-

rentiale arcus x , atque c^2 derivata (quoad t) est.

Est autem $c^2 = (1+t^2)^{-1} = 1 : (1 + \frac{s^2}{c^2}) = 1 : \frac{c^2+s^2}{c^2} = 1 : \frac{1}{c^2} = c^2$ (nempe $c^2+s^2=1$).

Hinc $\int \dot{x}$ seu $x = \int c^2 (\text{quoad } t) = \int (1+t^2)^{-1}$ (quoad t); quod per theor. binomiale (ut supra 212) pro $t^2 < 1$ (imo etiamsi $= 1$ sit (152) evolvi, atque integrari potest.

7mo. Singulosque casus considerando, patet, tendentias ad limites dictos pro quovis q , quo majus n accipitur, et hic eo fortius valere (ut supra).

IV. Sed juxta superius (200) promissa, demonstrare superest; quod si arcus ipsi $\dot{x}$ respondens

s et corda ejus c dicatur, $\frac{s}{c} \sim 1$, si $n \sim$

∞ ; et tum differentialia dicta, lineae, superficiei planae a linea et abscissa ordinataque clausae nec non tam superficiei quam soliditatis per lineam circa axem revolutam ortae, stabilienda sunt. Ut vero hoc fieri possit, quaedam de lineis et partim de superficiebus dicenda sunt.

1^{mo}. Dum recta cum curva comparatur, per longitudinem curvae intelligitur limes, ad quem, summa cordarum (ab una extremitate curvae usque ad alteram ita se invicem excipientium, ut cujusvis finis, praeter ultimae finem, sit novae initium) tendit, si cordarum quaevis ~ 0 . Si plures quoque rami sint, per cujusvis longitudinem limes talis intelligitur, et summa limitum erit tota curva ad rectam reducta. Demonstrandum itaque est dari limitem ejusmodi, eumque nonnisi unicum esse, quibusvis modis tendant cordae singulae ad limitem 0 .

Dum superficies curva C cum plano comparatur, intelligitur per superficiem curvam limes sequens: ponatur Δ (una cum area intellectum), ita ut apices ejus in C cadant, et quodvis latus ejus sit latus novi Δ li verticem in C habentis, atque cujusvis Δ li novi hoc pacto prodeuntis, lateri, novum Δ verticem in C nec ullam porticnem cum ullo praecedentium communem habens, imponatur, et cujusvis area tendat ad limitem 0 ; si jam detur tale rectangulum α , ut nequeant Δ la modo dicto ita sumi, ut summae eorum limes sit $> \alpha$, sed possint ita sumi pro dato quovis ω , ut summa eorum ab α minus ipso ω differat; tum per aream ipsius C dum cum plano comparatur; ipsum α intelligitur; nempe limes summae Δ lorum dictorum quorum nulla bina quidquam areae commune habent, et quodvis ~ 0 .

In plano autem qualiscunque figura sit, ad rectangulum ejus area reducitur. cui si non termi-

nata, saltem interminata aequalitate sit $\square$ (21) et quidem ad rectangula altitudinis, aut baseos ejusdem (unitati rectarum aequalis) reducuntur omnia, ut arithmetice clare tractentur, ita solida cujuscunque superficiei ad parallelepipedum reducuntur, cujus basis eadem pro omnibus, $\square$ to cujus latus = unitati rectarum, aequalis est. (22)

2do. *Formae curvae* definitio paulo inferius dabitur; sed *concauitatis convexitatis, tangentis, subtangentis, normalis, subnormalisque* conceptus hic explicandi veniunt. Sit abscissa x variabilis absoluta.

Concava dicitur linea versus x , si arcus quilibet, in cordae suae plagam unam, et abscissa arcui respondens, plagam cordae alteram cadat; si vero arcus quilibet cum abscissa ei respondente in cordae plagam eandem cadant, *convexa* audit. Per abscissam arcui respondentem intelligitur pars ipsius x , inter ordinatas $\perp$ res ab extremitatibus arcus demissas contenta.

Hinc si concava sit, e quovis puncto intermedio arcus ducantur cordae ad ejus extrema, et ex his demittantur ordinatae ad x $\perp$ res, recta fines harum conjungens, erit corda arcus totius, et basis $\triangle$ li, quod cum prioribus duabus cordis efficit; caditque hoc $\triangle$ in plagam baseos superiorem, si pars abscissae arcui respondens inferius sit; atque Λ lus basi oppositus est $< 2R$ (per R rectum intelligendo). Est itaque Λ lus, quem curvae versus abscissam concavae, cordae e finibus arcus ad punctum intermedium efficient, $< 2R$; pariter patet Λ lum quemvis ejusmodi, curvae versus abscissam convexae, esse $> 2R$ (omnino versus abscissam intelligendo). Potest vero etiam per hoc ipsum definiri curva concava et convexa, quum ex hec sequatur id, quod in definitione dictum est; possuntque alia criteria quoque dari.

Si lineae nulla portio recta sit, e talibus portionibus constare debet, quarum cujusvis aut crescunt ordinatae, aut decrescunt (ad dextram intelligendo).

Nam feratur ordinata y ad dextram continuo eundo L iter ad x , atque e fine primi y feratur punctum p in dicto y , ut sit semper in fine ordinatae, illi abscissae respondentis, ad cuius finem tunc dictum y pervenit: p in eodem puncto hujus y manere sub nullo tempore continuo potest; nam tunc alicui portioni ipsius x recta responderet; itaque p aut sursum movetur aliquamdiu, aut deorsum; in casu priore crescentibus, in posteriore decrescentibus ordinatis. Si vero prius sursum moveatur; aut usque ad finem sursum movebitur; aut non: si non, tum datur ultimum temporis punctum P (p. 15), ante quod, quodvis punctum temporis tale est, ut p post illud in y sursum motum sit; itaque P tale non est, quia si tale esset, punctum p ex eo loco in quo sub P est, adhuc sursum moveretur; adeoque adhuc ultra P deberet punctum temporis ultimum dictum accipi. Post P itaque p sursum non movetur, neque in loco manet; adeoque deorsum movetur. Quod porro continuari posse patet.

Si vero ordinatae crescant ad dextram: sive concava sive convexa sit curva, Λ lus quem y cum corda e fine ejus ad dextram ducta facit, obtusus est. Nam si acutus aut rectus esset, ordinata sequens ad dextram ab altera extremitate cordae demissa, esset priore minor, aut ei aequalis.

3tio. (Fig 29) Ad scopum praesentem hic sermo de recta *lineam curvam* in plano sitam *tangente* est, (definitione generali inferius tradenda). Si curvae detur talis arcus ap , ut inter hunc et certam rectam $a'p$ in eodem plano sitam, ex p nulla recta duci possit; *arcum* hunc dicitur $a'p$ *tangere*, imo et *totam curvam*, si aut p ejus extremum sit, aut detur arcus ap talis continuatio pb , ut inter hanc et continuationem rectae $a'p$ nulla recta duci possit. Pars abscissae autem, quae ab ordinata ex p ad lineam abscissarum L ri usque ad sectionem tangentis et rectae abscissarum est, dicitur *subtan-*

gens, in casu sectionis; si vero sectio non sit, *subtangens* ∞ ta dicitur. *Normalis* autem dicitur recta ex p ad tangentem L_{ris} , et pars lineae abscissarum ab ordinata dicta ipsius p usque ad sectionem normalis et lineae abscissarum dicitur *subnormalis*.

Gaudet vero curva, in quovis puncto, recta tangente.

Sit enim apb talis arcus, ut aut totus concavus. aut totus convexus, aut ap concavus, et pb convexus sit. Vertatur in casu primo corda ap circa p sursum; cadent scilicet arcus cordaeque ex p incipiendo sequentes omnes supra praecedentes, lineaeque abscissarum infra cordam primam et omnes cadet (256). Erit vero (pag 15) ultimum aliquod p punctum temporis, intra quod recta mota ap semper in aliquam cordam cadit: tum vero in nullam cordam cadere poterit; quia arcus hujus cordae sursum caderet (256), adeoque adhuc darentur cordae superius, et p non esset ultimum tale, ut dictum est. Nulla recta autem inter $a'p$ (si recta mota ap tunc in $a'p$ sit) atque arcum pa duci potest; nam si posset, non esset $a'p$ ultima, intra quam mota ap in aliquam cordam cadit, adeoque ante p esset ultimum illud temporis punctum, intra quod mota pa circa p semper in cordam cadit.

Sed continuatio quoque rectae $a'p$ tangens arcus pb est, si apb proprie sic dicta curva sit. Nam si tam ap quam pb concava, aut utraque convexa sit, et (pro casu primo) pc secet (tanquam continuatio rectae $a'p$) ipsam pb in c ; vertatur pc sursum circa p , ut tamen corda maneat, perveniendo in pd ; vertatur item deorsum $a'p$ circa p , sed ad $\Delta lum < cpb$, quantumvis exiguum, perveniatque in pe ; erit Δepb (superius intelligendo) $< 2R$; nam prius ex $2R$ subtractus est Δcpb , et postea hoc minus additum est. Consequ. initia arcuum ex p inter crura Δli 2 rectis minoris cadunt; itaque per definitionem formae curvae infra tradendam, curva non erit.

Si vero (Fig 30) continuatio ipsius $a'p$ sit pq , et possit duci recta pr inter pq et pb ; tum pariter $\angle a'pr$ (deorsum intelligendo) est $< 2R$, et initia arcuum ex p inter crura erunt.

Idem patet si arcus uterque convexus sit. Si vero ap concavus et pb convexus sit. Pro (Fig 31) vertatur pq usque in pr , et $a'p$ vertatur minus usque in pk ; $\angle kpr$ (superius intelligendo) $< 2R$ (ut antea).

Pro (Fig 32) autem, si nempe pc corda sit continuatio rectae $a'p$; vertatur pc circa p usque in pb ; erit $\angle a'pb$ (deorsum intelligendo) $< 2R$; atque initia arcuum ex p item inter crura continebuntur.

4to. Crescentibus ordinatis, tangens cum ordinata L_{ri} nonnisi in puncto coincidere potest; et quidem nonnisi ad punctum primum, si concava sit, et ad ultimum si convexa sit.

Nam sit prius concava: quaevis ordinata sit post primam; ab ea retrorsum decreascentibus ordinatis, pars ordinatae continuatae supra curvam cadens, etsi per quadrantis intervallum, circa punctum quod in curva habet, moveretur, curvam attingere nequit.

In convexa autem nonnisi ultima ordinata tangens esse potest. Nam quaevis alia ordinata sit, ducatur ad eam e puncto curvae antrorsum L_{ris} ; ordinata ipsa circa punctum curvae usque ad hanc L_{rem} mota, adhuc curvam non attinget.

5to. Sed neque ad ordinatam potest tangens L_{ris} esse crescentibus ordinatis alibi, nisi in convexae puncto ultimo et primo convexae.

Nam si in concava tangens ad aliam ordinatam L_{ris} esset; ordinatae sequentes (antrorsum) minores essent; in convexa autem retrorsum majores essent.

6to. Tangens cum ordinata non coincidens secat ordinatas omnes. Nam recta rectam secans, secat

omnes huic paralellas, (omnia juxta elementa Geometriae communia supponendo).

Hinc tangentes ejusmodi e finibus cujusvis arcus secant se invicem. Nempe crescentibus ordinatis tangens ad a cadit inter rectae ordinatae partem superiorem et arcum ap in concava, in convexa autem inter ordinatam ipsam et arcum; tangens ad b autem secat rectam ordinatam puncti a continuatam; hoc autem fieri nequit, nisi tangens ad a inter rectam dictam et arcum cadens secetur.

Facit autem crescentibus ordinatis, tangens cum ordinata antrorsum Δ lum obtusum, retrorsum acutum. Nam si acutum aut rectum faceret; essent sequentes ordinatae antrorsum in concava minores, et retrorsum in convexa majores.

7^{mo}. Sit tangens t et corda c , (Fig 33) (intelligendo per t hanc tangentem ex initio arcus ordinatarum crescentium, usquequo rectam in quam ordinata finis arcus cadit, secat); erit $\frac{t}{c} \sim 1$ si $n \sim \infty$.

Nam in Δlo , cujus latera sunt t , c , $\lambda - y$, est $t : c = \sin [2R - \alpha - (\beta - u)] : \sin \alpha$; id est $\frac{t}{c} = \frac{\sin [2R - \alpha - (\beta - u)]}{\sin \alpha}$. Hoc autem ~ 1 ; nam

$2R - \alpha$ et α sinu eodem gaudent, α vero est constans, manens nempe etsi tangens eadem per ordinatam aliam priori (dato quovis propius) paralellam secetur; $\beta - u$ vero ~ 0 ; nam crescente n , decrescit $\hat{x}$, atque corda tangenti dato quovis angulo propius venit. Itaque $2R - \alpha - (\beta - u) \sim 2R - \alpha$; si vero duo anguli sint γ et $\gamma \pm \omega$, et $\omega \sim 0$; erit $\frac{\sin(\gamma \pm \omega)}{\sin \gamma} \sim 1$; nempe

$\frac{\sin \gamma \cos \omega \pm \cos \gamma \sin \omega}{\sin \gamma} = \cos \omega \pm \cot \gamma \sin \omega$; quod

$\simeq 1$, nam $\cos \omega \simeq 1$, si $\omega \simeq 0$, et $\cot \gamma$ est quantitas determinata, cujus factor $\sin \omega \simeq 0$, dum $\omega \simeq 0$.

Unde quum c sit $= (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$, si demonstretur differentiale arcus verum, semper inter cordam et tangentem cadere, utpote illa majorem hacque minorem; erit arcu s et differentiali vero dicto, etiam $\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}}{s} \simeq 1$.

At demonstrandum prius est, dari limitem, qui per longitudinem arcus intelligitur, eumque inter tangentem cordamque cadere. (Fig 34).

Sint $a + \beta$, b , $c + \delta$, d tangentes pro ordinatis crescentibus: erit $a + \beta + c + \delta > a + b + c + d$. Nam $\beta > b$, et $\delta > d$; quia sit (Fig 35) ps continuatio cordae ap ; tangentem b infra ps cadere oportet, ut et ab altera parte tangens sit; est autem $\angle prq$ acutus, cui $\angle ris$ pk objecta cadit; estque $\angle prk > psk > v$; consequ. $\angle prk > v$; atque hinc si $\triangle prk$ feratur sursum inter easdem ordinatas, donec p in b cadat, situ ipsius pk priori parallelo, et pr ac bc in plagam ejus eandem superiorem cadentibus: manifesto r infra c cadet, (propter $\angle lum$ ad r ipso v majorem); eritque $pr < bc$.

Duplicato n , pariter patet novam tangentium summam esse minorem ipso $a + b + c + d$, atque idem repetendo semper porro, summam tangentium semper decrescere; summam cordarum autem semper crescere (propter summam duorum $\triangle li$ laterum 3tio majorem); esseque cordam quamvis tangente respondente minorem, (propter $\angle lum$ cordae acutum, quem cum ordinata sequente facit, majorem illo, quem tangens cum eadem ordinata efficit).

Hinc summa tangentium S' et summa cordarum s' dicta; tam S' sine fine decrescens, quam s' sine fine crescens, limite gaudet; quum illud primo s' semper majus, et s' primo S' semper minus maneat.

Sit $S' \sim S$, et $s' \sim s$; erit $S = s$. Nam sit terminus generalis seriei ex S' derivatae $(u')m\dot{x}$, et ex s' derivatae sit $(u)m\dot{x}$; erit $(u')1\dot{x} + (u')2\dot{x} + \dots + (u')n\dot{x} \sim S$, et $(u)1\dot{x} + (u)2\dot{x} + \dots + (u)n\dot{x} \sim s$; sed $\frac{(u')m\dot{x}}{(u)m\dot{x}} \sim 1$. Itaque $S = s$.

Cadit vero (230) differentiale verum ipsius s inter $(u')m\dot{x}$ et $(u)m\dot{x}$; nempe $(u')m\dot{x} > s > (u)m\dot{x}$; consequ. et $\frac{(u)m\dot{x}}{s} \sim 1$, id est (quum $(u)m\dot{x}$

cordam denotet, et haec $= (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$); erit $\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{x}^2 y^2)} = \dot{x} \sqrt{(1 + y^2)}$ differentiale, ac de-

rivata arcus quoad abscissam x est $(1 + y^2)^{\frac{1}{2}}$; nam $\dot{y} = \dot{x} y + \omega$, nempe $\dot{y} - \dot{x} y$ dicatur ω ; eritque

$$\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}}{(\dot{x}^2 + \dot{x}^2 y^2)^{\frac{1}{2}}} \sim 1; \text{ nam } \frac{\dot{x}^2 + \dot{x}^2 y^2}{\dot{x}^2 + (\dot{x} y + \omega)^2} \sim 1;$$

nam $\frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^2} = 1$, et $\frac{\dot{x} y}{\dot{x} y + \omega} \sim 1$, quia $\frac{\dot{x} y}{\omega}$ dato quovis $>$ fieri potest; consequ. (per 80)

$$\frac{(\dot{x} y)^2}{(\dot{x} y + \omega)^2} \sim 1, \text{ atque } \frac{\dot{x}^2 + \dot{x}^2 y^2}{\dot{x}^2 + (\dot{x} y + \omega)^2} \sim 1,$$

adeoque etiam radix 2di gradus ~ 1 ; et hinc

$$\dot{x} (1 + y^2)^{\frac{1}{2}} \text{ differentiale sensu stricto, } (1 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

autem (sive $(1 + y^2)^{\frac{1}{2}}$) derivata arcus est.

Quoad convexam idem eodem modo prodit, si tangentes ad ductum ordinatarum decrescentium accipiantur.

Potest etiam idem per summam tangentium se mutuo inter ordinatas secantium ostendi.

8vo. Sed limes iste etiam semper idem est; nempe utcumque accipiantur cordae se invicem mo-

do superius dicto excipientes, summae earum limites idem s superius erit. Nam sit certo modo acceptis in curva punctis, limes cordarum major aut minor quam prior limes s quantitate ω .

Si major fuerit: tum dari oportet cordas tales modo certo positas, ut summae earum differentia a limite $s + \omega$ sit $< \omega$, nempe summa ipsa sit $> s$; quod vero absurdum est: nam accipiat omnia partium ipsius x e cujus finibus erectae ordinatae cordas terminant, illa qua nulla earum minor est; item accipiat n modo priore tam magnum, ut in minimam partem dictam ipsius x quoque ipsa $\dot{x}$ ad minimum numero μ cadant, quem utvis augere manifesto licet. Erigantur ordinatae e finibus cujusvis $\dot{x}$; terminabuntur pro quovis arcuum, ordinatae extimae, aut in finibus eorum, aut terminabitur una tantum in arcus fine, aut neutra. Si pro omnibus arcubus, ordinatae extimae in eorum finibus terminentur; erit ductis novis ad minimum μ cordis pro quovis arcu, earum summa major eo quod ipso s majus erat; adeoque major limite illo quo semper minor manet.

Si una tantum duarum ordinatarum extimarum aut neutra terminetur ad cordae finem; ducantur ubique ubi ita est, a finibus ordinatarum extimarum cordae ad proximos arcuum fines; erit tum summa cordarum novarum major summa priorum; nam quaevis harum, est summa novarum ei respondentium major. At quum cordae non omnes ita ut superius positae sint; sit numerus arcuum priorum v : in totidem locis tantum fieri potest, ut ordinatae extimae dictae per duplicationem numeri n ortae, cum ordinatis ad fines arcuum non coincidant; sit cordarum, quae hoc pacto ex s' (261) desunt, nec plures quam numero constante v esse possunt, summa u , et earum quae accedunt (nec plures quam numero $2v$ esse possunt) summa sit u' ; erit $u' > u$ (propter 2 laterum Δ li summam 3tio majorem), at u adeoque μ ita augeri poterit, ut $u' - u$ dato quovis k minus fieri queat; si ex gr. arcus ita accipi-

antur, ut nullius corda ulla sit $> \frac{k}{2v}$, erit $u' < \frac{2vk}{2v}$,
 et quum $u' - u$ sit $< u'$, est $u' - u < k$. Est autem
 quodvis $s' + u' - u > s + \omega$, et utrumque +vum est,
 ita et s atque $s' + u' - u - s$ et $s + \omega - s$, +va sunt,
 atque $s' + u' - u - s$ majus +vum est quam $s + \omega - s$,
 id est quam ω ; sed $s' - s \sim o$, ita $u' - u \sim o$;
 itaque $s' + u' - u - s \sim o$; adeoque quantitas quae
 omni dabili minor fieri potest, maneret majus
 +vum quam determinatum ω .

Sed nec minor esse limes alio modo potest. Sit
 enim limes $s - \omega$; ponantur cordae prius modo pri-
 ore, ut sit $s' > s - \omega$, nempe s' sit (omnino +vum)
 $= s - \omega + \alpha$, quod quum s limes ipsius s' sit, pro
 certo α +vo et ipso ω minore fieri potest; ponan-
 tur tum cordae modo altero, ita ut in quemvis ar-
 cum plures cadant, quum illas quoque quam pro-
 pissime accipere liceat; dicanturque sensu ut an-
 tea u' et u , eo discrimine, quod pro cordis alio
 modo positis intelligantur; sitque summa harum
 $s - \omega - z$ (pariter +vum): erit $s - \omega - z + u' - u$ quo-
 que + , et $> s - \omega + \alpha$; atque subtrahendo posteri-
 us +vum e majore +vo , manebit +vum ; nempe
 $u' - u - z - \alpha$ semper + esse deberet, quamvis α
 constans +vum , adeoque $-\alpha$ constans -vum sit, $u' - u$
 autem $\sim o$, et z quoque $\sim o$, (quum $s - \omega$
 limes summae cordarum modo alio positarum sit),
 adeoque $u' - u - z \sim o$, et quantitatem constan-
 tem -vam , +vam reddere nequit.

9no. Sit area a linea (cujus ordinata $y = (B)x$)
 atque ordinata et abscissa x comprehensa $= (A)x$;
 erit functio differentianda (non ut antea, sed) in
 concreto data; estque differentiale verum, nempe
 terminus generalis seriei ex $(A)x$ derivatae, $(A)m\dot{x}$
 $-(A)(m-1)\dot{x}$; atque manifesto est (Fig 36)
 $y\dot{x} < (A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x} < (y+y)\dot{x}$, (per y in-
 telligendo differentiam ipsius y ab ordinata sequen-
 te, nempe e fine ipsius $\dot{x}$ erecta). Sed $\frac{y}{y+\dot{y}} \sim 1$;

consequ. $\frac{\dot{x}}{(A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x}}$ id est

$\frac{\dot{x}(B)m\dot{x}}{(A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x}} \sim 1$. Est igitur $\dot{x}(B)x$ differentiale (et quidam sensu stricto) ipsius $(A)x$, et $y = (B)x$ derivata ejus quoad x est.

10mo (Fig 36) Ita si $(A)x$ soliditatem, quae per revolutionem lineae circa abscissam generatur, denotet: per $y\dot{x}$ et $(y+\dot{y})\dot{x}$ describentur cylindri, quorum soliditates sunt $y^2\pi\dot{x}$, et $(y+\dot{y})^2\pi\dot{x}$; est autem $y^2\pi < (A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x} < (y+\dot{y})^2\pi\dot{x}$.

Sed $\frac{y}{y+\dot{y}} \sim 1$, adeoque $\frac{y y \pi \dot{x}}{(y+\dot{y})(y+\dot{y})\pi \dot{x}} \sim 1$;

consequ. $\frac{y^2\pi\dot{x}}{(A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x}} \sim 1$; itaque

$y^2\pi\dot{x}$ termino generali seriei ex $(A)x$ derivatae aequipollet, nempe si $y = (B)x$, est

$\frac{(B)(m\dot{x})^2 \cdot \pi \dot{x}}{(A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x}} \sim 1$, atque $\dot{x}\pi(B)x^2$ id

est $\dot{x}\pi y^2$ differentiale sensu stricto ipsius $(A)x$, et πy^2 derivata quoad $\dot{x}$ est.

11mo. Si $(A)x$ superficiem revolutione lineae circa abscissam ortae denotet: sit prius (Fig 34) linea concava, crescentibus ad dextram ordinatis. Dicatur t tangens $a+\beta$, et C corda ei respondens, item corda tangenti a respondens dicatur c' , et c'' sit corda tangenti b respondens. Describuntur revolutione schematis, conii truncati, qui dicantur, con. trunc. ipsius $(a+\beta)$ id est ipsius t , ita ipsorum a, b, c', c'' . Est autem superficies conii truncati, facto e summa radiorum basium parallelarum et π atque latere conii truncati, aequalis. Erit itaque con. trunc. ipsius $a+\beta, = \pi(a+\beta)(y+y''+\lambda)$, ita conii truncati ipsorum a, b ; et ipsius C ac ipsorum c', c'' erunt $\pi a(y+y'+\lambda'), \pi b(y'+y''+\lambda''), \pi C(y+y''), \pi c'(y+y'), \pi c''(y'+y'')$. Unde con. trunc. ipsius

$(a+\beta) > \text{con. trunc. ipsorum } a \text{ et } b$; nam $\beta > b$ (p.261), $y''+\lambda > y'+\lambda''$, quia $\lambda > \lambda''$, atque et $y'+\lambda' > y'$: quo continuato patet summam conorum truncatorum per tangentes descriptorum decrescere. Est etiam manifesto conus truncatus cordae $C < \text{summa conorum trunc. ipsarum } c' \text{ et } c''$; itaque si duplicato n , numerus cordarum semper porro duplicetur, crescet summa conorum trunc. per cordas descriptorum, manet tamen semper minor summa conorum trunc. per tangentes simultaneas descriptorum, adeoque minor cono trunc. per $a+\beta$ descripto, quum summa plane dicta sit hec minor. Datur itaque fines summae conorum truncatorum per cordas descriptorum, atque $C\pi(y+y'') < (\Lambda)m\dot{x} - (\Lambda)(m-1)\dot{x} < i\pi(y+y''+\lambda)$. Est autem $\frac{C}{i} \sim 1$ (p.260), et

$$\frac{y+y''}{y+y''+\lambda} \sim 1; \text{ itaque } \frac{C\pi(y+y'')}{i\pi(y+y''+\lambda)} \sim 1.$$

$$\text{Consequ. } \frac{C\pi(y+y'')}{(\Lambda)m\dot{x} - (\Lambda)(m-1)\dot{x}} \sim 1; \text{ atque}$$

$$\text{quum } \frac{y+y''}{2y} \sim 1, \text{ et } C = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}; \text{ fit}$$

$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y\pi$, id est $\dot{x}(1+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y\pi$ differentiale limitis conorum per cordas lineae se invicem ut supra (255) excipientes descriptorum;

$2y\pi(1+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$ autem derivata quoad x est.

Quoad convexam quoque idem prodit. Superficies quaeritur (Fig 37); quae erit limes viae cordarum se invicem excipientium. Vertatur in bf' tangens bf , et si duplicato n tangentes bd , df'' oriantur, vertatur df'' in df''' circa L_{rem} ex b ad y , ac pro duplicato iterum n , ortisque tangentibus bc , cd'' , de' , eg , vertatur quacyis circa L_{rem} e puncto tactus ad y missam; et idem continuetur semper duplicato n et tangentium numero duplicato. Consideretur jam conus trunc. ipsius $f'b$, tum summa conorum

truncatorum ipsorum bd' , df''' , tum summa conorum trunc. ipsorum bc' , cd''' , de'' , eg' ; patet conum trunc. primum esse majorem summa sequente conorum truncatorum, et hanc majorem summa sequente, atque hoc continuari sine fine posse; nempe manifestò conus trunc. bf' constat e cono trunc. bd' et cono trunc. $d'f'$, et posterior est $=\pi(d'd'+f'a')d'f'$; summa conorum trunc. bd' et $df''' =$ cono trunc. $bd' + \pi(dd'+f'''a')df'''$; atque $dd' < d'd'$ et $f'''a' < f'a'$, (quia $u >$ acutus quam v est, adeoque h supra l cadit) ac $(df''' = df') < (d'f' = df)$ (per 261); ita valores reliqui e quibus coni truncati exsurgunt, crescunt excepto π et illis quae manent, ex gr. in prima duplicatione manent bd' et basium radii. Ducatur $\perp$ ris ex a ad y ; erit quaevis conorum trunc. summa, semper major quam via ipsius ak . Unde limitem decrescentis summae dictae dari constat; dicatur is $(A)x$.

Dicaturque terminus generalis seriei conorum trunc. dictorum $(u)m\dot{x}$; erit $(u)1\dot{x} + (u)2\dot{x} + \dots + (u)n\dot{x} \sim (A)x$; denotetque $(a)m\dot{x}$ conum trunc. cordae; facile patet quod $\frac{(u)m\dot{x}}{(a)m\dot{x}} \sim 1$; adeoque per superiora etiam $(a)\dot{x} + (a)2\dot{x} + \dots + (a)n\dot{x} \sim (A)x$; atque hinc est et hic $2\pi y\dot{x}(1+y^2)^{\frac{1}{2}}$ differentiale limitis viae cordarum, et $2\pi y(1+y^2)^{\frac{1}{2}}$ est derivata quoad x .

Interim tamen proprie de trapeziis tantum, quae (255) in Δla apices in superficie habentia dispesci possunt, sermo est; atque limite summae eorum: at omnia dicta valent, si pro arcu $= 2\pi : (\mu \text{ integr. } \sim \infty)$ trapezia simultanea considerentur.

Imo etiam et hic limitem eundem esse ut supra demonstrari potest, utcunque ponantur Δla sub conditione ibidem dicta: partes nempe eorum in plana ad abscissam e finibus ipsorum $\dot{x}$ contentae considerari debent; quod tamen brevitatis studio omittitur.

12mo. Si e lineae S puncto quovis demittatur $\perp$ ris x ad planum (idem P pro omnibus punctis ipsius S): complexus s sectionum omnium x cum P , vocatur *projectio* ipsius S in P . Si in P sita recta acceptis a puncto certo incipiendo abscissis x , aequatio ordinatae y pro s data sit, atque data etiam aequatio sit, per quam e cujusvis y fine erecta $\perp$ ris x (nempe distantia puncti ipsius S a P) determinatur: manifesto tota S in spatio determinata erit. Ordinatae omnino accipiuntur in P in una ipsius x plaga $\pm$ ve, et $-$ ve in altera, ita ipsa s accipiuntur in una plaga ipsius P $\pm$ ve et $-$ ve in altera; ita ab initio abscissarum accipiuntur abscissae in una plaga $\pm$ ve et $-$ ve in altera.

Si $s = (a)x$, et $S = (A)x$. atque $(a)m\dot{x} - (a)(m-1)\dot{x}$ denotetur per $\dot{s}$, et $(A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x}$ per $\dot{S}$; erit $\dot{s} \cong \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}$; atque e finibus ipsius $\dot{s}$ erectae ordinatae z (usque ad fines ipsius S ipsi $\dot{s}$ respondentis) dicantur z et z' , et corda ipsius $\dot{s}$ dicatur c ; erit $\perp$ ris ab extremitate ipsius z ad z' missa $= c$; oriaturque $\triangle$ rectangulum, cujus unus cathetus est c alter est $\dot{z}$ pro $z' = z + \dot{z}$, hypotenusa autem est corda ipsius $\dot{S}$; quae itaque est $= \sqrt{(c^2 + \dot{z}^2)}$. Sed $c^2 \cong \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ Consequ. $\dot{S} \cong$

$$\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)} \cong \dot{x} \sqrt{(1 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)} \text{ pro } \dot{y} \cong \dot{y}\dot{x}$$

et $\dot{z} \cong \dot{z}\dot{x}$. Estque hoc differentiale ipsius $\dot{S}$, nempe limitis summae cordarum; atque derivata quo-

ad x est $(1 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}}$. Nempe et hic ut supra limitem dari demonstrari potest; si pro ordinatis z crescentibus, tangentibus plana ad abscissam $\perp$ ris ordinatas; sequentes complectentia quas secant obficiantur: sed brevitatis necessaria uberius exponere vetat.

V. Notandum est, saepius esse, ut expressio differentialis strictioris (adeoque derivatae, quum

$\dot{x}$ semper finitum et nunquam 0 sit, sed dabili quovis minus fieri queat) pro certo valore ipsius x fiat $= 0$ aut ∞ ; vel $0:0$; imo si derivata 1ma, 2da &c accipiantur, saepius quaevis usque ad aliquam fiat $= 0$, pro valore certo ipsius x , aut derivata 1ma, 2da finitae vel 0 sint, et ab aliqua incipiendo omnes ∞ tae fiant. Sunt autem valores ejusmodi ipsius x , nonnisi in punctis discretis, (patet si functio linea expressa per ordinatas cogitetur); atque vocantur haec *puncta singularia*, quum linea ad puncta his respondentia, qualitatibus talibus gaudeat, quibus reliqua inter haec, non gaudent; sunt quoque ibi differentialia cum veris haud aequipollentia, at derivatae 1mae ibi quoque limites sunt quorum e differentialibus veris per $\dot{x}$ divis.

Superius (184) dictum est differentiale verum esse terminum generalem seriei e functione aliqua derivatae; itaque si n sufficienter augeatur, (quum x e talibus portionibus constet, quarum cuivis respondentes ordinatae aut crescent ab initio usque ad finem, aut decrescent), hoc nunquam $= 0$ esse potest: at etiam differentiale strictius, dictum est esse terminum seriei totidem terminorum generalem, differentiali vero sub certa saltem conditione aequipollentem (188); conditio quae ibi simplicitatis et claritatis caussa per xx expressa est, quamvis omnia per partes eo reduci queant, generalius

ita exprimi potest: si $\frac{(u) m \dot{x}}{(a) m x} \sim 1$ pro quovis $m \dot{x}$

a certo valore a ipsius $m \dot{x}$ usque ad certum valorem b ipsius $m \dot{x}$, ita ut quae excipiuntur, nonnisi punctum aut puncta discreta sint, aut simul vel sine illis pars ipsius x talis sit, quae dato quovis minor fieri potest: tum $(u)x$ dicitur differentiale generalius ipsius $(A)x$ a valore a ipsius x usque ad valorem b; atque manifesto $(A)b - (A)a = (B)b - (B)a$, et $(A)b = (B)b - (B)a + (A)a$, si tam

$\frac{(u) m \dot{x}}{(A) m \dot{x} - (A) (m-1) \dot{x}} \sim 1$ quam

$\frac{(u)m\dot{x}}{(B)m\dot{x}-B(m-1)\dot{x}} \sim 1$. Imo valor ipsius m extendi potest, ut etiam o et integros ∞ vos denotare queat; ut sit pro $\frac{1}{2}\dot{x}$, $\dots (A)2\dot{x}-(A)(2-1)\dot{x}$, $(A)1\dot{x}-(A)(1-1)\dot{x}$, $(A)o\dot{x}-(A)(o-1)\dot{x}$, $(A)(o-1)\dot{x}-(A)(-1-1)\dot{x}$, $(A)-2\dot{x}-(A)(-2-1)\dot{x} \dots$

Si ex gr. $(A)x=\frac{1}{x-1}$; valores omnes imaginarii erunt ab $x=o$ usque ad $x=1$; at etiam differentiale integraleque imaginarium accipi a valore o ipsius x usque ad 1 poterit, aut vero abscissa (post $x=1$) a o crescens accipi poterit, aut ut dictum est ab $x=1$ usque ad certum valorem $b>1$ accipietur.

Erit autem aut certus seriei, cujus terminus generalis est $(u)m\dot{x}$, terminus $mtus=o$, sed ita ut si ipsi m substituatur $m-1$, sit $\frac{(u)(m-1)\dot{x}}{(a)(m-1)\dot{x}}$

~ 1 ; aut sive pro $x=o$ fiet expressio differentialis $=o$ si in ea o substituatur ipsi x , sive id pro alio tali $m\dot{x}$ fiet ita ut $\frac{(u)(m-1)\dot{x}}{(a)(m-1)\dot{x}}$ non ~ 1 ;

ex gr. $d(b-x)^2=2(b-x)\dot{x}$, et pro $x=b$ fit $(n-1)\dot{x}=b-\dot{x}$, ac $(u)(n-1)\dot{x}$ fit $-2\dot{x}^2$, $(a)(n-1)\dot{x}$ autem fit $[b-(b-\dot{x})]^2-[b-(b-2\dot{x})]^2=-3\dot{x}^2$; atque $2\dot{x}^2:3\dot{x}^2$ non ~ 1 , sed est $=2:3$. Nempe $(A)m\dot{x}-(A)(m-1)\dot{x}$ dicitur $(a)m\dot{x}$.

Quoad casum primum; pro $(u)m\dot{x}=\dot{x}(u')m\dot{x}$ est $\frac{(A)(m-1)\dot{x}-(A)(m-2)\dot{x}}{x(u')(m-1)\dot{x}} \sim 1$, adeoque $\frac{(A)(m-1)\dot{x}-(A)(m-2)\dot{x}}{\dot{x}} \sim (u')(m-1)\dot{x} \sim$

$[(u')m\dot{x}=o]$. Sed $\frac{(A)m\dot{x}-(A)(m-1)\dot{x}}{(A)(m-1)\dot{x}-(A)(m-2)\dot{x}} \sim 1$ (si neutrum o aut ∞ sit). Nam (Fig. 38)

$\gamma+\lambda=\frac{1}{(h^2-\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}}$, et $\gamma=\frac{1}{(i^2-\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}}$; atque $\frac{i^2-\dot{x}^2}{h^2-\dot{x}^2} \sim 1$; quia $\frac{i}{h} \sim 1$, namque et $\frac{i}{i}$

~ 1 (eodem modo patet, uti 260). Itaque (per 81) $\frac{\dot{y}}{\gamma+\lambda} \sim 1$; conseq. $\frac{\dot{y}=2\gamma}{\gamma+\lambda} \sim 2$, et $\frac{\dot{y}}{\gamma+\lambda}$

-1 id est $\frac{\dot{y}-(\gamma+\lambda)}{\gamma+\lambda} \sim 1$.

Si vero pro $x = k$ (ubi k etiam 0 significare potest) fiat expressio derivatae $= 0$, atque non sit casus is, ubi si tantum uno $\dot{x}$ ultra vel intra k accipiatur differentiale verum, quotus ex hoc per expressionem differentialis strictioris tendat ad 1 : poterit accipi ω utvis parvum $\mp$ ve aut $-$ ve pro-
uti casus poscit (ex gr. pro $k=0$, sumatur $\mp$ ve),
ut sit $\frac{(A)(k+\omega+\dot{x})-(A)(k+\omega)}{\dot{x}(u')(k+\omega+\dot{x})} \sim 1$; nam

nulla pars continua ex k incipiendo est (per hyp),
ubi hoc non valeat. Inde vero est
 $\frac{(A)(k+\omega+\dot{x})-(A)(k+\omega)}{\dot{x}} \sim (u')(k+\omega+\dot{x})$;

sed $(u')(k+\omega+\dot{x})-(u')k \sim 0$; itaque
 $\frac{(A)(k+\omega+\dot{x})-(A)(k+\omega)}{\dot{x}} \sim [(u')k=0]$. Itaque

patet ordinatarum puncto ubi k terminatur quam propissimarum incrementa per $\dot{x}$ divisa hoc pacto ad limitem $0=(u')k$ tendere.

Interim si $(A)(k+\omega+\dot{x})-(A)(k+\omega)$ dicatur $\dot{y}$, et $(A)(k+\omega)-(A)k$ dicatur z ; erit $\frac{\dot{y}}{z} \sim 1$.

Nam $\dot{y} - z < \frac{z}{N}$ fieri pro dato quovis N potest;

nam pro $y = \frac{(N+\frac{1}{2})z}{N}$, fit $\dot{y} - z = \frac{(N+\frac{1}{2})z}{N} - z$
 $= \frac{z}{2N}$; potest autem $\dot{y}$, et z ita sumi, ut $\dot{y}$ supe-

ret ipsum z quantitate minore quam $\frac{z}{N}$. Est vero

tunc $\frac{\dot{y} : \dot{x}}{z : \dot{x}} \sim 1$; itaque quum $\frac{\dot{y}}{x}$ dato quovis minus fiat dum $n \sim \infty$, $\frac{z}{\dot{x}}$ dato majus manere nequit; conseq. quum z non o sit, $\frac{z}{x}$ dato quovis minus fit, id est $\frac{z}{x} \sim o$. Si $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ dato quovis majus fiat, $\frac{z}{\dot{x}}$ dato minus non manet, fitque dato quovis majus.

Pariter patet, si $(u') k = \infty$; sit ex gr. $k = o$; tum item ω dato quovis minus accipere licet, ut $\frac{(A)(\omega + \dot{x}) - (A)\omega}{x(u')(\omega + \dot{x})} \sim 1$, adeoque $\frac{(A)(\omega + \dot{x}) - (A)\omega}{x} \sim (u')(\omega + \dot{x})$. Sed si $(u') o = \infty$; tum $(u')(\omega + \dot{x})$ dato quovis majus fieri debet, dum $\omega + \dot{x} \sim o$; atque et hic ut prius $\frac{y}{z} \sim 1$ applicatur.

Quod differentiae ordinatarum finitarum, abscissarum differentia ad limitem o tendente, $\sim o$; atque ut ordinata ∞ ta fiat, antea omni dabili major fieri debeat; partim de qualibet functione speciatim demonstrari potest, (uti etiam factum jam de pluribus est), partim inferius demonstrabitur; intuitui vero per ordinatas in plano, in quarum qualibet uno puncto terminante valorem functionis, complexus eorum interrumpi nequit, exhibetur.

VI. Quum tamen haec exemplis geometricis, singularitatem ejusmodi punctorum, ostendentibus, illustrare supervacuum non sit: sit (Fig 39) corda ex p incipiens, vertaturque usquequo tangens fiat, et sit subtangens s , ac $y = (A)m\dot{x}$; erit $\dot{y} : \dot{x} = y : s'$, adeoque $s' = \frac{\dot{x}}{y}y$; est autem $s - s' = \omega \sim o$;

atque $\frac{\dot{x}y}{\dot{y}} = \frac{\dot{x}y : \dot{x}}{\dot{y} : \dot{x}} = \frac{y}{y : \dot{x}}$; itaque $\frac{y}{y : \dot{x}} = s - \omega$, et

$\frac{y}{y : \dot{x}} \sim s$. Erat vero $\frac{y}{\dot{x}} \sim \dot{y}$; atque hinc (juxta 77)

de tali y loquendo, quod neque ∞ , neque 0 est, nempe si quod $= 0$ esset, augeatur quacvis ordinata quantitate b (ut in Fig 40); erit

$\frac{y}{y : \dot{x}} \sim \frac{y}{\dot{y}}$, et $s = \frac{y}{\dot{y}}$. Eritque $s = 0$, si

$\frac{y}{\dot{x}}$ omni dabili majus, adeoque $\dot{y} = \infty$ fiat;

item s fiet ∞ , si $\frac{y}{\dot{x}}$ omni dabili minus, adeoque $\dot{y} = 0$ fiat.

Ostendit (Fig 39 *) casum, ubi $s = s' - \omega$; at ibi quoque omnia applicari patet.

Pro casu ubi $y = 0$ autem res (juxta Fig 41) quoque considerari potest. Sit certa abscissa constans α , cui respondeat y : erit $\dot{x} : \dot{y} = \alpha : S'$, et $S' = \frac{\alpha \dot{y}}{\dot{x}}$;

atque si $\frac{y}{\dot{x}} \sim \infty$, erit $S = \alpha \infty$, nempe

tangens ipsi y parallela, adeoque $\perp$ ris ad abscissam; est autem hic $(A)\dot{x} = (A)1\dot{x} - (A)0\dot{x} = \dot{y}$, at-

que pro $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \sim \infty$, est $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} \sim 0$.

Est etiam (Fig 42) $s : y = 1 : \text{tang } v$, item

$y : s = 1 : \text{tang } u$. Unde $\text{tang } v = \frac{y}{s}$, quod item (per

$s = \frac{y}{\dot{y}}$) est $= y : \frac{y}{\dot{y}} = \dot{y}$; atque $\text{tang } u = \frac{s}{y} =$

$\frac{1}{\dot{y}}$.

Quantitates tangentis T , normalis N et subnormalis, e $\triangle$ lis rectangulis prodire patet.

Sed si consideretur, qualisnam curvae ductus ante et post punctum tactus sit: erit (Fig 43)

$$s : y = s + \dot{x} : y' + \omega ; \text{ et hinc } y' + \omega = \frac{y(s + \dot{x})}{s} = y +$$

$$\frac{\dot{x} y}{s} = y + \dot{x} y^1. \text{ Sit } y = (A)x ; \text{ erit (per Taylorianum paulo inferius) } y' = (A)(x + \dot{x}) = (A)x + \dot{x} \downarrow (A)x + \frac{\dot{x}^2}{2} \downarrow^2 (A)x + \frac{\dot{x}^3}{2.3} \downarrow^3 (A)x \dots = y + \dot{x} y^1 + \frac{\dot{x}^2}{2} y^2 + \frac{\dot{x}^3}{2.3} y^3 \dots$$

et summa terminorum 2 priorum $= y' + \omega$; itaque si terminus sequens $\vdash$ sit, (quod fit si derivata 2da $\vdash$ sit) curva ductum infra tangentem, si vero derivata 2da $\mp$ sit, supra tangentem e puncto tactus incipit; quum quemlibet terminum nisi 0 sit, summa omnium sequentium majorem fieri posse demonstratur. Si vero derivata 2da imo et postea sequentes 0 fuerint, prouti prima quae non 0 est, $\mp$ vel $\vdash$ est, curva versus abscissam convexa vel concava erit. Idem et ante punctum patet. Erit nempe ibi $s : y = s - \dot{x} : y'' + \omega'$, et hinc $y'' + \omega' =$

$$y - \dot{x} y^1 ; \text{ atque } (A)(x - \dot{x}) = y - \dot{x} y^1 + \frac{\dot{x}^2}{2} y^2 - \frac{\dot{x}^3}{2.3} y^3 \dots$$

et hinc si derivata 2da non sit 0, et $\vdash$ sit, erit et ramus ad laevam concavus, si $\mp$, convexus;

si vero $y^2 = 0$, et y^3 non sit 0, atque sit ex gr. $\mp$, erit ad dextram incrementum $+\frac{\dot{x}^3}{2.3} y^3$, ad laevam

autem oppositum ejus, atque idem eveniet, si derivatae ipsi 0 aequales in derivata numeri paris desinant; erit itaque post punctum tactus ramus ad dextram convexus, ad laevam concavus. Vocatur ejusmodi *punctum flexus*.

Patet etiam, quod si derivata 2da sit functio certi valoris, nec 0 aut ∞ , inflexionem non esse;

quia si valor is $\pm$ sit, linea utrinque convexa, si $-$, utrinque concava erit. Si derivata 2da sit 0 aut ∞ , vel sub formam $\frac{0}{0}$ veniat, pro valore certo a ipsius x ; accipiaturn tum una vice $x=a+\omega$, altera vice autem $x=a-\omega$, pro ω $\pm$ vo et quantumvis exiguo; et quaeratur pro his valoribus ipsius x , num rami e fine ipsius $x=a$, utrinque concavi, aut utrinque convexi sint, vel unus concavus et alter convexus sit.

Dantur etiam alia puncta singularia: nempe si duo rami ad certum punctum tangente communi gaudeant, et aut utraque aut una tantum convexam faciem alteri obvertat, dicitur prior *cuspidis* 1mi generis, posterior 2dae; et cujusvis duae species sunt, prouti versus abscissam convexi fuerint rami, aut concavi; pro cuspidis 1mi generis, tangens inter utrumque cadit, pro altera non. (Fig 45, 46, 47, 48.).

Si plures rami tangentibus ad idem punctum diversis gaudeant, vocatur punctum *multiplum*; quod fieri posse manifestum est, si functionis plures valores (ex gr. per radicalia) fuerint, qui pro certo valore ipsius x (disparentibus ex gr. certis radicalibus), ad unicum redigantur; uti exempla ostendent. Pertinent vero etiam cuspidis ad puncta multipla: at cuspidis ramus uterque tangente eadem gaudet; et dantur ejusmodi puncta multipla, ut rami ex eodem puncto prodeuntes diversis tangentibus gaudeant; est autem omnibus punctis multiplis commune, quod ordinata quae ad tale punctum est, derivata quoad omnes ramos inde prodeuntes non una gaudeat, uti quaevis alia etiam ordinatarum plurium eidem puncto respondentium.

Dantur etiam puncta *isolata* dicta: datur nempe functio talis, cujus ex gr. a valore certo ipsius x usque ad certum (aut in ∞), nonnisi pro certo aut certis valoribus detur valor realis; atque si talis valor 0 sit, y punctum abscissae ibidem determinetur.)

EXEMPLA. Imo Si ordinata y sit $= b + ax^2$; erit pro b $\mp_{vo}$ et a $\mp_{vo}$ linea versus abscissam convexa, et concava si $a = -$ sit, et quidem utrinque ab $x=0$ incipiendo, tam pro x $\mp_{ve}$ quam pro x $=_{ve}$ incipiente; excurruntque duo rami utrinque aequaliter, ordinatis crescentibus in ∞ ; transibunt autem per axem ad distantias a capite abscissarum aequales, si $a = -$ fuerit, ubi $ax^2 = -b$, quum ibi $y=0$ sit; ac tangens erit axi parallela pro $x=0$. Nam derivata 1ma (quae breviter $\mathcal{J}$ atque ita 2da dici potest $\mathcal{J}^2$) est $2ax = 0$ pro $x=0$; $\mathcal{J}^2$ autem $= 2a$, quod $\mp$ est pro a $\mp_{vo}$ et $=$ si $a = -$ fuerit, adeoque linea in casu primo ex $x=0$ incipiendo versus abscissam convexa, in altero concava erit.

Patet vero $\mathcal{J}^2$ esse pro quovis valore ipsius x $+_{vum}$ pro a $\mp_{vo}$ et $=$ pro $a =_{vo}$; interim post $ax^2 = -b$ pro $=_{a}$, transeuntibus ramis in alteram axeos plagam, erunt hi ad partem axeos illis respondentem convexae; at ut ita loqui fas sit, id quod faciei axeos superiori concavum, inferiori convexum est; concipiatur axis deorsum sibi parallele ad distantiam d moveri; quaevis ordinata incrementum d capiet, et pro b fiet $b+d$ manente curva; atque $\mathcal{J}^2$ pro quavis abscissa infra curvam, etiam pro parte antea infra axem cadente $=$ fiet, et curva versus superiorem axeos faciem concava erit.

Est autem linea haec plane parabola, (Fig 44) si axis a vertice parabolae ad distantiam b sumatur ad axem X L_{ris} ; nempe si $Y^2 = \frac{X}{a}$ pro parametro $= \frac{1}{a}$, et $Y = x$ atque $y = b + X$; est $y = b + ax^2$.

2do Si $y = b + x^3$, pro $x=0$, inflexio est. Nam $\mathcal{J} = 3x^2$ et $\mathcal{J}^2 = 2.3x$, quod pro $\mp x$, $\mp$, pro $= x =_{vum}$ est, adeoque pro $\mp x$ curva ultra $x=0$ forma convexa, et concava pro $= x$ incipit. Est autem tangens parallela pro $x=0$; quia $\mathcal{J}=0$; est quidem tunc

et $J^2 = 0$, sed si x crescat $\mp_{ve}$ aut $-_{ve}$, fiatque ω $\mp$ vel $-$ quantovis minus, prius dicta valent.

3tio Si $y = b + x^{\frac{3}{2}}$, aut $y = b + x^{\frac{2}{3}}$, aut $y = b - x^{\frac{2}{3}}$, orietur pro $x = 0$ cuspis lmi generis; primum dat (Fig 45), sequens dat (Fig 46), tertium exhibet (Fig 47); nempe J prioris est $\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$,

quod pro $x = 0$ fit 0 , adeoque tangens axi parallela est; $J^2 = \frac{1.3}{2.2} x^{\frac{-1}{2}}$, quod pro $x = 0$ fit ∞ , at

si pro x ponatur $\mp \omega$ quantovis minus; fiet $\frac{3}{4\sqrt{\omega}}$,

cujus duo valores sunt, unus $\mp$ alter $-$, alioquin aequales, et prior denotat convexitatem rami superioris, qui e valore $\mp_{vo}$ ipsius $\sqrt{x^3}$ ipsi b addito generatus est, posterior concavitatem rami inferioris, qui e $-\sqrt{x^3} + b$ factus est. Patet quoque pro $-x$ ordinatam $\sqrt{x^3}$ imaginariam, at pro $b +$

$x^{\frac{2}{3}}$ sive $\mp$ sive $-$ sit x , ordinatam unicam respondere abscissae cuivis, et ab $x = 0$ utrinque aequaliter excurrere ramos; est vero pro hoc casu $J = \frac{2}{3} x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$, quod pro $x = 0$ fit ∞ , efficitque

tangentem axi $\perp$ riter insistentem; estque tum $J^2 = -\frac{2}{9} x^{\frac{-4}{3}}$, quod quidem pro $x = 0$ fit ∞ , at substi-

tuendo (ut prius) ω , fiet pro ω tam $\mp_{vo}$ quam $-_{vo}$, $-_{vum}$, adeoque curva utrinque concava. Patet vero, quod si in expressionibus ipsius y ponatur $x = a$ pro x , dicta pro $x = a$ fiant.

4to Si vero $y = b - x^{\frac{2}{3}}$, J pariter ∞ ta pro $x = 0$, tangentem item $\perp$ rem dabit, sed J^2 erit $\frac{2}{9} x^{\frac{-4}{3}}$.

✚vum ab $x=0$ incipiendo utrinque, adeoque curva utrinque versus abscissam convexa.

5to Si $y=x^2+x^{\frac{5}{2}}$, prodit pro $x=0$, cuspis 2di generis, et tangens axi parallela, (nempe ad distantiam 0). Nam $J=2x+\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$, et $J^2=2+$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}}$, atque prius fit 0 pro $x=0$, posteri-

us fit $=2$, ostenditque ramum utrumque, versus axem ab $x=0$ incipiendo convexum esse; nempe abinde pro abscissa ✚va quavis, $\sqrt{x^5}$ duos valores habet, pro —va autem imaginarium fit. At ramus superior e radice ✚va ex x^5 exurgens tantum manet semper convexus ad axem, alter autem tantum eousque manet talis, donec $x = \left(\frac{8}{15}\right)^2$ fiet,

nempe ubi J^2 fit $=2 - \frac{15}{4}\sqrt{x} = 2 - \frac{15}{4} \cdot \frac{8}{15} = 0$;

ibique inflexio est, nam addito ✚ ω utvis parvo, et altera vice subtracto ω e valore dicto ipsius x , erit pro vice prima J^2 —vum et ✚ pro altera; nem-

pe $2 - \frac{15}{4}\sqrt{\left(\frac{8^2}{15^2} + \omega\right)}$ —vum et $2 + \frac{15}{4}\sqrt{\left(\frac{8^2}{15^2}$

$-\omega\right)$ ✚vum est; tangens autem non est tum axi paral-

lela, nam $J = 2 \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^2 + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{8^2}{15^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ non $= 0$. Fit

praeterea ordinata adhuc semel 0, nempe tunc esse debet $x^2 - \sqrt{x^5} = 0$, adeoque $x^2 = \sqrt{x^5}$, atque $x^4 = x^5$, quod nonnisi pro $x=0$, et $x=1$ fieri potest.

6to Si $y=b+x^2+\sqrt{x^5}$ ponatur, linea eadem prodibit, cuspidem ad distantiam b ab axe exorta, et tangens erit ad distantiam b parallela axi; sed ramus inferior non pro $x=1$ transibit per axem,

verum pro illo x , pro quo fiet $b+x^2=\sqrt{x^5}$, id est $b^2+x^4+2x^2b=x^5$. Ita in superioribus potest o ipsi b substitui. (Fig. 48).

7^{mo} Si $y=\sqrt{(x^2-x^4)}$; oritur pro $x=o$, punctum multipulum ejusmodi, ad quod non ut in cuspidibus, quae ipsa quoque puncta multiplica sunt, rami tangente communi gaudent, sed tangentes ramorum ex eodem puncto ubi $x=o$, diversae erunt. Nempe pro $x=o$ item pro $x=1$ et $x=-1$ est $y=o$, et pro $x=1+\omega$, sive pro $x=-1-\omega$ (quantumvis exiguum sit ω) valor fit imaginarius; nam $(\pm 1 \pm \omega)^2 - (\pm 1 \pm \omega)^4 (\pm 1 \pm \omega)^2$ est $-vum$; crescente autem x a o usque ad 1 $\pm ve$, ubique ordinatae duae aequales erunt, una $\pm va$ supra, altera $-va$ infra axem; erit autem linea versus abscissam

concava; nam $\mathcal{J}$ est $= (x^2-x^4)^{\frac{-1}{2}} (x-2x^3)$, quod fit $\frac{o}{o}$ pro $x=o$, disparente factore priore radicali,

et altero factore quoque simul in o mutato; quomodo valor verus sub imagine ista generali quantitatem quamvis denotante latens reperitur, de eo statim dicetur aliquid; at hic, modo in casibus similibus usitato, factorem signo radicali subjectum eximendo, valor iste facile reperitur: nempe

$$\frac{x-2x^3}{\sqrt{(x^2-x^4)}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{(1-x^2)}}, \text{ quod}$$

pro $x=o$ fit $=1$ = tangenti anguli tangentis (273),

qui idcirco est $=\frac{1}{2}$ recto, quum ibi sit tangens

= radio; atque si pro x ponatur ω quantovis minus, et tendens ad limitem o , ad dextram $\pm ve$ ad laevam $-ve$, manifesto angulus tangentis, tam pro ramo ad dextram quam ad laevam, ~ 1 , itaque duae erunt tangentes, ad idem punctum ipsi $x=o$ respondens. Erit porro $\mathcal{J}[(x-2x^3)$

$$(x^2-x^4)^{\frac{-1}{2}}] \text{ id est } \mathcal{J}^2(x^2-x^4) = \frac{(1-6x^2)}{\sqrt{(x^2-x^4)}} -$$

$$\frac{(x-2x^3)(x-2x^3)}{\sqrt{(x^2-x^4)^3}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2-x^4)}} [1-6x^2 - \frac{(x-2x^3)^2}{x^2-x^4}] , \text{ ubi factor prior } \mp \text{ est pro valore } \mp_{\text{vo}}$$

ipsius $\sqrt{(x^2-x^4)}$, posterior autem $-$ est; nam reducendo ad denominatorem eundem, et terminum ultimum per x^2 dividendo, fit

$$\frac{1-x^2-6x^2+6x^4-(1-4x^2+4x^4)}{1-x^2} = \frac{2x^4-3x^2}{1-x^2} \text{ quod}$$

$-$ um esse facile patet, (quum tantum de $x < 1$ quaestio sit); est nempe tum $x^4 < x^2$, adeoque etiam $2x^2 > 2x^4$, tanto fortius vero superat $-3x^2$ ipsum $2x^3$. Est igitur linea pro ordinatis $\mp_{\text{vis}}$ supra axem versus ipsum concava, et quidem utrinque ab $x=0$, quia x^2 , x^4 eadem sunt pro x , sive $\mp$ sive $-$ fuerit; pro ordinatis $-_{\text{vis}}$ autem, erit alter factor

$$(\text{nempe } \frac{1}{\sqrt{(x^2-x^4)}}) \text{ quoque } -, \text{ itaque } \mathcal{J}^2 \text{ erit } \mp,$$

et linea quoad faciem axeos superiorem convexa, seu concava versus inferiorem, uti (276) dictum est; nempe tota supra axem concipi potest, axe deorsum ita lato, ut punctum aliquod ejus ad axem

$$\text{priorem describat } L_{\text{rem}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \text{ nam hanc esse or-}$$

dinatam maximam statim patebit. Referet hinc lineae istius pars quoad $\mp$ 1 realis (105) formam signi ∞ ; pars imaginaria quoque facile patet; (177) interest quippe saepius reale imaginariumque ex eadem expressione sibi invicem respondentia considerare.

Est autem linea ab $x=0$ utrinque synmetrice aequalis; quum x^2 et x^4 sint eadem, pro eadem quantitate ipsius x sive $\mp_{\text{va}}$ sive $-_{\text{va}}$; atque pro $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ utrinque tangens axi parallela est; nem-

$$\text{pe pro hoc valore fit } \mathcal{J} = \frac{x-2x^3}{\sqrt{(x^2-x^4)}} = 0; \text{ et sub-}$$

stituto $\frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \pm \omega$ ipsi x in $y = \sqrt{x^2 - x^4}$, ordinatam quamvis aliam minorem esse, quam pro $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$; nempe tum est $y = \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$; si vero pro parte ex gr. $\mp$ va ipsius x ad dextram considerentur ordinatae intra $x = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$, erit $x^2 - x^4 = (\frac{1}{2} - \omega)^2 - (\frac{1}{2} - \omega)^4 = \frac{1}{2} - \frac{2\omega}{\sqrt{2}} + \omega^2 - (\frac{1}{4} - \frac{4\omega}{2\sqrt{2}} + \frac{6\omega^2}{2} - \frac{4\omega^3}{\sqrt{2}} + \omega^4) = \frac{1}{4} - 2\omega^2 + \frac{4\omega^3}{\sqrt{2}} - \omega^4$, quod < priore $\frac{1}{4}$ est; nam $2\sqrt{2}\omega^3 - 2\omega^2 - \omega^4$ minus est, pro valore ipsius ω minore quam $\frac{1}{\sqrt{2}}$; nam etsi $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ponatur, erit $2\sqrt{2}\omega^3 = 2\omega^2$, et si valor ipsius ω adhuc minor fractio vera sit, erit $2\omega^2 > 2\sqrt{2}\omega^3$. Ita si ultra $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ accipiat $\frac{1}{\sqrt{2}} + \omega = x$, erit $x^2 - x^4 = \frac{1}{4} - 2\omega^2 - 2\omega^3\sqrt{2} - \omega^4$, ubi omnes termini praeter primum, (qui valor ipsius $x^2 - x^4$ pro $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ est) minus sunt.

8vo. Ast etiam pro $\omega = \infty$ fieri maximum vel minimum potest. Exemplum superius, $y = b - x^{\frac{2}{3}}$ dat maximum, et $y = b + x^{\frac{2}{3}}$ dat minimum pro $x = 0$; nempe y pro quantumvis parvo $\omega = x$ posito, donec $\omega^{\frac{2}{3}} = b$ fiat, ordinatam $b - \omega^{\frac{2}{3}}$ utrinque minorem dat, quam $b - 0^{\frac{2}{3}} = b$; postea vero fient ordinatae

tae utrinque $\rightarrow$ vae crescentes in ∞ ; ita $y = b + (\pm \omega)^{\frac{2}{3}}$ dat pro quovis ω ordinatam ipso b majorem. De quo tamen plura inferius.

9^{no}. Punctum izolatum exhibet $y = \sqrt[3]{(x^3 - x^2)}$, pro $x = 0$; nempe tum $y = 0$, et initium abscissarum solus valor realis erit, usquequo $x = 1$ fiat, et tum item $y = 0$ punctum in abscissa dabit, unde linea ordinatis crescentibus ramo uno superius alteroque aequali inferius incipiet; ab $x = 0$ autem sive $\rightarrow$ ve in ∞ , sive $\rightarrow$ ve usque ad 1 crescat x , valores omnes imaginarii sunt; nam $(\rightarrow x)^3$ et $-x^2$ utrumque $\rightarrow$ est, $(\rightarrow x)^3$ autem pro $x < 1$ est $< x^2$, adeoque $\sqrt[3]{\rightarrow}$ e $\rightarrow$ vo erit. Est autem $J =$

$\frac{1}{2}(3x^2 - 2x)$
 $\sqrt[3]{(x^3 - x^2)}$, quod item imaginarium est tam pro

$\rightarrow x$ quam pro $x < 1$; nempe ante et post punctum izolatum incrementa imaginaria sunt. Est autem

$$J^2 = \frac{6x - 2}{2\sqrt[3]{(x^3 - x^2)}} - \frac{(3x^2 - 2x)^2}{2\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^3}}, \text{ quod pro}$$

$x > 1$ aliquamdiu tantum $\rightarrow$ vum est; nam multipli-

cando per $2\sqrt[3]{(x^3 - x^2)}$, erit $6x - 2 -$
 $\frac{(3x^2 - 2x)^2}{x^3 - x^2} = 6x - 2 - \frac{(3x - 2)^2}{x - 1} =$

$$\frac{6x^2 - 2x - 6x + 2 - (9x^2 - 6x + 4)}{x - 1} = \frac{3x^2 - 2x - 2}{x - 1}, \text{ ubi}$$

quum $x > 1$ sit, $x - 1 \rightarrow$ est, adeoque tantum de numeratore quaestio est; et facile valor reperitur, usque ad quem crescente x ultra 1, $3x^2 - 2x - 2$ semper $\rightarrow$, postea autem semper $\rightarrow$ est; itaque eoque lineae ramus superior concavus postea semper convexus erit. Est nempe $3x^2 - 2x - 2 = 0$ pro $x =$

$\frac{1}{3} + \sqrt[3]{-\frac{7}{9}}$, (per resolutionem aequationis quadraticae inferius tradendam, et substituendo quoque

patet); quod >1 , nam $\sqrt{\frac{7}{9}} > \frac{2}{3}$ est; dicatur α ,

et addatur prius $-\omega$ tum $+\omega$; erit $3x^2 - 2x - 2 = 3(\alpha - \omega)^2 - 2(\alpha - \omega) - 2 = 3\alpha^2 - 6\alpha\omega - 3\omega^2 - 2\alpha + 2\omega - 2$; sed $3\alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0$ erat, et $\omega(2 - 6\alpha) - 3\omega^2 = 0$ est, quum $\alpha > 1$ sit. Si vero ponatur $\alpha + \omega$, prodibit $\omega(6\alpha - 2) + 3\omega^2$, quod $\neq 0$ est. Itaque inflexio est.

10mo. Sint denique adhuc exempla ad subtangentem finitam: Parabolae pro parametro p est

$y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, et $d = \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$; adeoque subtan-

gens $= p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} : \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} = 2x$, quod ad verticem

fit 0 ; et derivatae ibidem valore ∞ to reddito, angulus tangentis, tangenti ∞ tae respondens rectus est.

Si $y = a^x$ sit, quod lineam logarithmicam exhibet, in qua abscissae logarithmi ordinatarum quoad basim a sunt; est $d(a^x) = a^x d \log(a^x)$ (199) $= a^x d(x \log a) = a^x \log a$, ($\log a$ quoad e intelligendo p.

158) unde $s = \frac{a^x}{a^x \log a} = \frac{1}{\log a}$; et subtangens pro

quovis x est constans = modulo systematis, cujus basis a est (163). Pro $a = e$ fit $\log a = 1$, et $s = 1$; est etiam tangens anguli quem tangens cum axe facit $= 1$ pro $x = 0$; nam $e^0 \log e = 1$, et angulus ipse est dimidius rectus; atque dum $x \rightarrow +\infty$, tang $\angle$ tangentis $\rightarrow \infty$, adeoque $\angle \rightarrow R$ (per $\angle$ angulum et per R rectum intelligendo); si vero $x \rightarrow -\infty$, tum $e^{-x} \rightarrow 0$, adeoque tang $\angle$ tangentis $\rightarrow 0$, et $\angle \rightarrow 0$, fitque axis *asymptota*.

Nempe si detur talis recta $\mathcal{A}$, qua pro axe sumpta, dum abscissa $\rightarrow \infty$, ordinata $\rightarrow 0$ (adeoque non fit 0 p. 29): dicitur $\mathcal{A}$ *asymptota* lineae

generatae. Sermo hic tantum de asymptota recta in plano est.

Posset quoque dici: si inter rectam ∞ tam $\mathcal{A}$ et ramum r lineae cujuscumque, nulla recta cadat, quae sufficienter producta, aut cum neutro quidquam, aut nonnisi punctum unum utrique commune habeat; tum $\mathcal{A}$ dicitur *asymptota* ipsius r , si nihil cum r commune habeat; si vero punctum commune habeat, *tangens* audit.

E definitione priore patet; quod si linea abscissarum, et angulus ordinarum ita accipi queat, ut a certo valore α abscissae usque ad certum valorem β eundo, ordinata $\sim \infty$ priusquam abscissa $= \beta$ fieret, pro abscissa $= \beta$ vero fiat ∞ ; ordinata ista asymptota erit. Nempe et ordinata huic quam proxima secabit curvam. Ex[gr. si $y = \frac{1}{x}$,

eundo a valore certo ex gr. 1 ipsius x usque ad $x=0$, fit priusquam $x=0$ fieret, y omni dabili majus, et pro $x=0$ fit ∞ ; et quicumque fuerit angulus ordinarum, recta e puncto ubi $x=0$ est, ordinatis reliquis parallela, asymptota lineae per aequationem dictam generatae est.

Sed pro valore ipsius x crescente in ∞ , recta $Q \infty$ ta ad axem ex initio abscissarum L_{ris} explorandae asymptotae inservit: nimirum quaecumque recta P in eodem plano, est aut ipsi Q parallela, aut ad certum angulum v secat eam, et quidem ad certam distantiam Z ab initio abscissarum, aut supra aut infra axem, aut in axe pro $Z=0$. Si v rectus sit, ordinatae ipsius P omnes aequales erunt. Ordinatae curvae et rectae P , dicantur y et Y pro eodem abscissae fine. Si v non sit rectus, P secabit axem, ad certum angulum u , qui (pro angulo ordinarum recto) ipsum v ad rectum complebit, (per v duorum angulorum deinceps positorum minorem intelligendo).

Nisi vero asymptota ad axem L_{ris} sit, (quo in casu necesse est, a valore certo ipsius x usque ad

certum, ordinatam curvae fieri dato quovis majorem): talia Z et u quaerenda sunt, ut $Y-y$ a certo valore ipsius x incipiendo in ∞ nunquam fiat $=0$, sed ~ 0 .

In (Fig 49) est $s:y=s-x:z$, et hinc $z=y-x\mathcal{D}y$ (propter $s=\frac{y}{\mathcal{D}y}$); erat vero $\mathcal{D}y =$ tangenti il-

lius anguli, ad quem tangens axem secat; et hinc si (dum $x \sim \infty$) $z \sim Z$, ac $\mathcal{D}y \sim \text{tang } u$, erit $Z-(y-x \text{ tang } u) \sim 0$. In (Fig 50) item est $K:Z=K+x:Y$, et $K:Z=1:\text{tang } u$; atque hinc $K=\frac{Z}{\text{tang } u}$, et $Y=Z+x \text{ tang } u$; unde $Y-y=Z+x \text{ tang } u-y=Z-(y-x \text{ tang } u)$, quod ut plane dictum est, ~ 0 . Consequ. $\mathcal{A}$ asymptota est.

Exemplo sit hyperbola aequilatera pro axe $=1$, ubi $y=(x^2+x)^{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{D}y=(x+\frac{1}{2})(x^2+x)^{-\frac{1}{2}}=$
 $x+\frac{1}{2}$
 $\frac{1+\frac{1}{2x}}{\sqrt{(x^2+x)}}=\frac{1+\frac{1}{2x}}{\sqrt{(1+\frac{1}{x})}}$, quod ~ 1 dum $x \sim \infty$;

itaque tangens anguli u est 1, adeoque $u =$ dimidio recto, Z autem $=\frac{1}{2}$; nam $z=y-x\mathcal{D}y =$

$$(x^2+x)^{\frac{1}{2}} - \frac{(x+\frac{1}{2})x}{\sqrt{(x^2+x)}} = \frac{x^2+x-a^2-\frac{1}{2}x}{\sqrt{(x^2+x)}} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{(1+\frac{1}{x})}}, \text{ quod } \sim \frac{1}{2} \text{ dum } x \sim \infty.$$

Si igitur tam $z=y-x\mathcal{D}y$ quam $\mathcal{D}y$ limite non ∞ to gaudeant, recta per finem ipsius Z ad angulum qui ipsum u ad rectum complet posita, asymptota erit. Si $u=0$ sit, manifesto $y-x\mathcal{D}y \sim y=Z$, atque tum ex $Z-(y-x \text{ tang } u) \sim 0$, fit $Z-y \sim 0$. Si $Z=0$ esset, poterit ordinata quaevis constante b augeri, ut $Z=b$ fiat.

Si vero $\mathcal{A}$ asymptota sit, ramus idem nulla alia gaudet. Nam quaecunque alia recta sit, sive parallela ipsi $\mathcal{A}$ sive non, si ordinatae hujus cum Y et y iisdem abscissae punctis respondentes Y' dicantur, $Y' \rightarrow Y$, adeoque $Y' \rightarrow y$ non ~ 0 .

Imo demonstrari etiam potest; pro $x \sim \infty$, asymptotam nonnisi tunc esse, si nec z nec $dy \sim \infty$; uti applicatio ad alios casus, ubi curva versus axem convexa, atque et Z infra axem cadit, facile ostenduntur; sed ne figurae multiplicentur, rem attigisse sufficiat.

Ex gr. In parabola pro parametro $=1$; est $y = x^{\frac{1}{2}}$, et $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, quod ~ 0 , atque $z = y - x dy$

$$= \sqrt{x} - \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2}, \text{ quod } \sim \infty; \text{ itaque tan-}$$

gens ipsam z ad distantiam data quavis majorem ad angulum recto quam propissimum secatur, tendens eo ut axi parallela fiat, quod tamen ad distantiam omni dabili majorem, id est in nullo loco determinato fieri potest, ut ibidem asymptotam praebeat.

Exhiberi quidem linea pro quovis finito Z , et angulo u potest, cujus ibidem asymptota sit; si nempe $y = Z + x \tan u + \omega$ sit, (per ω functionem ipsius x talem intelligendo, quae ~ 0 , dum $x \sim \infty$), tunc enim $y - x \tan u = Z + \omega$, et $y - x \tan u \sim Z$, atque tum $Y - y = Z + x \tan u - y = Z - (y - x \tan u) \sim 0$. Et facile patet, ordinatarum simultanearum lineae pro qua $y - x dy \sim \infty$ differentiam non tendere ad 0 , ut asymptota eadem gaudeant. Ex gr. pro casu praesente parab-

$$\text{lae, } Z + x \tan u + \omega - x^{\frac{1}{2}} \sim -\infty \text{ (pro quovis } Z \text{).}$$

VII. Sed per superius (279) promissum aliquid de valore quoti duarum functionum u et v , dum pro $x=b$, utraque 0 fit, adjiciendum.

Si pro quovis x sit $vz = u$, atque a certo valore a ipsius x , antequam $x = b$ fiat, semper sit $z = \frac{u}{v}$, pro $x = b$ vero u fiat $= 0$, et $v = 0$; valor

quoti verus sub forma $\frac{0}{0}$ quantitatem quamvis denotante latens reperitur sic.

Ex $u = vz$ sequitur $Ju = vJz + zJv$ (249), quod pro $x = b$ fiet $= zJv$, quia tum $v = 0$; atque hinc $z = \frac{Ju}{Jv}$, si non sit iterum $Ju = 0 = Jv$ pro $x = b$.

Si vero utrumque 0 fiat, operatio dicta iterum atque iterum repeti potest.

Ex gr. Formula summae seriei geometricae pro exponente x , et numero terminorum μ atque termino primo $= a$, est $\frac{ax^\mu - a}{x - 1}$; quod pro $x = 1$ fit

$\frac{0}{0}$, series autem est $a + a + a - \dots$; atque

$\frac{J(ax^\mu - a)}{J(x - 1)}$ est $= \frac{\mu ax^{\mu-1}}{1} = \mu a$ pro $x = 1$, quae plane summa vera est.

Ita si $z = \frac{a^2 - x^2}{a - x}$; fit hoc quoque $\frac{0}{0}$ pro $x = a$;

at $\frac{J(a^2 - x^2)}{J(a - x)} = \frac{-2x}{-1} = 2a$ pro $x = a$; qui plane

valor verus est; nimirum eousque semper $a + x$ fuit quotus, (nempe $(a + x)(a - x) = a^2 - x^2$), et dum $x \sim a$, quotus $\sim 2a$; crescente vero postea ipso x , item semper $a + x$ fit quotus in ∞ , uti etiam pro $x = a$, est $2a = a + a$.

Saepe evenit, ut quotus $\frac{u}{v}$ formam $\frac{\infty}{\infty}$ induat pro valore certo ipsius x ; atque hujus quoque

valor reperiatur, reducendo adformam $\frac{o}{o}$; nempe $\frac{1}{\infty} = o$.

VIII. Hactenus ordinatae omnes parallelae erant: mentio etiam facienda est ordinatarum e puncto exeuntium, pro abscissis aut in recta ut prius acceptis; aut in peripheria radii 1 e puncto ordinatarum communi tanquam centro descripta, ita ut via puncti a certo puncto peripheriae dictae (pro principio abscissarum posito) semper porro moti (sive $\rightarrow$ ve sive $\leftarrow$ ve incipiendo continuandoque motum), determinet abscissam

Exemplo quoad prius sit parabola (Fig 49)

ubi $y = x^{\frac{1}{2}}$ pro parametro $= 1$. Est $k \mp x : y = 1 : \tan g q$;

et hinc $k \tan g q \pm x \tan g q = y = x^{\frac{1}{2}}$, atque $x = k^2 \tan g^2 + x^2 \tan g^2 + 2kx \tan g^2$; = e quo exprimi x per q et k , atque expressio talis ipsius x in

$y = x^{\frac{1}{2}}$ substitui potest, ut y per k et q expressum prodeat; atque hinc etiam ordinata quaevis ab pro principio abscissarum a et angulo q , quum sit $= \sqrt{[(k+x)^2 + y^2]}$ per k et q exprimi potest, ut in expressione nonnisi q sit variabilis.

Exemplo quoad posterius sit Spiralis Archimedeae, et Spiralis logarithmica. In priore est ordinata $y = au$, in posteriore autem $y = a^u$; in utroque certam unitatem ponendam esse e superioribus manifestum est. Prior aequatio eadem, quae rectae pro abscissis in recta et ordinatis parallelis est; posterior eadem quae lineae logarithmicae.

Fiet vero $y = au = o$ pro $u = o$, et $y = a$ pro $u = 1$, et $y = 2$ pro $u = 2$ &c. . . .

Ita $y = a^u$ fiet $= 1$ pro $u = o$, et $y = a$ fiet pro $u = 1$, atque $y = a^2$ pro $u = 2$ &c. . . Pro $u = -1$

autem fiet $y = a^{-1}$, et pro $u = -2$ fiet $y = a^{-2}$. Unde si $\mp a > 1$ sit, $y \sim \infty$, dum $\mp u \sim \infty$, at $y \sim 0$ dum $\mp u \sim \infty$; atque si $a < 1$ sit, res inverse est, nempe $y \sim 0$ dum $\mp u \sim \infty$ et $y \sim \infty$ dum $\mp u \sim -\infty$; in utroque casu autem y dum ~ 0 , nunquam $= 0$ fiet, adeoque nec unquam in principium ordinatarum, centrumque peripheriae radii 1; in qua abscissae u accipiuntur, perveniet in quantumvis excreverit abscissa u .

Si vero $a = 1$, tum in perpetuum in periphēria radii 1 terminabuntur ordinatae.

Est autem manifesto $u = \log y$ (quoad a) si $y = a^u$.

Haec est illa linea, cujus evolutam ipsi aequalem esse Iac. Bernoulli detegens, eam cum inscriptione *Haec eadem mutata resurgit sepulcro suo incidi postulabat*, ut quum semper renascatur, resurrectionis vitaeque nunquam interiturae spei symbolum esset.

Quomodo vero subtangentes pro talibus curvis et reliqua determinantur, instituti ratio silentio praeterire jubet.

IX. Superius (p. 183) et proxime (274) mentione *Theorematis Tayloriani* facta, exponendum venit. Imo Si a valore certo α ipsius x usque ad valorem certum β , sit pro iisdem finitis $A, B, C \dots a, b, c \dots$, $(F)(x + \omega) = A + B(x + \omega)^b + C(x + \omega)^c \dots$, (sive $\omega = 0$, sive tale fuerit, ut evolutio binomialis (150) in omnibus terminis locum habeat, quod semper est, pro $\omega < x$), atque haec series aut terminata aut convergens sit: erit

$$(F)(x + \omega) = A + \omega J(F)x + \frac{\omega^2}{2} J^2(F)x + \frac{\omega^3}{2.3} J^3(F)x \dots$$

Nam terminis (per 150) evolutis, et serie e quovis termino orta verticaliter deorsum scripta; erit

$$(F)(x+\omega) = A + Bx^b + Cx^c \dots$$

$$+ (bBx^{b-1} + cCx^{c-1} \dots)\omega$$

$$+ [(b-1)bBx^{b-2} + (c-1)cCx^{c-2} \dots] \frac{\omega^2}{2}$$

$$+ [(b-2)(b-1)bBx^{b-3} + (c-2)(c-1)cCx^{c-3} \dots] \frac{\omega^3}{2.3}$$

.....

Est autem linea superior $= (F)x$, 2da vero $= \omega J(F)x$, 3tia $= \frac{\omega^2}{2} J^2(F)x$, 4ta $= \frac{\omega^3}{2.3} J^3(F)x$, et

$$\mu\text{ta} = \frac{\omega^{\mu-1}}{2.3 \dots \mu} J^{\mu}(F)x.$$

Nempe etiamsi $A + B(x+\omega)^b + C(x+\omega)^c \dots$ series ∞ ta sit; accipiantur termini numero certo, et quidem tali pro quovis dato N , ut summa terminorum illorum S dicta, sit $(F)(x+\omega) - S < \frac{1}{N}$,

atque etiam summa totidem terminorum seriei

$A + Bx^b + Cx^c \dots$, s dicta, sit $(F)x - s < \frac{1}{N}$. Pa-

tet, cuivis termino lineae horizontalis 2dae ut factore omnibus iis communi, ita porro cujusvis lineae horizontalis termino cuivis, adjecto factore communi ad finem posito; esse seriem verticalem cujus primus terminus est Bx^b , seriem convergentem (per hyp.), cujus summa $\sim B(x+\omega)^b$, ita seriem verticalem, cujus primus terminus est Cx^c esse seriem convergentem, cujus summa $\sim C(x+\omega)^c$, et ita porro; atque seriei, cujus termini sunt lineae horizontales, summam $\sim A + B(x+\omega)^b + C(x+\omega)^c \dots$ (usque ad ultimum terminorum numero certo acceptorum).

Sed est etiam $bBx^{b-1} = J Bx^b$, et $cCx^{c-1} = J Cx^c$, et ita porro usque ad ultimum; atque hinc (197) est $bBx^{b-1} + cCx^{c-1} = J [Bx^b + Cx^c \dots]$

$= J s$. Ita in quavis columna quivis terminus deorsum sequens, derivata praecedentis est, et quaevis μ ta linea horizontalis (praeter factorem ultimum communem) est, si linea prima non numeretur, $= J^\mu s$.

Unde manifesto $s + \omega J s + \frac{\omega^2 J^2 s}{2} + \frac{\omega^3 J^3 s}{2.3} \dots$

$\sim$ S. Ast etiam ipsi s ubique $(F)x$ substituendo, seriei summa ad limitem eundem tendit, ad quem S; nempe $\sim (F)(x + \omega)$. Nam consideratis terminis seriei utriusque simultaneis, quilibet prioris per ei respondentem terminum posterioris divisus ~ 1 ; nempe $\frac{s}{(F)x} \sim 1, \frac{J s}{J(F)x} \sim 1$;

nam si $J s - J(F)x$ (pro dato quovis N) nequeat fieri $< \frac{J(F)x}{N}$; sit k maximum tale ut $J s - J(F)x$ sit

$< \frac{J(F)x}{k}$; erit $\int J s - \int J(F)x < \int \frac{J(F)x}{k}$; seu $s -$

$(F)x < \frac{(F)x}{k}$, (contra hypothesin, quum $s - (F)x$

~ 0). Pariter patet, quod $\frac{J^2 s}{J^2(F)x} \sim 1$, et ita

porro. Consequ. quum etiam $\frac{S}{(F)(x + \omega)} \sim 1$;

sequitur (per 154) etiam $(F)x + \omega J(F)x + \frac{\omega^2}{2}$

$J^2(F)x + \frac{\omega^3}{2.3} J^3(F)x \dots \sim (F)(x + \omega)$.

Valet autem hoc de casu quovis, ubi supposita locum habent; nempe de quavis functione, quae forma dicta exprimi potest, atque de talibus valoribus ipsorum x et ω ut dictum est.

2do Interim tamen quaecunque functio $(k)x$ fuerit serie analogae evolvi poterit; et quidem juxta III. *La Grange* ubicunque subsistere libuerit, valoribus

complementi maximo minimoque quasi finibus inter quos continetur, assignatis. Unde quando complementum $\sim$ o dum numerus terminorum $\sim \infty$, series converget, ut { 130 }. Est nimirum

$$(k)x = (k)o + x \mathcal{J}(k)u = (k)o + x \mathcal{J}(k)o + \frac{x^2 \mathcal{J}^2(k)u}{2} \\ = (k)o + x \mathcal{J}(k)o + \frac{x^2 \mathcal{J}^2(k)o}{2} + \frac{x^3 \mathcal{J}^3(k)o}{2.3} + \frac{x^4 \mathcal{J}^4(k)o}{2.3.4} + \dots$$

$\mathcal{J}^v(k)u$; per $(k)o$ intelligendo id quod fit, si in $(k)x$ ipsi x ubique o substituatur, et per $\mathcal{J}(k)o$ intelligendo hic non derivatam ipsius $(k)o$, sed id quod fit si in $\mathcal{J}(k)x$ ipsi x ubique o substituatur, (quod etiam ad ambiguitatem tollendam stellula praeposita distingvi posset), per u vero intelligitur quantitas quaequam a o usque ad x inclusive.

Nam $(k)x = (k)[(x - xz) + xz]$ poni potest $= (k)(x - xz) + xP$; nam $\frac{(k)x - (k)(x - xz)}{x}$ dici P

potest; est vero manifesto $P = o$ pro $z = o$, quia tum $(k)(x - xz)$ fit $= (k)x$.

Ita poni potest $(k)x = (k)[(x - xz) + xz] = (k)(x - xz) + xz \mathcal{J}(k)(x - xz) + x^2 Q$; nam $\frac{(k)x - (k)(x - xz) - xz \mathcal{J}(k)(x - xz)}{x^2}$, dici Q potest;

quod continuari posse patet, [ut prodeant R, S, T - - - cum derivatis ipsius $(k)(x - xz)$ ac potentiis ipsius xz altioribus. Est autem etiam $Q = o$ pro $z = o$, nam ut prius expressio tunc ad $(k)x$ redigitur; idem de R, S - - - patet.

Hinc si $(k)x$ constans ponatur, et derivatae utrinque quoad z accipiantur; erit

$$o = -x \mathcal{J}(k)(x - xz) + x \mathcal{J}(k)(x - xz) - x^2 z \mathcal{J}^2(k)(x - xz) \\ + x^2 \mathcal{J}Q; \text{ id est } o = -x^2 z \mathcal{J}^2(k)(x - xz) + x^2 \mathcal{J}Q, \\ \text{adeoque } \mathcal{J}Q = z \mathcal{J}^2(k)(x - xz); \text{ et} \\ (k)x = (k)(x - xz) + xz \mathcal{J}(k)(x - xz) + x^2 \int z \mathcal{J}^2(k)(x - xz).$$

Ita poni potest $(k)x = (k)(x - xz) + xz$

$$J(k)(x - xz) + \frac{x^2 z^2 J^2(k)(x - xz)}{2} + \frac{x^3 z^3 J^3(k)(x - xz)}{2.3}$$

$$\dots + \frac{x^{p-1} z^{p-1} J^{p-1}(k)(x - xz)}{2.3 \dots (p-1)} + \frac{x^p z^p}{2.3 \dots p}$$

$J^p(k)(x - xz) + x^{p+1}T$; nam subtrahendo terminos ad dextram omnes praeter ultimum, et dividendo per x^{p+1} , quotus T dici potest (ut antea); quod item manifesto $= 0$ pro $z = 0$ fieri debet, summa ceterorum terminorum ad $(k)x$ redacta.

Accipiendo autem derivatam utrinque quoad z , fiet

$$0 = -xJ(k)(x - xz) + xJ(k)(x - xz) - x^2 z J^2(k)(x - xz) + \frac{2x^3 z J^2(k)(x - xz)}{2} - \frac{x^3 z^2 J^3(k)(x - xz)}{2} + \frac{3x^3 z^2}{2.3}$$

$$J^3(k)(x - xz) \dots - \frac{x^p z^{p-1} J^p(k)(x - xz)}{2.3 \dots (p-1)} +$$

$$\frac{p x^p z^{p-1} J^p(k)(x - xz)}{2.3 \dots (p-2)p} - \frac{x^{p+1} z^p J^{p+1}(k)(x - xz)}{2.3 \dots p}$$

+ $x^{p+1}J^p T$; ubi quum primum par terminorum,

ita 2dum et quotumvis $= 0$ sit, fiet $J^p T = \frac{x^p}{2.3 \dots p}$

$J^{p+1}(k)(x - xz)$, adeoque $T =$

$$\int \frac{x^p J^{p+1}(k)(x - xz)}{2.3 \dots p}; \text{ nempe post terminum}$$

$$\frac{x^p z^p J^p(k)(x - xz)}{2.3 \dots p} \text{ complementum est } \frac{x^{p+1}}{2.3 \dots p}$$

$$\int x^p J^{p+1}(k)(x - xz).$$

Si jam valor ipsius z accipiatur nonnisi a 0 usque ad 1 (inclusive), et dicatur $(p+1)_*M$ valor ipsius $J^{p+1}(k)(x - xz)$ maximus (sensu algebraico uti pag. 31, ubi $0 > -1$), et minimus valor ejus dicatur $(p+1)_*N$; tum pro nullo valorum

dictorum ipsius z est $\int z^p (p+1)_* N > \int z^p J^{p+1}(k)(x-xz) > \int z^p (p+1)_* M$. Sed $(p+1)_* M$ et $(p+1)_* N$ constantes sunt, adeoque $\int z^p (p+1)_* M = \frac{z^{p+1}}{p+1} (p+1)_* M$, et $\int z^p (p+1)_* N = \frac{z^{p+1}}{p+1} (p+1)_* N$.

Consequ. complementum nempe $x^{p+1}T$, pro $z=1$ non est $> \frac{x^{p+1} (p+1)_* M}{1.2 \dots p(p+1)}$ et non $< \frac{x^{p+1} (p+1)_* N}{2.3 \dots p(p+1)}$ nempe cum $z^{p+1}=1$.

At si u quantitatem quamlibet denotet a 0 usque ad x ; quum $x-xz=x(1-z)$, pro valore ipsius z a 0 usque ad 1 accepto, manifesto per u valor quivis ipsius $x-xz$ denotari potest; itaque sub $J^{p+1}(k)u$ continentur omnes valores ipsius $J^{p+1}(k)(x-xz)$, adeoque etiam $(p+1)_* M$ et $(p+1)_* N$.

Poterit igitur complementum per $x^{p+1} J^{p+1}(k)u$ exprimi; ita ut si maximus minimusque valor hujus quaeratur, complementum inter hos contineri pro quovis z , adeoque et pro $z=1$, constet. Sed pro $z=1$ fit $x-xz=0$, et $(k)(x-xz)=(k)0$, atque $J(k)(x-xz)=J(k)0$.

Consequ. $(k)x=(k)0+xJ(k)0+\frac{x^2 J^2(k)0}{2}+\frac{x^3 J^3(k)0}{2.3}+\dots+\frac{x^p J^p(k)0}{2.3\dots p}+\frac{x^{p+1} J^{p+1}(k)u}{2.3\dots(p+1)}$.

Ex gr. Sit $(k)x=(a+x)^\mu$; erit hoc $=(k)0+xJ(k)0+\frac{x^2 J^2(k)0}{2}+\frac{x^3 J^3(k)0}{2.3}+\dots+\frac{x^\nu J^\nu(k)u}{2.3\dots\nu}=a^\mu+\mu a^{\mu-1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{2}a^{\mu-2}x^2+\dots+\frac{x^\nu J^\nu(k)u}{2.3\dots\nu}$; nam

$J(k)x=\mu(a+x)^{\mu-1}$, $J^2(k)x=\frac{\mu(\mu-1)}{2}(a+x)^{\mu-2}$

$\mathfrak{C}^c$, adeoque $x \mathfrak{J}(k)o = x \mu a^{\mu-1}$, $\frac{x^2}{2} \mathfrak{J}^2(k)o = \frac{x^2}{2}$

$\mu(\mu-1)a^{\mu-2} \mathfrak{C}^c$. . . Complementum $\frac{x^v}{2.3 \dots v} \mathfrak{J}^v(k)u$

autem est $\frac{x^v \mu(\mu-1) \dots (\mu-v+1)}{2.3 \dots v} (a+u)^{\mu-v}$; cujus

valores omnes prodibunt, si ipsi u valores a o usque ad x substituantur; eritque manifesto valor

verus inter $\frac{x^v \mu(\mu-1) \dots (\mu-v+1)}{2.3 \dots v} a^{\mu-v}$ et

$\frac{x^v \mu(\mu-1) \dots (\mu-v+1)}{2.3 \dots v} (a+x)^{\mu-v}$.

3tio Hinc substituendo e superiori $(F)(x+\omega)$, k ipsi F , et x ipsi a , atque ω ipsi x ; prodibit formula eadem pro $(k)\omega = (F)(x+\omega)$, quae prius; nempe $(k)\omega = (F)(x+\omega) = (k)o + \omega \mathfrak{J}(k)o + \frac{\omega^2}{2}$

$\mathfrak{J}^2(k)o + \frac{\omega^v}{2.3 \dots v} \mathfrak{J}^v(k)u = (F)x + \omega \mathfrak{J}(F)x + \frac{\omega^2}{2}$

$\mathfrak{J}^2(F)x + \frac{\omega^v}{2.3 \dots v} \mathfrak{J}^v(F)u$, (per u quantitatem

quampiam a o usque ad ω intelligendo), ubi terminus ultimus complementum est; quod si $\sim o$, series convergens est, alioquin etiam maximum minimumque valorem, inter quos verus continetur exhibens.

4to Quod complementum dictum in exemplo prius allato, pro $x < a$ semper $\sim o$, (excepto si μ integer sit, quo in casu fit post aliquem terminum semper $= o$); e superiori (150) patet: attamen quoad alios casus necesse est de valore facti e factoribus, quorum numerus $\sim \infty$, uti hic

$\frac{\mu}{1} \cdot \frac{\mu}{2} \dots \frac{\mu-v+1}{v}$ aliquid dicere.

Sint factores $A, B, C \dots$; erit $ABC \dots = e^{\log A + \log B \dots}$; (163). Itaque si $\log A + \log B \dots$

$\sim \alpha$, tum $ABC \dots \sim e^\alpha$; adeoque si $\alpha = 0$, tum $ABC \dots \sim 1$, si $\alpha = \infty$, tum $ABC \dots \sim \infty$, si $\alpha = -\infty$, tum $ABC \dots \sim 0$, nam 1 divisum per (e elevatum ad quantitatem $\mp$ vam in omni dabili majus crescentem) ~ 0 .

Distingvantur factores hi, (qui singuli certo finito eodem minores sint, nec ullus $= 0$ sit, et omnes $\mp$ ve accipiantur) in 2 species: 1mo in tales, quorum quivis < 1 ; 2do in tales quorum quivis > 1 , (nempe factores quotvis unitati aequales non mutant factum).

Lege factorum data, poterunt plures in unum mutari, et si (praeter numerum certum factorum reliquorum) factores, quorum numerus dabili quovis major est, ad 1mam speciem pertineant: erit, si innumerabiles ejusmodi factores inter eos dentur, quorum quivis certa eadem fractione vera minor est; factum ex iis ~ 0 , adeoque etiam factum ex his et ceteris qui numero finito sunt, ~ 0 .

Si factores ii, quorum numerus dabili quovis major est, ad 2dam speciem pertineant: tum si inter eos innumerabiles dentur tales, quorum quivis $> 1 + \beta$ (per β quantitatem $\mp$ etsi < 1 sit intelligendo eandem pro omnibus); erit factum $\sim \infty$.

At si factores 1mae speciei innumerabiles sint quorum quivis est $> \frac{1}{3}$; atque ab aliquo a eorundem incipiendo sequentes $b, c \dots$ crescant tendendo ad limitem 1, erit ipsorum $a', b' \dots$ quilibet $< \frac{2}{3}$, si $1 - a$ dicatur a' , $1 - b$ dicatur b' &c

Est autem $\log a = \log [1 - (1 - a)] = \log (1 - a')$
 $= -a' - \frac{a'^2}{2} - \frac{a'^3}{3} \dots$ (per 162), ita $\log b = -b' -$

$\frac{b'^2}{2} - \frac{b'^3}{3} - \dots$ & c atque primus terminus cujusvis
 harum serierum est $>$ summa sequentium; nam
 $\frac{a'^2}{2} + \frac{a'^3}{3} - \dots < \frac{a'^2}{2(1-a')}$; quia exponens seriei pri-
 mus est $\frac{2a'}{3}$, sequens est $\frac{3a'}{4}$ et ita porro; est
 nempe ubivis exponens $< a'$, adeoque summa seri-
 ei vera minor, quam si exponens ubique a' esset.
 Est autem $a' > \frac{a'^2}{2(1-a')}$ quum $a' < \frac{2}{3}$ sit; nam divi-
 dendo per a' , est $1 > \frac{a'}{2(1-a')}$, et substituendo $\frac{2-\omega}{3}$
 ipsi a' , (pro $\omega < \frac{2}{3}$) est $1 > \frac{2-\omega}{3} : \frac{2(3-2+\omega)}{3}$;
 nempe $1 > \frac{2-\omega}{2+2\omega}$.

Unde quum termini omnes $-vi$ sint, nonni-
 si de $a' + b' + c' - \dots$ quaestio fit; atque si hoc $\sim$
 ∞ , tum $ABC - \dots abc - \dots \sim e^{-\infty}$, adeoque
 ~ 0 ; si vero $a' + b' + c' - \dots \sim \alpha$ finitum quoddam,
 $abc - \dots \sim e^{-\alpha}$, et $ABC - \dots abc - \dots \sim P e^{-\alpha}$ finitum
 quoddam, si factum e reliquis factoribus quorum,
 numerus certus est, P dicatur; signum facti au-
 tem e signis factorum liquet.

Si vero factores innumerabiles speciei 2dae sint,
 quorum quilibet est $< 1 + \frac{2}{3}$, atque a certo a eo-
 rum incipiendo sequentes $b, c - \dots$ decrescendo ten-
 dunt ad limitem 1; et $a-1$ dicatur a' , $b-1$ dica-
 tur b' & c; erit $\log a = \log [1 + (a-1)] = \log (1 + a') =$
 $a' - \frac{a'^2}{2} + \frac{a'^3}{3} - \dots$; ita $\log b = b' - \frac{b'^2}{2} + \frac{b'^3}{3} - \dots$ & c;
 eritque (ut prius) et hic cujusvis seriei primus
 major quam summa sequentium, etsi omnes $\pm vi$

essent; est autem $a' + b' - - - \text{Ivum}$, atque si $a' + b' - - \sim \alpha$; tum pro α finito, $abc - - -$ tendit ad e elevatum ad Ivum aliquod; nam etsi omnes sequentes termini $-vi$ essent, summa eorum ab $a' + b' + c' - -$ superaretur. Si vero $a' + b' + c' - - - \sim \infty$, tum $abc - -$ quoque fit omni dabili majus; nam terminus 2dus seriei logarithmum ipsius α exprimentis, est major summa sequentium $-vorum$; et idem terminus est minor, quam $\frac{1}{3}$ tia pars prioris, nempe

$\frac{a'^4}{4(1-a'^2)}$ est $>$ summa $-vorum$ post $-\frac{a'^2}{3}$ sequentium; nam per a'^2 dividendo, est $\frac{1}{2} > \frac{(2-\omega)^2}{4.3^2} : [1 - \frac{(2-\omega)^2}{3^2}]$; quia hoc est $= \frac{(2-\omega)^2}{4.3^2 - 4(2-\omega)^2}$, ubi numerator est < 4 , et denominator > 20 . Idem de b et reliquis patet. Porro quum $a' < \frac{2}{3}$, $b' < \frac{2}{3}$

$\&c - -$; est $\frac{a'^2}{2} < \frac{2a'}{3.2}$, $\frac{b'}{2} < \frac{2b'}{3.2}$ $\&c - -$; itaque

$\frac{a'^2}{2} + \frac{b'^2}{2} + \frac{c'^2}{2} - - - < \frac{2}{3.2} (a' + b' + c' - -)$. Unde quum

summa omnis $-vi$ sit $< \frac{2(a'^2 + b'^2 + c'^2 - - -)}{2}$,

et hoc sit $< \frac{1}{3} (a' + b' + c' - - -)$; manebit additis

seriebus omnibus, majus Ivum , quam $\frac{2}{3} (a' + b' + c' - - -)$. Consequ. si $a' + b' + c' - - - \sim \infty$, etiam $abc - - - \sim \infty$, adeoque et $ABC - - - abc - - \sim \infty$.

5to. Aplicando hoc ad theorema binomiale (140), posito $a=1$; erit $(k)_x = (1+x)^\mu = (k)_0 + \text{I} (k)_0 + \frac{x^2}{2} \text{I}^2 (k)_0 - - - + \frac{x^\nu}{2.3 - - -} \text{I}^\nu (k)_0 = 1 + x\mu + x^2 \frac{\mu(\mu-1)}{2}$

$$+ \dots \frac{x^\nu \mu(\mu-1)}{2} \cdot \frac{(\mu-2)}{3} \dots \frac{(\mu-\nu+1)(1+x)^{\mu-\nu}}{\nu}$$

et ultimus terminus complementum est; nempe in nullis terminis potentiae ipsius 1 sunt adscriptae, quamvis proprie $J(k)x$ fuisset $\mu(1+x)^{\mu-1}$, adeoque $J(k)o = \mu(1+o)^{\mu-1}$. Erit autem complementum istud pro quovis μ sive $\pm v_0$ sive $-v_0$, si $x < 1$ fuerit, semper tale, ut $\sim o$, si $\nu \sim \infty$; uti superius demonstratum est: at applicetur ad $x = \pm 1$; unde applicatio ad alios casus patet.

Sit $\mu = vum$ et > 1 ; erit coefficientis p ti formula $\frac{\mu'}{1} \cdot \frac{\mu'+1}{2} \dots \frac{\mu'+p-1}{p}$, (si factores $\pm v_e$ accipiantur, et $\mu' = -\mu$ sit); ubi factor quilibet est > 1 , nam $\mu' > 1$, at $\frac{\mu'+p-1}{p} - 1 = \frac{\mu'-1}{p} \sim o$. Sit $\frac{\mu'+p-1}{p}$ id quod a dictum erat, erit $b = \frac{\mu'+p}{p+1}$, et $c = \frac{\mu'+p+1}{p+2} \mathcal{E}^c$; atque $a' = \frac{\mu'-1}{p}$, $b' = \frac{\mu'-1}{p+1}$, $c' = \frac{\mu'-1}{p+1} \mathcal{E}^c$; atque $a' + b' + c' = (\mu'-1) \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} \dots \right)$, quod $\sim \infty$, quum $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots \sim \infty$ (153).

Itaque quum potentia ipsius x in hoc casu neque augeat neque minuat; complementum continebitur inter quantitatem omni dabili majorem per $(1+o)^{\mu-\nu} = 1$ multiplicatam, atque eandem per $(1+1)^{\mu-\nu}$ (quod omni dabili minus fieri potest), multiplicatam.

Aliud est, si $x < 1$ sit, tunc enim (144) p ita accipi potest, ut quum totidem factores x sint, $\frac{x(\mu'+p-1)}{p}$ sit < 1 ; atque postea quilibet factor

certa eadem fractione vera minor maneat. Nempe pro $\mu = \infty$, est formula pti factoris $\frac{x(\mu'-1+p)}{p} = \frac{x(\mu'-1)}{p} + x$, ubi patet quod

$\frac{x(\mu'-1)}{p}$ decreascit crescente p , (sive $\mu' > 1$ sive $\mu' < 1$ sit), et ~ 0 , si $p \sim \infty$; unde factor $\sim x$; est autem $\mu'-1$ $\mp$ pro $\mu' > 1$ adeoque factor decreascit, tendendo ad limitem x . Si itaque fractio vera $f = x + \lambda$, et $\frac{x(\mu'-1)}{p} < \lambda$ fiat, erit in posterum quivis factor $< f$, consequ. factum ~ 0 .

At si $x > 1$, ex gr. $x = \frac{k}{h}$ pro $k > h$, ut (p. 252) dictum est, incrementa semper crescent: nam juxta literas ejusdem paginae, erit $1 + \frac{(e-n)k}{(n+1)h}$
 $> 1 + \frac{(e-n-2)k}{(n+3)h}$, et quidem (ex gr. pro k, h $\mp$ vis) prius erit minus ∞ pro e $\mp$, vel $e =$ et < 1 , et certo dato semper minus pro $e =$ et > 1 ; (pro $e = -1$ exceptio est, ubi semper constans $= 1 - \frac{k}{h}$ manet). Reducendo nempe ad denom. eandem, fit numerator prioris $(n+1)(n+3)h^2 + (e-n)(n+3)kh$, posterioris autem fit $(n+1)(n+3)h^2 + (n+1)(e-n-2)kh$; unde deletis aequalibus, manet pro priore, $2kh(e-n)$ et $-2kh(n+1)$ pro posteriore, quod utrumque $=$ est; nempe n $\mp$ est, ita k, h modo $\mp$ va sunt, (et facile pro $k = \infty$ mutanda mutantur), $e-n$ vero $=$ est pro $e = \infty$, si vero e $\mp$ sit, poterit n ita accipi, ut $e-n =$ sit. Est autem $e-n$ semper $< n+1$, si e $\mp$, aut $=$ et < 1 sit. Consequ pro hoc casu $2kh(e-n)$ est $< -2kh(n+1)$.

Si vero $e =$ et > 1 fuerit; tum $\frac{e-n}{n+1}$ est > 1 et

decrescit (143), ac ~ -1 . Sit $\mp \omega$ utvis par-
vum, pro $\frac{e-n}{n+1} = -(1+\omega)$; nempe si $n = \frac{e+1+\omega}{-\omega}$

esset, substituendo patet fieri $\frac{e-n}{n+1} = -(1+\omega)$;

poterit autem pro $e = 0$ et >1 , tam parvum acci-
pi ω , ut $e+1+\omega =$ adeoque $\frac{e+1+\omega}{-\omega} \mp$ sit, ut vr

lor ipsius n $\mp$ ve prodeat; atque quivis integer
 $\mp$ vus valore isto major, valorem ipsius ω mino-
rem dabit, quum $\frac{e-n}{n+1}$ decrescat et ~ -1 .

Est autem $1-(1+\omega) \frac{h}{h} = \frac{h-h}{h} = -\frac{\omega h}{h}$; ubi

$h < h$, adeoque $h-h =$ est, $e^{\frac{\omega h}{h}}$ dabili quovis mi-
nus fieri potest, atque in termino sequente fit mi-
nus; et $\frac{h-h}{h}$ est quovis termino sequente minus.

6to. At pro $x=1$, si e' (denotans oppositum
ipsius e) sit <1 ; erit formula pti factoris $\frac{(e'-1+p)}{p}$

$= 1 + \frac{e'-1}{p}$; ubi $\frac{e'-1}{p} \sim 0$ (dum $p \sim \infty$),

adeoque factor ~ 1 , sed est semper <1 , quia
 $e'-1 =$ est, fit autem $\frac{e'-1}{p}$ crescente p minus,

adeoque factor major; et superius $a'+b'+c' \dots$ pro
hoc casu erit $= \frac{1-e'}{p} + \frac{1-e'}{p+1} + \frac{1-e'}{p+2} \dots =$

$(1-e') \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} \dots \right)$, quod $\sim \infty$; con-

sequ. pro hoc casu factum ~ 0 . (297)

Itaque complementum seriei ipsius $(1+1)^k$ le-
ge binomiali evolutae continebitur iater factum di

ctum, (quantitatem quae omni dabili minor reddi potest) per $(1+1)^{e-n}$ (quae item dabili quovis minor fit) multiplicatum, et idem factum dictum per $(1+0)$ multiplicatum.

Idem patet de $e \mp vo$, sive > 1 sive $= 1$ sive < 1 sit; nempe formula factoris p ti est $\frac{e+1-p}{p}$
 $= \frac{e+1}{p} - 1$, quod $\mp ve$ accipiendo fit $1 - \frac{e+1}{p}$; et factum (ut prius) ~ 0 .

7mo. Quod vero series ipsius $(1+1)^e$ pro $e =$ et > 1 diverga; subsidio criterii elegantis, seriei convergentis recentius ab *Oliviero* detecti (nuper mihi communicati) facile patet: nempe si u_n sit terminus generalis seriei, cujus omnes termini $\mp vi$ vel omnes $= vi$ sint, atque $n.u_n \sim 0$ dum $n \sim \infty$, tum series convergit, et si prius non est, series divergit, (pro terminis decrescentibus).

Construatur series accipiendo summas parium oppositorum se invicem excipientium; nempe in $(1+1)^e$ pro $e = vo$ evolutae, erit terminus primus 1, sequens erit $=$, et tum $\mp$, item $=$, $\mp$ &c. summa primi $= vi$ et sequentis $\mp vi$, ac summa sequentis $= vi$ et $\mp vi$, et ita porro dabunt seriem, cujus terminus quivis $\frac{n+2}{2}$ tus exprimi per

$$\frac{(e+1)e(e-1) \dots (e-n)}{2 \cdot 3 \dots (n+1)} \frac{(e-n)}{(n+2)} \text{ poterit; nam}$$

$$2 \text{ termini proximi per } \frac{e(e-1) \dots (e-n)}{2 \cdot 3 \dots (n+1)} \text{ et}$$

$$\frac{e(e-1) \dots (e-n)(e-n-1)}{2 \cdot 3 \dots (n+1)(n+2)} \text{ exprimi possunt; et}$$

$$\text{horum summa est } = \frac{e(e-1) \dots (e-n)(n+2+e-n-1)}{2 \cdot 3 \dots (n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{e(e-1) \dots (e-n)(e+1)}{2.3 \dots (n+1)(n+2)}; \text{erit autem terminus}$$

iste novae seriei $\frac{n+2}{2}$ tus; et substituendo $\frac{n+2}{2}$ ipsi

n in $n.u_n$ et valorem dictum ipsius u_n ; erit

$$\frac{(e+1)(n+2)}{2(n+2)} \cdot \frac{e(e-1) \dots (e-n)}{2.3 \dots (n+1)} = n.u_n; \text{quod}$$

$\sim \infty$, quia $\frac{(e+1)}{2}$ est constans, $\frac{n+2}{n+2} = 1$, et

$$\frac{e(e-1) \dots (e-n)}{2.3 \dots (n+1)} \sim \infty \text{ (p. 299).}$$

Nempe 2 terminis proximis constructis, fit exponens seriei $\frac{(e-n-1)(e-n-2)}{(n+3)(n+4)}$, qui pro $e < 2$ erit < 1 , adeoque termini decrescent. Pro $e = -2$ autem est constans, et pro $e > 2$ fit > 1 , et termini crescent.

Consequ. $(1+1)^e$ serie binomiali rite exprimitur, excepto si $e =$ et non < 1 sit, quo in casu non aliter, nisi complemento addito valet. Nimirum

8vo. Si $e = -1$ fuerit; erit $(1+1)^{-1} = \frac{1}{2}$, fietque qui-

libet factor p tus $= \frac{-1-p+1}{p} = -1$; atque com-

plementum continetur inter $\pm 1.(1+0)^{-1-n} = \pm 1$

et $\pm 1.(1+1)^{-1-n} = \frac{\pm 1}{2^{1+n}}$, quod ~ 0 ; nempe

$(1+1)^{-1} = 1 - 1 + (\text{compl. inter } 1(1+0)^{-1-2} \text{ et}$

$1(1+1)^{-3}$, nempe inter 1 et $\frac{1}{2^3}$); ita $(1+1)^{-2} = 1$

$- 1 + 1 + (\text{compl. inter } -1, \text{ et } \frac{-1}{2^4})$. Quod igitur

nullius valoris est.

9no. Superius (pag. 212) in $(1+x)^{-1}$, $x < 1$ ponendum est; si ex gr. $x-1=\omega$, pro ω $\times$ vo utvis parvo valebit formula, atque integrale erit

$1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$; at si $\omega \sim 0$, $\frac{(1-\omega)^3}{1} \sim 1$,
 $\frac{(1-\omega)^5}{1} \sim 1$ &c...; consequ. (p. 154) dum

$\omega \sim 0$, adeoque $x \sim 1$, tum $1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$

atque $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$ simul cum arcu ipsi x ibidem respondente ad limitem communem tendunt.

Nempe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \dots = 2(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} - \dots)$; et seriei parenthesi inclusae ter-

minus n us per $\frac{1}{(4n-3)(4n-1)}$ exprimi potest;

nimirum quivis denominator est factum e duobus imparibus, quorum prior est numerus impar $(2n-1)$ us, cujus valor est $4n-3$. Per criterium seriei convergentis *Olivierianum* autem,

$\frac{n}{(4n-3)(4n-1)} \sim 0$. Consequ. series dicta convergit.

10mo. Quod $(1-1)^e$ attinet; non pro $e \mp vo$ solum valet formula binomialis, sed certo sensu etiam pro $e = vo$ valet, e sive $<$ sive $=$ sive $>$ 1 sit; nempe pro $e = vo$, est $(1-1)^e = \frac{1}{0e'}$ (pro

$e' = -e$), quod $= \infty$; nempe (pro $x \mp vo$), $\frac{1}{(1-x)^{e'}}$

$\sim \infty$ dum $x \sim 1$; fietque etiam $(1-1)^e$ serie binomiali expressum omni dabili majus, ut statim patebit.

Est nimirum pro $e \mp vo$, $(1-1)^{e'} = 0^e = 0 = 1 - e + \frac{e(e-1)}{2} - \dots + \frac{e(e-1) \dots (e-n+1)}{2.3 \dots n}$ addito

complemento, quod est inter $\frac{e(e-1) \dots (e-n)}{2.3 \dots (n+1)}$

$(1+0)^{e-n}$ et $\frac{e(e-1) \dots (e-n)}{2.3 \dots (n+1)} [(1-1)^{e-n} = \frac{1}{0^{n-e}}]$

adeoque inter quantitatem, quae quovis dabili minor fit, atque eandem per ∞ multiplicatam. Atque hujus complementi fines inter quos continentur semper amplius removentur, quamvis series convergat, et complementum ~ 0 : interim tamen complementum inter fines illos continetur hic quoque, etsi ad illud aestimandum nihil valeat, possitque aliter facile aestimari.

Quod autem $(1-1)^e$ per seriem binomiale m rite exprimatur pro $e \nmid \text{vo.}$, patet sic: $(1-x)^e$ pro $x < 1$ rite exprimitur; si $x \sim 1$, tum et x^2 , $x^3 \dots \sim 1$; itaque et $\frac{-ex}{-e} \sim 1$,

$\frac{e(e-1)x^2}{2} : \frac{e(e-1)}{2} \sim 1$, atque quivis terminus

seriei ipsius $(1-x)^e$ per ei respondentem terminum seriei ipsius $(1-1)^e$ divisus ~ 1 ; si igitur demonstretur seriem ipsius $(1-1)^e$ convergere; constabit (per 154) seriem ipsius $(1-x)^e$ et seriem ipsius $(1-1)^e$ ad limitem eundem tendere, dum $x \sim 1$; nempe series ipsius $(1-1)^e$

~ 0 , quia $(1-x)^e \sim 0$, dum $x \sim 1$. Convergit autem series ipsius $(1-1)^e$. Nam (142) signa eousque alternant, donec ex e ipso majus subtrahatur, atque postea omnes termini simul $\nmid \text{vi}$ aut simul $\vdash \text{vi}$ fiunt; fiat hoc ad terminum ntum ab $\frac{e-1}{2}$ incipiendo; summa eousque finita est,

adeoque abinde tantum quaestio fit, et responsio (per 302) facilis est; namque termini seriei abinde decrescent, quia ubi subtractione ex e prima

vice prodit fractio vera $\neq$ va, etsi id per quod dividitur, 1 esset, quotus < 1 esset; atque in posterum exponens coefficientium, quum numeratori denominatorique idem addatur, < 1 manet; terminus

$(n-m)$ us autem hujus seriei erit $\frac{e(e-1) - \dots - (e-n)}{2.3 - \dots - n(n+1)}$

quod per $n-m$ multiplicando, fit

$\frac{n-m}{n+1} \cdot \frac{e(e-1) - \dots - (e-n)}{1.2.3 - \dots - n}$; ubi $\frac{n-m}{n+1} \sim 1$,

atque factor alter discerpi in 2 factores potest, quorum posterior ~ 0 , prior vero finitus est, acceptus tam in numeratore quam in denominatore

eousque donec ex e subtrahatur $i > \frac{e}{2}$, nam

tunc $\frac{e-i}{i} < 1$ erit; sit enim $i = \frac{e+\omega}{2}$, erit $\frac{e-i}{i}$

$= \frac{2e-e-\omega}{2} = \frac{e-\omega}{2} = \frac{e-\omega}{e+\omega}$; unde pro quovis $\times$ vo l

erit $\frac{e-i-l}{i+l} < 1$; si vero $e < 1$, tum jam $\frac{e-1}{1} < 1$

est. Atque hinc, quum $\frac{e-n}{n} < 1$ et ~ -1 ; factor

posterior ~ 0 (per 297). Consequenter totum factum ~ 0 , atque series convergit. (302)

Pro $e = \text{vo}$ (etsi < 1) est $\frac{e-1}{1} > 1$, atque hinc

$\frac{e-n}{n} > 1$; suntque termini seriei ipsius $(1-1)^e$

omnes $\times$ vi, et factum superius non ~ 0 pro $m=0$. Itaque series divergit, et summa $\sim \infty$, uti debet;

nampe $(1-1)^{\frac{-3}{2}} = 1:0 \frac{3}{2} = \infty$. Complementum

per formulam autem est inter omni dabili majus;

et idem per $\frac{1}{0^{n-}}$ multiplicatum.

$$\text{Ex gr. } (1-1)^{-1} = 1+1+1+1 \dots$$

$$(1-1)^{-2} = 1+2+3+4 \dots$$

$$(1-1)^{-3} = 1+3+6+10 \dots$$

$$(1-1)^{-4} = 1+4+10+20 \dots$$

Quod continuando, pro $(1-1)^{-m}$ arithmetica series $(m-1)$ ti ordinis (133) prodibit, $1+1+1 \dots$ serie 0 ti ordinis dicta: nempe ex $(1-1)^{-2}$ prodit series primi ordinis; et de quovis exponente $-m$ ad uno altiore concludere licet, multiplicando $(1-x)^{-m}$ per $(1-x)^{-1}$, x scribendo pro 1. Prodeant nimirum ex $(1-x)^{-m}$ termini $1+A x+B x^2+C x^3$, et ex $(1-x)^{-1}$ totidem termini $1+x+x^2+x^3$; et patet in facto coefficientem ipsius x esse $1+A$, ipsius x^2 autem $1+A+B$, et $1+A+B+C$ ipsius x^3 &c. Hinc n tus terminus seriei ord. m ti exprimitur.

11mo. Sit adhuc unum exemplum pro facto e factoribus innumerabilibus. Sint $1 \pm \frac{1}{2}, 1 \pm \frac{1}{4},$

$1 \pm \frac{1}{8} \dots$ Pro signo superiore erit $a'+b'+c' \dots$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots$, pro signo $-$ prodit idem (p.

297); utrumque ~ 1 ; itaque factum utrumque tendit ad limitem certum finitum (non 0, et prius ad majus, posterius ad minus unitate).

12mo. Ut vero dignosci possit, ad qualemnam tendat limitem $a'+b'+c' \dots$; partim comparantur termini cum terminis seriei, de qua jam constat ad quem limitem tendat, ut etiam (pag. 299) factum est: partim alia etiam (praeter superius dicta) criteria serierum convergentium divergentiumque dantur; quae quamvis nosse maxime intersit, brevitatis necessaria nonnisi supra laudatum *Olivierianum*

prouti mihi nuper communicatum est (vix praeter signa mutatum) addere permittit.

De serie tali sermo est, cujus termini omnes simul $\pm$ vi aut simul $-$ vi sunt, atque termini semper porro minores fiunt. Designentur termini per $u_*1 \ u_*2 \dots u_*r \ u_*(r+1) \ u_*(r+2) \dots u_*2r \dots$, nempe terminus n tus per u_*n ; atque $u_*(r+1) + u_*(r+2) \dots + u_*2r$ dicatur R . Si series convergens fuerit, manifesto $R \sim 0$ dum $r \sim \infty$; atque si $R \sim 0$, series convergit. Est autem $u_*2r <$ quovis praecedentium, (adeoque et quovis ad laevam usque ad u_*r inclusive, et $u_*r >$ quovis sequentium (per hyp.), (adeoque et quovis abinde ad dextram usque ad u_*2r inclusive); atque hinc $r.u_*2r < R < r.u_*r$, nempe R est summa r terminorum ab u_*r usque ad u_*2r .

Unde quum si series convergat, adeoque $R \sim 0$, atque $2R \sim 0$; tum et $2r.u_*2r$ (quod $< 2R$ est) ~ 0 ; consequ. n ponendo pro $2r$, erit $n.u_*n \sim 0$.

Conversim quoque si $n.u_*n \sim 0$; series convergit. Nam sit $n=r$; erit $r.u_*r \sim 0$, sed $r.u_*r > R$; itaque $R \sim 0$; consequenter series convergit.

Ex gr. Series $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots \sim \infty$;

nam $\frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n}$ non ~ 0 ; nempe terminus n tus u_*n est $\frac{1}{n}$ et $n.u_*n=1$.

13tio. Sit denique adhuc exemplum ad (p.294)

Denotet $(a,t)T$ arcum tangentis T (id est arcum cujus tangens T est), ita $(a,t)(T+q)$ significet arcum cujus tangens $T+q$ est, atque $(k)q$ denotet idem quod $(a,1)(T+q)$ significabat. Erit

$$(k)q = (k)0 + qd(k) + \frac{q^2}{2} d^2(k)0 \dots$$

$$+ \frac{q^3 J^3(k)o \dots + q^{v-1}}{2.3 \dots (v-1)} J^{v-1}(k)o +$$

$$\frac{q^v}{2.3 \dots v} J^v(k)u; \quad \text{ubi } u \text{ quantitatem quampiam a } o$$

usque q denotat, $(k)o$ autem $= (a,t)(T \dagger o) = (a,t)T$,
et $(k)o$ significat id quod fit si in derivata ipsius
 $(k)q$ id est in $J(a,t)(T \dagger q)$ pro q ubique o ponatur,
(quod $= J(a,t)T$, si pro T variabili posita
acciperetur derivata); eritque complementum inter
 $\frac{q^v}{2.3 \dots v} J^v(a,t)(T \dagger q)$ et $\frac{q^v}{2.3 \dots v} J^v(a,t)T$

Sit x arcus tangentis T , et $x \dagger z =$ quadranti;
accipianturque derivatae quoad $\text{tang } x$ id est $\cot z$.
Dividatur quivis arcus de quo sermo erit (nempe
 x, z ita μz) per n denoteturque $\frac{x}{n}$ per $\dot{x}$, et $\frac{z}{n}$

per $\dot{z}$, adeoque $\frac{\mu z}{n}$ per $\mu \dot{z}$.

Erit $(k)o = x$, et $J(k)o = Jx$, etc. ; atque Jx
(quoad $\cot z$) $= \sin z^2$, nempe (p. 254) est $dx =$
 $\cos x^2 d \text{ tang } x$, hoc autem est $= \sin z^2 d \cot z$,
quia $\cos x = \sin z$, et $\text{tang } x = \cot z$; $J^2 x$ autem $=$
 $2 \sin z. J \sin z$ (quoad $\cot z$ intelligendo utrumque).

Est autem $J \sin z$ (quoad $\cot z$) $= -\cos z. \sin z^2$
(p. 253) ita $J \sin z$ (quoad $\cot \mu z$) est $=$
 $-\cos \mu z. (\sin \mu z)^2$; at quoad $\cot z$ erit $= \mu \cos \mu z$
 $\sin z^2$; nam $d \sin \mu z = -\cos \mu z. (\sin \mu z)^2 d \cot \mu z$,
sed $d \cot \mu z = \frac{-\mu \dot{z}}{(\sin \mu z)^2}$ (252), et $d \cot z =$

$\frac{-\dot{z}}{\sin z^2}$, adeoque $\dot{z} \hat{=} -\sin z^2 d \cot z$; itaque

(per 197) substituendo, $\frac{-\mu \dot{z}}{(\sin \mu z)^2}$ ipsi $d \cot \mu z$,

et tum $-\sin z^2 d \cot z$ ipsi $\dot{z}$, erit
 $-\cos \mu z. (\sin \mu z)^2 d \cot \mu z \hat{=} \mu \dot{z} \cos \mu z \hat{=} 10$

$-\mu \cos \mu x . \sin x^2 d \cot x$; consequ. $\int \sin \mu x$ (quoad $\cot x$) est $= -\mu \cos \mu x \sin x^2$.

Unde jam derivatae ipsius x (quoad $\cot x$) facile reperiuntur. Nempe $\int x = \sin x^2$, et $\int^2 x = 2 \sin x \int \sin x = -2 \sin x . \cos x . \sin x^2 = -\sin x^3 . \sin 2x$, (nempe $\sin x \cos x + \sin x \cos x = \sin 2x$).

Ita $\int^3 x = -2 \sin x . \int \sin x . \sin 2x + \int \sin 2x . (-\sin x^2) = 2 \sin 2x . \cos x \sin x^3 + 2 \cos 2x . \sin x^4 = 1.2 \sin x^3 . \sin 3x$; nam $\sin 2x . \cos x + \cos 2x . \sin x = \sin 3x$.

Si vero $\int^v x = \pm 1.2 \dots (v-1) \sin x^v \sin vx$, tum $\int^{v+1} x$ (quoad $\cot x$) est $\pm 1.2 \dots v \sin x^{v+1} . \sin (v+1)x$. Nam differentiando quoad $\cot x$, erit ipsius $\int^v x$ derivata $= \int^{v+1} x$ (quoad $\cot x$) $= \pm 1.2 \dots v \sin x^{v-1} . \cos x . \sin x^2 \sin vx \mp 1.2 \dots (v-1) \sin x^v . v \cos vx . \sin x^2 = \pm 1.2 \dots v (\sin vx . \cos x + \cos vx . \sin x) \sin x^{v+1} = \pm 1.2 \dots v \sin x^{v+1} . \sin (v+1)x$, nam $\sin vx . \cos x + \cos vx . \sin x = \sin (v+1)x$.

Itaque $(k)_q = (a, t) (T + q) = (k)_o + q \int (k)_o + \frac{q^2 \int^2 (k)_o + q^3 \int^3 (k)_o \dots + \frac{q^v}{2.3 \dots v} \int^v (k)_o = (a, t) T$

$+ q \sin x^2 = \frac{1}{2} q^2 \sin x^2 . \sin 2x \dots$ addito comple-

mento, quod continetur inter

$\frac{1.2 \dots (v-1) q^v}{2.3 \dots v} \int^v (a, t) T$, et

$\frac{1.2 \dots (v-1) q^v}{2.3 \dots v} \int^v (a, t) (T + q)$.

Decrescat T , et fiat demum o , fiet $x =$ quadranti, et $\sin x = 1$, $\sin 2x = o$, $\sin 3x = -1$, $\sin 4x = o$ &c; sitque $q = 1 =$ tangenti dimidii quadrantis pro radio 1; erit $(a, t) T = o$, fietque arcus tangenti dimidii quadrantis (pro radio 1), nempe $(k)_q = (a, t) (T + q) =$ (pro hoc casu) $(a, t) (o + q)$

fiet $0 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$ (ut 303) ; atque

complementum est inter 0 et

$$\left[\frac{1.2 \dots (\nu-1) q^\nu \sin z^\nu \sin \nu z}{1.2 \dots \nu} \right], \text{ quod } \sim 0,$$

dum $\nu \sim \infty$, quum nullus sinus > 1 sit, et al-
ter factor $= \frac{1}{\nu} \sim 0$.

Unde tota peripheria est octuplum hujus
seriei, et peripheria per quartam radii (id est
per $\frac{1}{4}$) multiplicata praebet aream duplo hujus se-
riei aequalem pro radio 1.

14to. Nec silentio praeteriri potest, quomodo
Taylorianum ad plures variables applicetur; atque
inde differentiale functionis plures variables invol-
ventis, sit summa differentialium partialium quoad
singulas variables seorsim (reliquis constantibus
suppositis) acceptarum.

Considerentur prius duae tantum variables :
atque $(F)(x, y)$ dicatur (u) , et functio eadem,
si variabili x addatur ω ipso y constante posito,
dicatur (U) , atque si in $(U) = (F)(x + \omega, y)$ ipso
 x constante posito, addatur λ ipsi y , functio (U)
ita mutata dicatur (v) ; et pro x, y utroque varia-
bili, atque addito ω ipsi x , et λ ipsi y , functio
 $(F)(x + \omega, y + \lambda)$ dicatur V . Quaeritur V ex (u) ,
atque dV et $\mathcal{J}V$ quaeritur.

Est (295) $(F)(x + \omega, y)$ id est $(U) = (u) +$
 $\omega^{1,x} + \frac{\omega^2}{2.3} (u)^{2,x} + \frac{\omega^3}{2.3} (u)^{3,x} \dots$ Ita $(v) = (U) + \lambda (U)^{2,y} +$

$$-\frac{\lambda^2}{2} (U)^{2,y} + \frac{\lambda^3}{2.3} (U)^{3,y} \dots = (F)(x + \omega, y + \lambda).$$

Substituatur cuivis termino seriei posterioris,
valor e serie priore; nempe pro (U) ponatur

$(u) + \omega \begin{smallmatrix} 1,x \\ (u) \end{smallmatrix} + \frac{\omega^2}{2} \begin{smallmatrix} 2,x \\ (u) \end{smallmatrix} \dots$, pro $\lambda \begin{smallmatrix} 1,y \\ (U) \end{smallmatrix}$ venit

$\lambda \begin{smallmatrix} 1,y \\ (u) \end{smallmatrix} + \omega \begin{smallmatrix} 1,x \\ (u) \end{smallmatrix} + \frac{\omega^2}{2} \begin{smallmatrix} 2,x \\ (u) \end{smallmatrix} \dots$ pro $\frac{\lambda^2}{2} \begin{smallmatrix} 2,y \\ (U) \end{smallmatrix}$ venit $\frac{\lambda^2}{2}$

$\begin{smallmatrix} 1,x \\ (u) \end{smallmatrix} + \omega \begin{smallmatrix} 1,x \\ (u) \end{smallmatrix} + \frac{\omega^2}{2} \begin{smallmatrix} 2,x \\ (u) \end{smallmatrix} \dots$, derivatas quoad y ac-

ciendo. Unde porro continuando, si derivata
vta quoad y derivatae μ tae ipsius (u) quoad x ac-

ceptae per $\begin{smallmatrix} \nu,y \\ (u) \end{smallmatrix}$ denotetur, est
 $\begin{smallmatrix} \mu,x \end{smallmatrix}$

(F) $(x + \omega, y + \lambda) = (u) + \omega \begin{smallmatrix} 1,x \\ (u) \end{smallmatrix} + \frac{\omega^2}{2} \begin{smallmatrix} 2,x \\ (u) \end{smallmatrix} \dots$

$+ \lambda \left[\begin{smallmatrix} 1,y \\ (u) \end{smallmatrix} + \omega \begin{smallmatrix} 1,y \\ (u) \end{smallmatrix} + \frac{\omega^2}{2} \begin{smallmatrix} 1,y \\ (u) \end{smallmatrix} + \frac{\omega^3}{2.3} \begin{smallmatrix} 1,y \\ (u) \end{smallmatrix} \dots \right]$

$+ \frac{\lambda^2}{2} \left[\begin{smallmatrix} 2,y \\ (u) \end{smallmatrix} + \omega \begin{smallmatrix} 2,y \\ (u) \end{smallmatrix} + \frac{\omega^2}{2} \begin{smallmatrix} 2,y \\ (u) \end{smallmatrix} + \frac{\omega^3}{2.3} \begin{smallmatrix} 2,y \\ (u) \end{smallmatrix} \dots \right]$

$+ \frac{\lambda^3}{2.3} \left[\begin{smallmatrix} 3,y \\ (u) \end{smallmatrix} + \omega \begin{smallmatrix} 3,y \\ (u) \end{smallmatrix} + \frac{\omega^2}{2} \begin{smallmatrix} 3,y \\ (u) \end{smallmatrix} + \frac{\omega^3}{2.3} \begin{smallmatrix} 3,y \\ (u) \end{smallmatrix} \dots \right]$

- - - - -

Quibus rite ordinatis, fiet (F) $(x + \omega, y + \lambda) =$

$(u) + \omega \begin{smallmatrix} 1,x \\ (u) \end{smallmatrix} + \lambda \begin{smallmatrix} 1,y \\ (u) \end{smallmatrix} + \frac{\omega^2}{2} \begin{smallmatrix} 2,x \\ (u) \end{smallmatrix} + \frac{\lambda^2}{2} \begin{smallmatrix} 2,y \\ (u) \end{smallmatrix} + \omega \lambda \begin{smallmatrix} 1,y \\ (u) \end{smallmatrix}$
 $+ \frac{\omega^3}{2.3} \begin{smallmatrix} 3,x \\ (u) \end{smallmatrix} + \frac{\lambda^3}{2.3} \begin{smallmatrix} 3,y \\ (u) \end{smallmatrix} + \frac{\omega^2 \lambda}{2} \begin{smallmatrix} 1,y \\ (u) \end{smallmatrix} + \frac{\lambda^2 \omega}{2} \begin{smallmatrix} 2,y \\ (u) \end{smallmatrix}$
- - - - -

Nempe terminus generalis est

$\frac{\omega^\mu \lambda^\nu}{1.2 \dots \mu. 1.2 \dots \nu} \begin{smallmatrix} \nu,y \\ (u) \end{smallmatrix}$, ita ut omnes possibles ima-
 $\begin{smallmatrix} \mu,x \end{smallmatrix}$

gines literarum, inter quas nonnisi ω, λ sint, nu-

mero $\mu \mp \nu$ positarum compareant, at $\frac{\omega^\mu}{1.3 \dots \mu} (u)^{\mu, x}$

si λ desit, et si ω desit $\frac{\lambda^\nu}{1.2 \dots \nu} (u)^{\nu, y}$ ponatur.

Nimirum si ω^μ sit sine λ , tum nonnisi e linea superiore accipitur terminus, eritque

$\frac{\omega^\mu}{2.3 \dots \mu} (u)^{\mu, x}$. Si λ^ν sit sine ω , tum λ^ν extra pa-

renthesim erit in factore $\frac{\lambda^\nu}{2.3 \dots \nu}$, et factor socius

ejus, ut sine ω sit, nonnisi terminus primus ejus-

dem lineae horizontalis erit, nempe $(u)^{\nu, y}$. Si vero

$\omega^\mu \lambda^\nu$ sit; tum λ^ν nonnisi in columna verticali ex-

tra parenthesesim reperitur, in factore $\frac{\lambda^\nu}{2.3 \dots \nu}$, at-

que factor socius ejus complectens ω^μ , nonnisi in

linea horizontali eadem erit $\frac{\omega^\mu}{2.3 \dots \mu} (u)^{\nu, y}_{\mu, x}$. Evi-

denter vero quilibet terminus constat, aut e factoribus

$\frac{\omega^\mu}{1.2 \dots \mu}$ et $(u)^{\mu, x}$ aut ex $\frac{\lambda^\nu}{1.2 \dots \nu}$ et $(u)^{\nu, y}_{\mu, x}$, aut ex

$\frac{\omega^\mu}{1.2 \dots \mu} (u)^{\mu, y}_{\mu, x}$ et $\frac{\lambda^\nu}{1.2 \dots \nu}$.

Manifesto autem suppositum est, *Taylorianum* iam pro ω in serie prima, quam pro λ in serie 2da ita valere, ut complementum ~ 0 ; (alioquin autem complementum et hic exprimi posse).

Ut differentiale prodeat: substituatur — $\dot{x}$ ipsi ω , et — $\dot{y}$ ipsi λ ; nempe etsi y independens sit ab x , quam in quovis casu simul cum x et certa quan-

itate ponatur, dependentia in omni casu simultanea est (192); quapropter y dici $(p)m\dot{x}$ potest, et $\dot{y} = (p)m\dot{x} - (p)(m-1)\dot{x}$; atque $(F)(x,y) = (u)$ dici $(A)m\dot{x}$ potest. Quibus positis erit

$(A)m\dot{x} - (A)(m-1)\dot{x}$, nempe differentiale verum ipsius $(F)(x,y)$ aequale ei quod remanet, subtracta ex (u) tota serie quae ultimo prodiit, ipsi $\dot{x}$ ubique $-\dot{x}$, et $-\dot{y}$ ipsi λ prius suffecto; nempe dum in $(F)(x,y)$ ponitur $(m-1)\dot{x}$ idest $m\dot{x} - \dot{x}$, pro y ponitur $(p)(m-1)\dot{x}$, id est

$(p)m\dot{x} - [(p)m\dot{x} - (p)(m-1)\dot{x}]$, id est $y - \dot{y}$. Atque hoc pacto differentiale verum ipsius $(F)(x,y)$ erit

$$(u) - \left[(u) - \dot{x}^{1,x}(u) - \dot{y}^{1,y}(u) + \frac{\dot{x}^2}{2}^{2,x}(u) + \frac{\dot{y}^2}{2}^{2,y}(u) - \dots \right]$$

$$= \dot{x}^{1,x}(u) + \dot{y}^{1,y}(u) - \frac{\dot{x}^2}{2}^{2,x}(u) - \dots; \text{ et facile patet,}$$

quod duorum priorum terminorum summa per totum differentiale verum divisa ~ 1 (dum $n \sim \infty$); atque summa differentialium partialium quoad singulas variables, sit differentiale sensu stricto, et derivata quoque sit summa derivatarum quoad singulas variables acceptarum.

Unde de duabus variabilibus ad 3tiam z , et semper porro ad una plures progredi licet: nempe $(F)(x,y)$ dicatur X , et $(F)(x,y,z)$ dicatur $(f)(X,z)$; erit $d(f)(X,z) = d(f)(X,z)$ (quoad X) $+ d(f)(X,z)$ (quoad z); sed $d(f)(X,z)$ (quoad X) $= d(F)(x,y,z)$, si differentiale ita accipiatur, ut z constans supponatur; et $d(f)(X,z)$ (quoad z), $= d(F)(x,y,z)$ pro x,y constantibus positis. Est autem $d(f)(X,z)$ (pro z constante) differentiale functionis duarum variabilium x,y ; quod igitur summa differentialium functionis $(F)(x,y,z)$ quoad x et y seorsim acceptarum est, cui accedit etiam differentiale functionis ejusdem quoad z acceptum.

De lege generali, qua functio quotvis variabilium evolvitur; videatur *La Grange Theorie des fonctions* 1813. p. 130.

Exemplo tamen facili evolutionem functionis duarum variabilium illustrare libet.

Sit $(F)(x, y) = a + bxy$; erit $(F)(x + \omega, y + \lambda) = a + b(x + \omega)(y + \lambda) = a + bxy + b\omega y + b\lambda x + b\omega\lambda$; quod si $-\dot{x}$ substituatur ipsi ω , et $-\dot{y}$ ipsi λ , fit $= a + bxy - \dot{x}by - \dot{y}b\dot{x} + \dot{x}\dot{y}b$; et hoc si ex $a + bxy$ subtrahatur, differentia est $\dot{x}by + \dot{y}bx - \dot{x}\dot{y}b$, quod $\equiv \dot{x}by + \dot{y}bx$. Prodit etiam manifesto idem, sive ipsis x, y simul substituatur $x + \omega, y + \lambda$, sive prius tantum ipsi x substituatur $x + \omega$, et tum in hoc substituatur $y + \lambda$ ipsi y ; nam si tantum ipsi x substituatur $x + \omega$ manente y sine addito λ ; functio non nisi in eo differet ab $(F)(x + \omega, y + \lambda)$, quod pro $y + \lambda$ solum y sit; quod si addatur, nihil differet.

X. Superius (281) mentio maximi minimique fuit; nec superfluum est Theorematis Tayloriani applicationes quasdam, ad casus saltem simpliciores ostendere.

Imo. Si functio $(F)x$ talis sit, ut pro $x = \alpha$ et ω dabili quovis minore, sit $(F)(x \pm \omega) < (F)x$, aut sit $> (F)x$; tum $(F)\alpha$ in casu priore *maximum* in posteriore *minimum* est.

$$\text{Nimirum } (F)(\alpha + \omega) = (F)\alpha + \omega \downarrow (F)\alpha + \frac{\omega^2 \downarrow^2 (F)\alpha}{2} - \dots$$

$$\text{et } (F)(\alpha - \omega) = (F)\alpha - \omega \downarrow (F)\alpha + \frac{\omega^2 \downarrow^2 (F)\alpha}{2} - \dots$$

ubi pro $\omega \rightsquigarrow 0$, quivis terminus fit major summa sequentium, (si is non sit $= 0$, nec ullus fiat ∞). Hinc in omni tali casu, $\downarrow(F)\alpha$ pro $x = \alpha$, (pro casu maximi vel minimi) necessario $= 0$ esse debet: quum series superior ostendat pro $+\omega$ incrementum $+\omega \downarrow (F)\alpha$, inferior autem $-\omega \downarrow (F)\alpha$, et terminus uterque major summa sequentium fiat, dum $\omega \rightsquigarrow 0$; adeoque si ex gr. tam ω quam $(F)\alpha \nrightarrow$

sit, et pro $\alpha + \omega$ incrementum ipsius $(F)\alpha$, quantumvis exiguum, sit pro $\omega \sim 0$, $\mp$ vum, pro $\alpha - \omega$ erit $-$ vum; si $\omega =$ sit, erit prius incrementum $-$ vum, posterius $\mp$ vum.

At conversim si $\mathcal{J}(F)x$ (pro $x=\alpha$) sit $=0$, non sequitur maximum vel minimum esse: potest enim etiam terminus sequens $=0$ esse, imo etiam postea sequentes usque ad μ tam derivatam; suntque termini pro paribus potentiis ipsius ω in utraque serie aequales, pro imparibus quilibet terminus est ei respondentis oppositus; itaque possunt si μ numerus par sit, derivatae eousque singulae $=0$ sine maximo vel minimo esse, quum in serie superiore sequens terminus (major summa sequentium) oppositus termini illius sit qui in serie inferiore ei respondet. Unde pro statu maximi vel minimi, derivatas omnes usque ad μ tam pro μ impari, singulas $=0$ esse debere patet, et quidem ut sequens derivata non 0 sit; $-$ va dat maximum, $\mp$ va minimum.

Num vero maximum vel minimum sit; substituendo ω utvis parvum tentari etiam potest, eruto prius valore ipsius α ex $\mathcal{J}(F)x=0$ posito: imo ut supra dictum est, quum etiam pro $\mathcal{J}(F)x = \infty$, maximum vel minimum fieri possit, etiam ex

$$\mathcal{J}(F)x = \infty = \frac{1}{0}, \text{ id est } \frac{1}{\mathcal{J}(F)x} = 0 \text{ quaeri } \alpha \text{ po-}$$

test; quamvis (ut plane monitum est) conversim non sequatur maximum vel minimum esse.

2do. EXEMPLA FACILIORA.

1 Dividatur x in 2 partes a et $x - a$ tales, ut $x(a-x)$ maximum sit: ponatur $\mathcal{J}[x(a-x)] = 0$; erit $\mathcal{J}(ax - x^2) = a - 2x = 0$, et hinc $a = 2x$, et

$$a = \frac{x}{2}.$$

2. Sit in dimidium circulum, maximum rectangulum inscribendum. Erit area (Fig 49) rectan-

guli $= 2x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, et hujus derivata $2(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 0$; et hinc $r^2 - x^2 = x^2$; atque $r^2 = 2x^2$, et $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

3. Sit recta a in 3 ejusmodi partes b , x et $a - b - x$ dividenda, ut Δ ex iis fiat maximum. Planimetria docet esse aream Δ li $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, si a, b, c latera Δ li sint, et $s = \frac{1}{2}$ perimetro sit. Itaque pro $s = \frac{a}{2}$, erit

$$\text{area} = \left[\frac{a}{2} \left(\frac{a}{2} - b \right) \left(\frac{a}{2} - x \right) \left(\frac{a}{2} - (a - b - x) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ = \frac{1}{4} a^2 (\alpha - 2b)^{\frac{1}{2}} (\alpha - 2x)^{\frac{1}{2}} (2b + 2x - \alpha)^{\frac{1}{2}}; \text{cujus de-}$$

rivata (si constans omittatur, utpote quae ad maximum minimumve nihil confert, quum usque ad finem maneat, et demum aequatio per eam divi-

$$\text{datur) erit } -(\alpha - 2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2b + 2x - \alpha)^{\frac{1}{2}} + \\ (\alpha - 2x)^{\frac{1}{2}} \cdot (2b + 2x - \alpha)^{-\frac{1}{2}} = 0; \text{ et per } (\alpha - 2x)^{\frac{1}{2}}$$

$(2b + 2x - \alpha)^{\frac{1}{2}}$ multiplicando, fit $2b + 2x - \alpha = \alpha - 2x$;

et hinc $4x = 2\alpha - 2b$, atque $x = \frac{\alpha - b}{2}$. Nempe Δ

pro arca maxima aequicrurum erit. Maximum esse patet, quum derivata 2da = sit.

4. Si Δ li aequicruri (Fig 50)* basis z quae-

ratur pro area maxima: sit a summa laterum; erit

$$y = \left(x^2 - \frac{1}{4} z^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ et } x = \frac{a - z}{2}, \text{ atque area} = \\ \frac{1}{2} z \left(x^2 - \frac{1}{4} z^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} z \left[\frac{1}{4} (a - z)^2 - \frac{1}{4} z^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$= -\frac{1}{4} z [(a-z)^2 - z^2]^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} z (a^2 - 2az)^{\frac{1}{2}}; \text{cujus}$$

derivata (factore $\frac{1}{4}$ constante omissa) est =

$$(a^2 - 2az)^{\frac{1}{2}} - az (a^2 - 2az)^{-\frac{1}{2}}, \text{quo} = 0 \text{ posito, mul-}$$

tiplicando per $(a^2 - 2az)^{\frac{1}{2}}$, fit $a^2 - 2az - az = 0$,

et hinc $a - 3z = 0$, atque $z = \frac{a}{3}$; nempe pro a.

rea maxima $\triangle$ li aequicruri, $\triangle$ aequilaterum est.

3tio. Interim (ut dictum est), derivata prima ∞ esse potest, statu maximi vel minimi per id haud sublato: est nempe id momentaneum, pro certo puncto ipsius x , intra et ultra quod terminato x illico derivata finita fiet. Ex gr. (p. 281)

erat pro $b \pm x^{\frac{2}{3}} = y$, derivata ∞ ta pro $x = 0$, et simul maximum pro signo $-$, minimum pro $+$. At hic quoque valor ipsius x , pro quo hoc fit, reperitur modo sequente; $Jy = \pm \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \pm \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$,

quod $= 0$ esse nequit; at si ponatur

$$1 : \pm \frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} = \pm \frac{\frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}}}{1} = 0; \text{prodibit } x = 0 \text{ pro}$$

hac aequatione, (et derivata $= \infty$); atque quum neque ex $J = 0$, nec ex $J = \infty$ sequatur maximum vel minimum esse, tentari potest, num pro illo valore ipsius x ita sit, et si fuerit, quodnam sit.

Vix monendum est, maxima aut minima pro pluribus etiam valoribus ipsius x dari posse, uti etiam maximorum vel minimorum maximum vel minimum posse in certis casibus dari.

XI. Sit fas applicationem *Tayloriani* etiam ad varios tactus ordines, et *radius curvaturae*, e

quo etiam conceptus *evolutoe* et *evolventis* nascitur, breviter addere.

1mo. Lineam l dicitur tactus ordine μ to tangere linea L , si ordinata Y ipsius L sit $= (F)x$, et ordinata y ipsius l sit $= (f)x$; atque pro $\alpha = x$ sit $(F)\alpha = (f)\alpha$, $J(F)\alpha = J(f)\alpha$, $J^2(F)\alpha = J^2(f)\alpha$ &c usque ad $J^\mu(F)\alpha = J^\mu(f)\alpha$; et $J^{\mu+1}(F)\alpha$ non sit $= J^{\mu+1}(f)\alpha$.

Patebit rectam nonnisi ordine tactus primo tangere; circulum vero dari, qui ordine tactus primo, dari qui etiam 2do tactus ordine tangat curvam; nec inter hunc et curvam e puncto tactus ullum alium circulum duci posse, (uti nulla recta inter tangentem et curvam duci potest). Radius illius circuli vocatur *radius osculi* vel *curvature*, et *circulus* ipse *osculator* audit; nempe quum de quantitate curvedinis ad aliquod punctum p sermo est, circulus iste intelligitur.

2do. Ponatur tam in $(F)\alpha$, quam in $(f)\alpha$, $\alpha + \dot{x}$ pro α ; erit $(F)(\alpha + \dot{x}) = (F)\alpha + \dot{x}J(F)\alpha + \frac{\dot{x}^2}{2}J^2(F)\alpha + \frac{\dot{x}^3}{2.3}J^3(F)\alpha \dots$; et $(f)(\alpha + \dot{x}) =$

$(f)\alpha + \dot{x}J(f)\alpha + \frac{\dot{x}^2}{2}J^2(f)\alpha + \frac{\dot{x}^3}{2.3}J^3(f)\alpha \dots$. Sitque li-

nea 3tia λ , cujus ordinata $u = (k)x$, et sit $(F)x = (f)x = (k)x$ (pro $x = \alpha$), atque $J(F)x = J(f)x$, sed non $= J(k)x$, sintque $(F)x$, $(f)x$, $(k)x$ $\mp$ va; et dicatur terminorum (seriei ipsius $(f)(x + \dot{x})$ per *Taylorianum* evolutoe) post $J(f)x$ sequentium summa S , et terminorum (seriei ipsius $(k)(x + \dot{x})$ item per *Taylorianum* evolutoe) post $J(k)x$ sequentium dicatur s ; ac brevitatis gratia $\dot{x}J(f)x$ dicatur J , et $\dot{x}J(k)x$ dicatur J' .

Erit J , J' aut utrumque $\mp$, aut utrumque $-$, aut unum $\mp$, alterum $-$.

1. Sit prius utrumque $\mp$, et pro ω $\mp$ vo sit $J = J' + \omega$. Pro $\mp N > 1$ utvis magno poterit $\dot{x}$ tam par-

vum accipi, ut $S < \frac{J}{N}$ sit, et simul etiam $s < \frac{J'}{N}$

sit: atque tum $J+S$ et $> \frac{J-J'}{N}$; nam etsi $S =$

esset, ipso $\frac{J}{N}$ minus destrueret ex J ; item

$J'+s$ et $< \frac{J+J'}{N}$. Hinc poni $\frac{J-J'}{N} = a$, $\frac{J'+J'}{N} =$

$b+q$, $J+S=a+p$, $J'+s=b$ potest (pro a, p, b, q ,
vis); et patet $(a+p)-b > a-(b+q)$ esse (sensu p.31).

Itaque $J+S-(J'+s) > \frac{J-J'}{N} - \frac{J'+J'}{N}$; adeo-

que si probetur posterius $\frac{J-J'}{N}$ vum et non 0 esse, prius
majus $\frac{J-J'}{N}$ erit.

Est vero $\frac{J-J'}{N} - \left[\frac{J'+J'}{N} \right] = \frac{J-J'}{N} - \frac{(J+J')}{N} =$
 $\frac{\omega - (2J'+\omega)}{N} = \frac{(N-1)\omega - 2J'}{N}$, quod $\frac{J-J'}{N}$ est: nam

$\omega = \dot{x} [J(f)x - J(k)x]$, quod $= \dot{x} (h)x$ poni potest;
itaque $\frac{(N-1)\omega - 2J'}{N} = \dot{x} \left[\frac{(N-1)(h)x - 2J(k)x}{N} \right]$;

ubi in numeratore $N-1$, $(h)x$, $J(k)x$ va sunt, et
 $(N-1)(h)x > 2J(k)x$ est, simulac $(N-1) >$
 $\frac{2J(k)x}{(h)x}$ accipiatur.

Itaque in hoc casu $(f)(x+\dot{x}) > (k)(x+\dot{x})$, et
linea 3tia λ infra lineam l e puncto communi p
cursum incipit; et quum idem ad $Y=(F)x$ aplica-
tur, λ infra L et l cursum ex p incipiet.

2. Si vero J et J' utrumque $=$ sit, et $J > J'$;
pro serie ipsius $(f)(x+\dot{x})$ majus $=$ vum prodibit.
Nam si $=$ va $\frac{J-J'}{N}$ et $\frac{J'+J'}{N}$ acciperentur, majus
 $\frac{J-J'}{N}$ prodiret; atque hujus modo oppositum pro-
dure debet: itaque linea λ e puncto communi p
cursum supra lineas L et l incipit, quum eadem

(per $(F)x = (f)x$, et $J(F)x = J(f)x$) ad L applicentur.

3. Si autem unum ∇ alterum $\vdash$ sit, ex gr. $J' \vdash$ et $J \nabla$ sit: tum etsi totum $S \vdash$ esset, ipsum J destruere non poterit, itaque $J \nabla S$ necessario ∇ erit; s vero etsi totum ∇ esset, $J' \nabla s \vdash$ erit; itaque $(f)x$ ipsum ∇ vum, addito $\dot{x} J(f)x \nabla S$ nanciscetur incrementum ∇ vum, $(k)x$ autem pariter ∇ vum addito $\dot{x} J(k)x \nabla s$ imminuetur; adeoque λ cursum e puncto communi infra L et l incipit.

Idem ad reliquos casus applicari evidens est; atque simul idem etiam porro donec libuerit continuari posse: si nempe (pro $x = \alpha$) sit

$$(F)x = (f)x, \quad J(F)x = J(f)x, \quad J^2(F)x = J^2(f)x \dots$$

$$J^{\mu-1}(F)x = J^{\mu-1}(f)x, \quad J^{\mu}(F)x = J^{\mu}(f)x, \quad \text{et}$$

$$(f)x = (k)x, \quad J(f)x = J(k)x, \quad J^2(f)x = J^2(k)x \dots$$

$J^{\mu-1}(f)x = J^{\mu-1}(k)x$, sed $J^{\mu}(f)x \neq J^{\mu}(k)x$, tum linea λ per $(k)x$ generata e puncto tactus cursum aut supra L et l utramque aut infra utramque incipiet.

3tio. Sit L linea recta: poterit haec ubivis fuerit in eodem plano cum l , per $(\beta + x)b$ (pro β, b certis constantibus) exprimi, nisi L sit ad x vel ipsi parallela fuerit; pro quo casu linea abscissarum x ita mutari poterit, ut L per $(\beta + x)b$ exprimatur. Ponatur $(F)x = (f)x$, et $J(F)x = J(f)x$ (pro $x = \alpha$); erit $(\beta + \alpha)b = (f)\alpha$, et $b = J(f)\alpha$; atque quum

$$\beta b + \alpha b = (f)\alpha \text{ sit, est } \beta = \frac{(f)\alpha}{b} - \frac{\alpha b}{b} = \frac{(f)\alpha}{J(f)\alpha} - \alpha,$$

atque hinc ordinata rectae L , [quae (pro $x = \alpha$) = ordinatae y lineae l , et quarum etiam derivatae primae sunt aequales], est $= \left[\frac{(f)\alpha}{J(f)\alpha} - \alpha + x \right] J(f)\alpha$

$= (f)\alpha + (x - \alpha)J(f)\alpha$. Neque vero recta ulla alia, cujus ordinata $Y' = (\gamma + x)c$ datur, quae e fine ipsius y inter L et l duci possit: nam tum (pro $x = \alpha$)

debet $(\gamma + \alpha)c = (F)\alpha$, et $\mathcal{J}(\gamma + \alpha)c = \mathcal{J}(F)\alpha$ esse; alioquin recta nova supra vel infra L et l cursum incipiet; e dictis aequationibus autem, $\gamma = \beta$, et $c = b$, atque $Y' = Y$, adeoque recta prior L prodibit.

Ex gr. Sit $y = x^{\frac{1}{2}}$ (ut in parabola pro parametro $= 1$), erit pro $x = \alpha$ recta tangens, quae per $\beta =$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\mathcal{J}\sqrt{\alpha}} - \alpha = \alpha, \text{ et } b = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \text{ determinatur.}$$

Patet vero derivatam 2dam ipsius Y esse $= \mathcal{J}b = 0$; adeoque quum derivata 2da pro nulla linea praeter rectam, 0 sit, rectam tactus ordinis 2da incapacem esse.

4to. Sit L circulus: quicumque circulus radii r sit in eodem plano cum l , ordinata ejus poterit pro quavis abscissarum linea T , et quovis abscissarum t initio $*$, atque pro certis constantibus b et a , per $b + \sqrt{(r^2 - (t - a)^2)}$ exprimi. Sit enim diametri ipsi T parallelae distantia b a T , sitque x ordinata pro abscissis e centro in diametro acceptis; sitque ex gr. t uti (in Fig. 51) est; erit $Y = b + \sqrt{(r^2 - (t - a)^2)}$; donec vero t ab $*$ incipiendo in tantum excrescat, ut $t - a$ aliquamdiu non sit $> r$, eousque $\sqrt{(r^2 - (t - a)^2)}$ semper imaginarium est. Reliqui casus quoque patent.

At si x ponatur pro t , atque Y sit $= (F)x$, et simul $\mathcal{J}(F)x = \mathcal{J}(f)x$, atque etiam $\mathcal{J}^2(F)x = \mathcal{J}^2(f)x$ (pro certo valore α ipsius x); reperianturque ex his aequationibus r, a, b circulum illum determinantia, pro quo dicta locum habent: tum inter hunc circulum L et curvam l nullus alius circulus duci poterit. Nam sit circulus, cujus (pro $x = \alpha$) ordinata $= (k)x = (f)x = (F)x$; nisi etiam $\mathcal{J}(k)x = \mathcal{J}(f)x = \mathcal{J}(F)x$, et simul $\mathcal{J}^2(k)x = \mathcal{J}^2(f)x = \mathcal{J}^2(F)x$ sit; circulus novus aut infra lineam utramque L et l , aut supra utramque cursum e puncto communi incipiet; si vero hae aequationes locum habeant, tres con-

stantes dictae eadem prodibunt, modo statim (num. 6to) dicendo.

5to Extendi hoc ad quemvis tactus ordinem posse clarum est. Si nempe $(F)_x = (f)_x$, et derivata (pro L et l) 1ma 1mae, 2da 2dae μ ta μ tae aequales sint (pro valore certo x ipsius x); atque aequatio ipsius L contineat constantes numero $(\mu+1)$: hae e totidem aequationibus dictis determinantur; nec ulla linea inter L et l duci poterit, pro qua derivatae usque ad μ tam aequales non sunt; si vero aequales fuerint, eadem constantes (et idem L) prodibunt.

6to. Reperiuntur (in num. 4to) dicta r, a, b modo sequente.

1. Est $Y = b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2} = (f)_x = y.$

2. Hinc $\mathcal{J}y = \frac{-(x-a)}{\sqrt{r^2 - (x-a)^2}}$; et

$\mathcal{J}y^2 = \frac{(x-a)^2}{r^2 - (x-a)^2}$; et hinc valor ipsius $x-a$ reperitur; nempe $r^2 \mathcal{J}y^2 - (x-a)^2 \mathcal{J}y^2 = (x-a)^2$, adeoque $r^2 \mathcal{J}y^2 = (x-a)^2 (1 + \mathcal{J}y^2)$, et $(x-a)^2 = \frac{r^2 \mathcal{J}y^2}{1 + \mathcal{J}y^2}$, atque

$x-a = \frac{r \mathcal{J}y}{\sqrt{1 + \mathcal{J}y^2}}$, et $a = x - \frac{r \mathcal{J}y}{\sqrt{1 + \mathcal{J}y^2}}$; attamen

adhuc expressio ipsius a ipsum r involvit nondum determinatum.

3. Est porro $\mathcal{J}^2 y = -\frac{(x-a)^2}{\sqrt{r^2 - (x-a)^2}^3} -$

$\frac{1}{\sqrt{r^2 - (x-a)^2}}$; quod si ad denominatorem priorem reducatur, multiplicando posterioris tam numeratorem quam denominatorem per $r^2 - (x-a)^2$, fiet $= \frac{-(x-a)^2 - r^2 + (x-a)^2}{\sqrt{r^2 - (x-a)^2}^3} = \frac{-r^2}{\sqrt{r^2 - (x-a)^2}^3}$.

4. Erat vero (in 2) $\mathcal{J}y^2 = \frac{(x-a)^2}{r^2 - (x-a)^2}$, atque $(x-a) = \frac{r\mathcal{J}y}{\sqrt{(1+\mathcal{J}y^2)}}$; e prior est

$$\frac{x-a}{\mathcal{J}y} = \sqrt{[r^2 - (x-a)^2]}, \text{ e posteriore est } \frac{x-a}{\mathcal{J}y} = \frac{r}{\sqrt{(1+\mathcal{J}y^2)}}; \text{ itaque } \sqrt{[r^2 - (x-a)^2]} = \frac{r}{\sqrt{(1+\mathcal{J}y^2)}}.$$

5. Valore hoc ipsius $\sqrt{[r^2 - (x-a)^2]}$ in valore ipsius $\mathcal{J}^2y = \frac{-r^2}{\sqrt{[r^2 - (x-a)^2]^3}}$ (ad finem numeri 3 reperto) substituto; erit $\mathcal{J}^2y = \frac{-r^2}{\sqrt{[r^2 - (x-a)^2]^3}} = \frac{\frac{r^3}{\sqrt{(1+\mathcal{J}y^2)^3}}}{-r}$; et hinc $r = \frac{(1+\mathcal{J}y^2)^{\frac{3}{2}}}{-\mathcal{J}^2y}$; quae igitur expressio radii osculi est.

6. Constantes reliquae a, b quoque reperiuntur: nempe (in 2) erat $a = x - \frac{r\mathcal{J}y}{\sqrt{(1+\mathcal{J}y^2)}}$, atque (ex. 1) est $b = y - \sqrt{[r^2 - (x-a)^2]}$; atque hinc (in valore ipsius a substituendo valorem ipsius $\sqrt{[r^2 - (x-a)^2]} = \frac{r}{\sqrt{(1+\mathcal{J}y^2)}}$), erit $a =$

$$x - \frac{\mathcal{J}y}{\sqrt{(1+\mathcal{J}y^2)}} \cdot \frac{(1+\mathcal{J}y^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathcal{J}^2y} = x - \frac{(1+\mathcal{J}y^2)\mathcal{J}y}{\mathcal{J}^2y}; \text{ et } b = \frac{r}{\sqrt{(1+\mathcal{J}y^2)}} = y + \frac{(1+\mathcal{J}y^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1+\mathcal{J}y^2)\mathcal{J}^2y}} = y + \frac{(1+\mathcal{J}y^2)}{\mathcal{J}^2y}.$$

7^{mo}. Notandum nempe est, expressionis, quae in exponentis denominatore numerum parem habet, valorem eundem esse sive + sive - ante expressionem ponatur; nempe si dicatur $2 = -\sqrt{4}$,

est 2 alicujus valoris ipsius $\sqrt[4]{4}$ oppositum* (107).
Ita (numero 5) r potest dici $\frac{\sqrt{(1+\mathcal{J}y^2)^3}}{\mathcal{J}y^2}$.

8vo. EXEMPLA.

1. Est (Fig 42. p. 272) $y^2 = sv = \frac{y^v}{\mathcal{J}y}$; unde
subnormalis $v = y\mathcal{J}y$.

Est porro (normali N dicta) $N^2 = v(s+v) =$
 $y\mathcal{J}y(\frac{y}{\mathcal{J}y} + y\mathcal{J}y)$, et $N = y\sqrt{(1+\mathcal{J}y^2)}$; atque hoc in
valore ipsius r posito, fit

$$r = \frac{(1+\mathcal{J}y^2)^{\frac{3}{2}}}{-\mathcal{J}^2 y} = \frac{-N^3}{y^3 \mathcal{J}^2 y}.$$

Atque hinc si $y = x^{\frac{1}{2}}$ (ut in parabola pro pa-
rametro $= 1$), est radius osculi $\frac{N^3}{\frac{1}{4}}$; nam $y^3 \mathcal{J}^2 y$

$$= -\frac{1}{4}; \text{ nempe } y^3 = x^{\frac{3}{2}}, \text{ et } \mathcal{J}y = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \text{ atque } \mathcal{J}^2 y =$$

$$-\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}, \text{ et } y^3 \mathcal{J}^2 y = -\frac{1}{4} x^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}.$$

Ita ex aequatione generali sectionis conicae
cujusvis facile prodit, esse $y^3 \mathcal{J}y = -\frac{1}{4}p$ (pro pa-
rametro p); adeoque radium osculi esse $\frac{N^3}{\frac{1}{4}p}$.

2. Si (Fig 52) recta A parallela ad rectam
 B sit; et $ba = 2$, $\perp$ ris ad A sit diameter circuli; fe-
raturque b in B (prius ad laevam), simul eum cir-
culo: atque cogitetur e quovis loco b' ipsius b ac-
cipi ad laevam arcus $b'b'' = b'b$, usquequo extremi-

tas arcus accepti prima vice in A cadat ; et idem fiat ad dextram : complexus omnium extremitatum, in quibus arcus accepti desinunt, dicitur *Cyclois*, et *circulus* dictus *genitor* audit. Facile patet viam puncti rotæ per rectam devolutæ, huic approxinari

Est autem manifesto ordinata y pro abscissa v (sinuverso arcus b_*c) $= cb + x = \sqrt{(2v - v^2)} + (a, \infty)v$ [per $(a, \infty)v$ arcum cujus v sinus versus est, intelligendo]; nam $b''b \perp ba$, et $b_*c = b'_*b''$, itaque $x = b'b = b''_*b' = b_*c = (a, \infty)v$.

Estque $Jy = (2v^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}$, et $J^2y = v^{-2}(2v^{-1} - 1)^{\frac{-1}{2}}$
Nam Jy (quoad v accipiendo derivatas) $=$

$$J\sqrt{(2v - v^2)} + Jx = (1 - v)(2v - v^2)^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{\sin x}; \text{ nam}$$

$x =$ arcui, cujus v sinus versus est, et arcus x derivata quoad sinum versum est $\frac{1}{\sin x}$; hoc autem

$$\text{est} = \frac{1}{\sqrt{(2v - v^2)}} = (2v - v^2)^{\frac{-1}{2}}. \text{ Itaque } Jy \text{ (quoad}$$

$$v) \text{ est} = (1 - v)(2v - v^2)^{\frac{-1}{2}} + (2v - v^2)^{\frac{-1}{2}} =$$

$$(2v - v^2)^{\frac{-1}{2}}(1 - v + 1) = \frac{2 - v}{\sqrt{(2v - v^2)}} = \frac{(2 - v)(2v - v^2)^{\frac{1}{2}}}{2v - v^2}$$

$$= \frac{(2 - v)\left(-\frac{2}{v} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}{2 - v} = (2v^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Unde $J^2y = v^{-2}(2v^{-1} - 1)^{\frac{-1}{2}}$; atque

$$\left[r = \frac{(1 + Jy^2)^{\frac{3}{2}}}{-J^2y} \right] = \frac{(1 + 2v^{-1} - 1)^{\frac{3}{2}}}{v^{-2}(2v^{-1} - 1)^{\frac{-1}{2}}} =$$

$$\frac{2^{\frac{3}{2}} v^{-\frac{3}{2}} (2v^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}}{v^{-2}} = \frac{2^{\frac{3}{2}} \sqrt{\left(\frac{2}{v} - 1\right)}}{v^{-\frac{1}{2}}} =$$

$2^{\frac{3}{2}} \sqrt{(2-v)}$; quod pro puncto b, ubi $v=0$ est, fit $2^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^2 = 4$; nempe radius curvaturae ibidem est quadruplus radii Circuli genitoris.

Quod vero dx (quoad v) sit $= \frac{1}{\sin x}$ patet sic.

Dicatur $\dot{v}$ sin. vers. $m\dot{x}$ — sin. vers. $(m-1)\dot{x}$ (nempe differentiale verum sinus versus x); et dicatur $m\dot{x}$ (ut 250) q ; est $v = 1 - \cos q$, et $\dot{v} = 1 - \cos q - (1 - \cos(q - \dot{x})) = 1 - \cos q - (1 - \cos q \cos \dot{x} - \sin q \sin \dot{x}) = \cos q (\cos \dot{x} - 1) + \sin q \sin \dot{x}$; hoc autem per $\sin q \sin \dot{x}$ divisum ~ 1 ; nam

$\frac{\sin q \sin \dot{x}}{\cos q (\cos \dot{x} - 1)} \sim \infty$; nam $\cos \dot{x} = 1 - u \sin \dot{x}^2$ (pag

250) (denotante u quantitatem aliquam inter 0 et 1); $\cos \dot{x} - 1$ itaque $= -u \sin \dot{x}^2$; adeoque $\left(\frac{\sin q}{\cos q} =$

$\tan q\right)$ per $\frac{1}{u \sin \dot{x}}$ multiplicata $\sim \infty$; atque (251)

$\sin q \sin \dot{x}$ differentiale ipsius ($v = \sin$ vers. x) est;

nempe $\dot{v} \equiv \sin q \sin \dot{x}$; hinc autem $\sin \dot{x} \equiv \frac{\dot{v}}{\sin q}$,

et quum $\sin \dot{x} \equiv \dot{x}$, sequitur $\dot{x} \equiv \frac{\dot{v}}{\sin q}$; nempe

differentiale arcus est $\equiv$ differentiali sinus versus per sinum arcus diviso; atque derivata arcus quoad sinum versum est $= 1$ diviso per sinum arcus (omni-
no omnibus pro radio 1 intellectis).

Quum vero $r = 2^{\frac{3}{2}} \sqrt{(2-v)} = 2\sqrt{2(2-v)}$ sit; est (Fig 53) $r = 2q$ (per q cordam arcus α circuli

genitoris cycloidis dimidia bta intelligendo $\}$; nam $q^2 = 2(2-v)$, adeoque $q = \sqrt{2(2-v)}$. Si itaque ex t ducatur ad q parallela $a+b = 2q$; terminabitur hæc in cycloide a_h , cujus summum punctum a est et circulus genitor priori (adeoque et ipsa inferiori bta) aequalis est. Nam $a = q$, adeoque $b = q$; sed utrumque q (nempe cordae arcum a utriusque circuli genitoris) et $b = q$ sunt parallela: itaque et a'' est parallela et $= a'$, et $a'' + \gamma \perp$ ris ad diametrum circuli genitoris (utriusque). Est vero $a' + z' = a + z$, et quum $z = z'$, est $a' = a$. Erit igitur $\gamma + a''$ ordinata $= \gamma + a$; itaque h punctum cycloidis inferiori aequalis erit.

Est autem $a+b$ plane normalis ad punctum t .

$$\text{Nam subtangens } s = \frac{y}{dy} = \frac{z+\gamma}{\sqrt{(2v^{-1}-1)}} =$$

$$\frac{r(z+\gamma)}{\sqrt{(2v-v^2)}} = \frac{r(z+\gamma)}{\gamma}. \text{ Itaque } \gamma : v = \gamma + z : s, \text{ adeoque}$$

corda arcus bc est ad tangentem tf parallela; atque hinc quum a et q sint parallela; et Λ ad c in semicirculo rectus sit, est $a \perp tf$.

Hinc autem manifesto pro quovis arcu z circuli genitoris inferioris, normalis ordinatae respondens, radio osculi eidem respondentis aequalis facta, atque ordinata superius ipsi $\pi - z$ respondens in eodem puncto terminantur. Itaque complexus extremitatum normalium omnium cycloidis inferioris, radiis osculi respondentibus aequalium, est cyclois superior. Est igitur cycloidis *evoluta* quoque cyclois priori *evolventi* aequalis.

Nimirum si E complexus omnis puncti sit, in quo normalis aliqua formae F , radio osculi eidem normali respondentis aequalis accepta terminatur: dicitur E *evoluta* ipsius F , atque F *evolvens* ipsius E .

$$\text{Est autem (p. 273) tang } p = \frac{1}{dy} =$$

$$1 : \sqrt{(2v^{-1}-1)} = 1 : \sqrt{\frac{2-v}{v}} = \sqrt{\frac{v}{2-v}}. \text{ Si vero } z$$

in inferiore circulo genitore fiat $= \alpha$, (a b incipiendo), ut fiat V ex v; erit tangens anguli quem tangens cum ordinata facit, $= 1 : \sqrt{(2V-1)} = \sqrt{\frac{2-v}{v}}$; nam $V = 2-v$. Est vero $\sqrt{\frac{2-v}{v}}$ cotan-

gens anguli illius, cujus tangens $\sqrt{\frac{v}{2-v}}$ est; nam

$\frac{1}{\text{tang}} = \cot$ (nempe $\text{tang} = \frac{\sin}{\cos}$ et $\cot = \frac{\cos}{\sin}$). Ita-

que angulus, cujus $\sqrt{\frac{2-v}{v}}$ tangens est, angulum

priorem p ad rectum complet, adeoque est $= u$, et $a+b$ tangens cycloidis superioris est. Extendi hoc ad alias evolutas quoque potest, quum $u =$ suo alterno sit.

Ingeniose hinc *Hugenius*, (qui primus pendulum ad horologiis motum aequabiliorem conciliandum applicavit), laminam et ad dextram ipsi a*b parum posuit, ut filo de laminis cycloidalibus in tangente tenso, centrum oscillationis cycloidem describeret: quum enim demonstretur ad descensum de cycloidis atb (pro b*b verticali) puncto quovis usque ad infinium b, tempus aequale requiri; sive ad majorem sive ad minorem arcum ob inaequalitatem dentium excurrat pendulum, isochronum in theoria manet; tempus descensus autem per arcus circuli inaequales inaequale est.

Utro itaque suboritur quaestio: quomodo e data forma F, ejus evoluta E, atque ex E ejus evolvens F reperiatur. Sed hoc tantum commemorasse sufficiat.

XII. Quum superius (180) quaestio suborta fuerit: quaenam sit e functionum certarum genere, illa, cujus functio certa determinata, sub certa quapiam conditione certa quadam qualitate gaudeat: hujus etiam (*Calculi variationum* dicti) idea casibus simplicioribus exponenda est.

Sit x variabilis absoluta per x divisa : et sit $y = (k)x$ (cujus derivatae quoad x accipiantur); atque functionum sub genere certo contentarum, derivatae formula generalis sit ex gr. $Ay^a + A'y^{a'} + \dots + By^b + B'y^{b'} + \dots + Cy^c + Cy^d + C'y^{c'} + C'y^{d'} + \dots = X$; nempe sit casus, ubi in nullo termino factor alius sit, praeter potentiam aliquam ipsius y , potentiam aliquam ipsius $\mathcal{D}y$, functionem aliquam ipsius x , et constantem: quaeritur talis functio y ipsius x , quae si Y dicatur; integrale derivatae dictae, substituto Y ipsi y , maximum vel minimum sit, inter omnia derivatae hujus integralia, quae pro alio y sumerentur.

Ponatur $Y \pm \omega$ pro Y (denotante ω functionem ipsius x , quae dato quovis minor fieri possit debeatque, (et *variatio functionis* Y dicitur): prodibit pro $\mathcal{D}Y$ tum $\mathcal{D}(Y \pm \omega) = \mathcal{D}Y \pm \mathcal{D}\omega$, et pro $\mathcal{D}Y^v$ erit $(\mathcal{D}Y \pm \mathcal{D}\omega)^v$; atque pro casu integralis maximi minimive, incrementum totius derivatae, tam pro $+\omega$ quam pro $-\omega$, oportet esse aut simul $+$ vum, aut simul $-$ vum. Hoc autem aliter fieri nequit, (ut statim demonstrabitur), nisi summa coefficientium ipsius ω (in terminis ubi ω tantum ad 1 elevatur, nec derivata ejus adest) N dicta, et summa coefficientium ipsius $\mathcal{D}\omega$ (in terminis, ubi nec ω , nec derivatae ejus 1ma altiores adsunt, et $\mathcal{D}\omega$ in 1ma tantum potentia occurrit) P dicta, sit $N\omega + P\mathcal{D}\omega = 0$; N et P autem prodibunt, quum statim pateat in derivata derivatae datae esse N coefficientem ipsius $\mathcal{D}y$, et P coefficientem ipsius $\mathcal{D}^2y$ (tam $\mathcal{D}y$ quam $\mathcal{D}(\mathcal{D}y)$ quoad x accepto).

Imo tunc etiam patebit, esse $N - \mathcal{D}P = 0$ (pro statu maximi minimive: atque ex hoc et data conditione eruitur Y ; quamvis conversim non sequatur, maximum vel minimum esse, (ut supra 326) Inferius quidem brevius ostendetur, quomodo N, P ex evolutione functionis plurium variabilium Tayloriana (312) reperiantur.

Demonstrandum idcirco venit 1^{mo}. quod in derivata derivatae datae prodeat $N\mathcal{J}y + P\mathcal{J}^2y$; si pro Y ponendo $Y + \omega$, coefficientium ipsius ω summa sit N , et coefficientium ipsius $\mathcal{J}\omega$ summa sit P ; 2^{do} quod nisi $N\omega + P\mathcal{J}\omega = 0$ sit, maximum vel minimum esse nequeat. Sunt 2 variables y et $\mathcal{J}y$; et $\mathcal{J}(\mathcal{J}y)$ (quoad x) est $= \mathcal{J}^2y$; adeoque (per 242 et 249) $\mathcal{J}X =$

$$\begin{aligned} & [aAy^{a-1} + a'A'y^{a'-1} \dots] \mathcal{J}y + \\ & [bB\mathcal{J}y^{b-1} + b'B'\mathcal{J}y^{b'-1} \dots] \mathcal{J}^2y + \\ & [cCy^{c-1}\mathcal{J}y^d + c'C'y^{c'-1}\mathcal{J}y^d \dots] \mathcal{J}y + \\ & [dCy^c\mathcal{J}y^{d-1} + d'C'y^c\mathcal{J}y^{d'-1} \dots] \mathcal{J}^2y \dots \end{aligned}$$

$$\text{Unde } N = aAy^{a-1} \dots + cCy^{c-1}\mathcal{J}y^d \dots +$$

$$\text{et } P = bB\mathcal{J}y^{b-1} \dots + dCy^c\mathcal{J}y^{d-1} \dots$$

Ponatur jam $y + \omega$ pro y ; fiet functio nova, per theor. binomiale evolvenda

$$= A(y + \omega)^a + A'(y + \omega)^{a'} \dots + B(\mathcal{J}y + \mathcal{J}\omega)^b + B'(\mathcal{J}y + \mathcal{J}\omega)^{b'} \dots$$

$$+ C(y + \omega)^c (\mathcal{J}y + \mathcal{J}\omega)^d + \dots =$$

$$Ay^a + A'y^{a'} \dots + B\mathcal{J}y^b + B'\mathcal{J}y^{b'} \dots + Cy^c\mathcal{J}y^d \dots +$$

$$[aAy^{a-1} + a'A'y^{a'-1} \dots] \omega +$$

$$[bB\mathcal{J}y^{b-1} + b'B'\mathcal{J}y^{b'-1} \dots] \mathcal{J}\omega +$$

$$[cCy^{c-1}\mathcal{J}y^d + c'C'y^{c'-1}\mathcal{J}y^d \dots] \omega +$$

$$[dCy^c\mathcal{J}y^{d-1} + d'C'y^c\mathcal{J}y^{d'-1} \dots] \mathcal{J}\omega + [s = \text{sum-}$$

mae terminorum, quorum quivis ipsorum ω , $\mathcal{J}\omega$ tanquam factorem aut utrumque aut aliquem (pluries continet). Nam in termino sub formula

$$A(y + \omega)^a \text{ contento, evolutoque post } aAy^{a-1}\omega$$

$$\text{sequitur } \frac{a(a-1)}{2} Ay^{a-2}\omega^2, \text{ et postea semper cre-}$$

$$\text{scunt exponentes ipsius } \omega; \text{ ita in } B(\mathcal{J}y + \mathcal{J}\omega)^b \text{ evolu-}$$

$$\text{to post } bB\mathcal{J}y^{b-1}\mathcal{J}\omega \text{ sequitur } \frac{b(b-1)}{2} B\mathcal{J}y^{b-2}\mathcal{J}\omega^2, \text{ et}$$

dein semper crescunt exponentes ipsius $\mathcal{J}\omega$; atque si evolvatur $C(y+\omega)^c (\mathcal{J}y+\mathcal{J}\omega)^d$; erit =

$$\left[Cy^c + cCy^{c-1}\omega + \frac{c(c-1)}{2} Cy^{c-2}\omega^2 \dots \right]$$

$$\left[\mathcal{J}y^d + d\mathcal{J}y^{d-1}.\mathcal{J}\omega + \frac{d(d-1)}{2} \mathcal{J}y^{d-2}.\mathcal{J}\omega^2 \dots \right]; \text{ ubi non-}$$

nisi duo priores termini in factore utroque considerandi veniunt, quum reliqui potentiam ipsius $\mathcal{J}\omega$ aut ipsius ω prima altiore contineant; est vero

$$[Cy^c + cCy^{c-1}\omega] [\mathcal{J}y^d + d\mathcal{J}y^{d-1}.\mathcal{J}\omega] =$$

$$Cy^c \mathcal{J}y^d + cCy^{c-1} \mathcal{J}y^d . \omega + dCy^c \mathcal{J}y^{d-1} \mathcal{J}\omega$$

+ $cdCy^{c-1} \mathcal{J}y^{d-1} . \omega \mathcal{J}\omega$; ubi terminus primus ad X pertinet, de posteriore qui $\omega \mathcal{J}\omega$ continet, quaestio non est, et reliqui duo suis locis adsunt; patetque valores ipsorum N, P esse qui dicebantur.

2. Potest vero ω tam parvum accipi, ut incrementum functionis dictae dato quovis minus fiat. Sit quippe $\omega = iv$, pro i constante aliqua, et v functione quapiam ipsius x , quam prouti libuerit, imminuere licebit: in terminis ubi $\mathcal{J}\omega$, $\mathcal{J}\omega^2$ &c ut factores continentur, quoque aderit ubique constans i ; imo ubi ω^2 aut $\mathcal{J}\omega^2$, $\omega \mathcal{J}\omega$ &c sunt, ad minimum 2da potentia ipsius i aderit. Itaque in $\int (N\omega + P\mathcal{J}\omega)$ aderit i in prima potentia, in integrali partis reliquae autem ad minimum in 2da, cum factore socio aliquo omnino finito (omnibus heic finitis suppositis). Consequ. pro dato quovis valore posterioris licebit i tam parvum accipere, ut a priore, (nisi hoc $= 0$ sit), superetur.

Pro statu maximi minimive igitur oportet

$\int (N\omega + P\mathcal{J}\omega) = 0$ esse: nam secus accepto una vice $+\omega$, alteravice $-\omega$, prodibit una vice id quo ab integrali isto reliquum exceditur, $\mp ve$ et altera vice $-ve$, adeoque nec maximum nec minimum locum habebit.

Est autem $\int (N\omega + P\mathcal{J}\omega)$ formae $\alpha + \beta\omega$ (pro α constante) : nam $\mathcal{J}(\alpha + \beta\omega) = \beta\mathcal{J}\omega + \omega\mathcal{J}\beta$; ubi $N = \mathcal{J}\beta$, et $P = \beta$, atque hinc $\mathcal{J}P = \mathcal{J}\beta$ et $N - \mathcal{J}P = \mathcal{J}\beta - \mathcal{J}\beta = 0$.

Pariter si adessent $Q\mathcal{J}^2\omega + R\mathcal{J}^3\omega$, (nempe si in expressione superiore ipsius derivatae datae, derivatae altiores ipsius y occurrerent) ; patet $\int (N\omega + P\mathcal{J}\omega + Q\mathcal{J}^2\omega + R\mathcal{J}^3\omega)$ esse formae $\alpha + \beta\omega + \gamma\mathcal{J}\omega + \delta\mathcal{J}^2\omega$; nam hujus derivata est $\beta\mathcal{J}\omega + \omega\mathcal{J}\beta + \gamma\mathcal{J}^2\omega + \mathcal{J}\omega\mathcal{J}\gamma + \delta\mathcal{J}^3\omega + \mathcal{J}^2\omega\mathcal{J}\delta$; ubi esset $N = \mathcal{J}\beta$, $P = \beta + \mathcal{J}\gamma$, $Q = \gamma + \mathcal{J}\delta$, $R = \delta$; atque hinc $N - \mathcal{J}P + \mathcal{J}^2Q - \mathcal{J}^3R = \mathcal{J}\beta - \mathcal{J}\beta - \mathcal{J}^2\gamma + \mathcal{J}^2\gamma + \mathcal{J}^3\delta - \mathcal{J}^3\delta = 0$.

EXEMPLA.

Quaeratur aequatio ordinatae y pro abscissa indefinita t , aream datam x , longitudine minima claudens. Concipiantur y , $\mathcal{J}y$ quoad x expressa acceptaque ; et consideretur res prius in plano.

Dividatur x per n , denoteturque $\frac{x}{n}$ per $\dot{x}$, at-

que mto $\dot{x}$ respondens pars abscissae sit (ut 193) $t_*m\dot{x} - t_*(m-1)\dot{x}$, dicaturque $\dot{t}$, latque $\dot{t}$ et $\dot{x}$ simultanea sibi invicem respondentia intelligantur. Erit $\dot{x} \equiv y\dot{t}$ (265) ; longitudinis lineae vero differentiale (ipso dy quoad x expresso) est (262)

$(\dot{t}^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = (\dot{t}^2 + \mathcal{J}y^2\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}$, quod si $y\dot{t}$ substituat-
tur ipsi $\dot{x}$, fit $\dot{t}(1 + y^2\mathcal{J}y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\dot{x}}{y}(1 + y^2\mathcal{J}y^2)^{\frac{1}{2}}$; et

$\frac{1}{y}(1 + y^2\mathcal{J}y^2)^{\frac{1}{2}}$ dicatur V .

Cujus si (ut dictum est) derivata accipiat ;
erit $\mathcal{J}V = \frac{y\mathcal{J}y\mathcal{J}^2y}{\sqrt{(1 + y^2\mathcal{J}y^2)}} - \frac{\mathcal{J}y}{y^2\sqrt{(1 + y^2\mathcal{J}y^2)}} ;$ nam

(198 et 249) V sub formam $\frac{u}{v}$ venit [pro $v = y$, et

$u = (1 + y^2\mathcal{J}y^2)^{\frac{1}{2}}$; adeoque $\frac{v\mathcal{J}u - u\mathcal{J}v}{v^2}$ accipiendum e-

erit. Est autem $\mathcal{J}u = \frac{1}{2} (1+y^2 \mathcal{J}y^2)^{-\frac{1}{2}} \mathcal{J}(1+y^2 \mathcal{J}y^2)$, et

$\mathcal{J}(1+y^2 \mathcal{J}y^2) = \mathcal{J}(y^2 \mathcal{J}y^2)$, quod (per 249) est $= y^2 \mathcal{J}(\mathcal{J}y^2) + \mathcal{J}y^2 \cdot \mathcal{J}(y^2) = 2y^2 \mathcal{J}y \cdot \mathcal{J}^2 y + 2y \mathcal{J}y \cdot \mathcal{J}y^2$. Consequenter si $1+y^2 \mathcal{J}y^2$ breviter k dicatur, erit $\mathcal{J}V =$

$$\frac{y y \mathcal{J}y \cdot \mathcal{J}y^2 \cdot k^{-\frac{1}{2}} + y y^2 \mathcal{J}y \cdot \mathcal{J}^2 y k^{-\frac{1}{2}} - k^{\frac{1}{2}} \mathcal{J}y}{y^2} =$$

$$\frac{y^2 \mathcal{J}y \cdot \mathcal{J}y^2}{y^2 \sqrt{k}} + \frac{y \mathcal{J}y \cdot \mathcal{J}^2 y}{\sqrt{k}} - \frac{\mathcal{J}y \sqrt{k}}{y^2}; \text{ et si terminus}$$

posterior, ad denominatorem prioris reducatur,

$$\text{erit } \frac{-\mathcal{J}y \sqrt{k}}{y^2} = \frac{-(1+y^2 \mathcal{J}y^2) \mathcal{J}y}{y^2 \sqrt{k}} = \frac{-\mathcal{J}y - y^2 \mathcal{J}y^2 \mathcal{J}y}{y^2 \sqrt{k}},$$

quod priori termino additum fit $\frac{-\mathcal{J}y}{y^2 \sqrt{(1+y^2 \mathcal{J}y^2)}}$,

et terminus qui superest, est $\frac{y \mathcal{J}y \cdot \mathcal{J}^2 y}{\sqrt{(1+y^2 \mathcal{J}y^2)}}$.

Est igitur $N = \frac{-1}{y^2 \sqrt{(1+y^2 \mathcal{J}y^2)}}$, et $P =$

$\frac{y \mathcal{J}y}{\sqrt{(1+y^2 \mathcal{J}y^2)}}$; pro maximo minime autem est

$N - \mathcal{J}P = 0$, adeoque $N = \mathcal{J}P$; atque quum $\mathcal{J}V = N \mathcal{J}y + P \mathcal{J}^2 y$, est etiam $\mathcal{J}P \cdot \mathcal{J}y + P \mathcal{J}^2 y = \mathcal{J}V$. Consequenter $\int (\mathcal{J}P \cdot \mathcal{J}y + P \mathcal{J}^2 y) = V + \text{const} = P \mathcal{J}y + \text{const}$, (nam $\mathcal{J}(P \mathcal{J}y) = \mathcal{J}P \cdot \mathcal{J}y + P \mathcal{J}^2 y$).

Est igitur $V + \text{const} = P \mathcal{J}y + \text{const}$; nempe

$$\frac{\mathcal{J} \sqrt{(1+y^2 \mathcal{J}y^2)}}{y} = \frac{y \mathcal{J}y^2}{\sqrt{(1+y^2 \mathcal{J}y^2)}} + \text{const}.$$

Unde (per $y \sqrt{(1+y^2 \mathcal{J}y^2)}$ multiplicando) fit $1+y^2 \mathcal{J}y^2 = y^2 \mathcal{J}y^2 + \text{const} \cdot y \sqrt{(1+y^2 \mathcal{J}y^2)}$; atque hinc $\text{const} = \frac{1}{y \sqrt{(1+y^2 \mathcal{J}y^2)}}$, adeoque $\frac{1}{\text{const}} = y \sqrt{(1+y^2 \mathcal{J}y^2)}$; quo dicto, erit $b^2 = y^2 + y^4 \mathcal{J}y^2$,

atque $b^2 - y^2 = y^2 Jy^2$, et $\sqrt{b^2 - y^2} = y^2 Jy$, adeoque $Jy : \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{y^2} = 1$.

Erat vero Jy derivata ipsius y quoad x accepta, atque $\dot{x} \equiv i y$; adeoque $(Jy = \frac{dy}{\dot{x}}) : \frac{dy}{i y} \sim 1$.

Atque hinc $\frac{dy}{i y} : \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{y^2} \sim 1$, seu

$\frac{y dy}{i \sqrt{b^2 - y^2}} \sim 1$, adeoque $\frac{i \sqrt{b^2 - y^2}}{y dy} \sim 1$, et

$i : \frac{y dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} \sim 1$. Consequ.

$\int i = \int \frac{y dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} = i = \sqrt{b^2 - y^2}$; namque

hujus differentiale quoad y est $\frac{y dy}{\sqrt{b^2 - y^2}}$. Un-

de $t^2 = b^2 - y^2$; quae aequatio circuli pro radio b et abscissis t e centro acceptis est.

Si vero non supponatur lineam in plano esse: derivata (quoad x) longitudinis lineae in spatio est $\sqrt{1 + Jy^2 + Jz^2}$ (268); cujus differentiale (314) est

$$(1 + Jy^2 + Jz^2)^{\frac{-1}{2}} Jy dJy + (1 + Jy^2 + Jz^2)^{\frac{-1}{2}} Jz dJz = \\ (1 + Jy^2 + Jz^2)^{\frac{-1}{2}} Jy \cdot J^2 y \cdot \dot{x} + (1 + Jy^2 + Jz^2)^{\frac{-1}{2}} Jz \cdot J^2 z \cdot \dot{x};$$

patetque ut prius, quod si tam $(1 + Jy^2 + Jz^2)^{\frac{-1}{2}} Jy J^2 y$

quam $(1 + Jy^2 + Jz^2)^{\frac{-1}{2}} Jz \cdot J^2 z$, $= 0$ sit; tum maximum minimumve possibile esse; (si nempe tam pro ω quam pro $-\omega$ utvis parvo, incrementum reliquum simul $+$ aut simul $-$ sit); non superatur enim a prioribus istis terminis.

Dicatur P ut supra factor per quem $J^2 y$ multiplicatur, et N dicatur factor, per quem Jy multiplicatur, (sed in quo ut factor $J^2 y$ non ad-

est); ita coefficientis ipsius J^2x dicatur P' , et N' coefficientis ipsius Jx .

Erit hic $N=0$, et $P=(1+Jy^2+Jx^2)^{-\frac{1}{2}}Jy$; ita $N'=0$, et $P'=(1+Jy^2+Jx^2)^{-\frac{1}{2}}Jx$.

Erat autem $N=JP$, ita $N=JP'$; consequ. $JP=0=JP'$; adeoque P est constans, sit $=a$; ita P' constans est, sit $=b$. Atque hinc $\frac{P'}{P} =$

$$\frac{(1+Jy^2+Jx^2)^{-\frac{1}{2}}Jx}{(1+Jy^2+Jx^2)^{-\frac{1}{2}}Jy} = \frac{b}{a} = \frac{Jx}{Jy}; \text{ adeoque } \frac{b}{a}Jy = Jx,$$

et $\int \frac{b}{a}Jy = \int Jx$; nempe $x=y \cdot \text{const.}$ Unde patet

lineam quaesitam in plano esse: concipiatur nempe planum p' secare in recta x planum p in quo ordinatae y accipiuntur; sintque Y et y in p ad x e punctis $g, g' \perp_{\text{res}}$, respondeatque Z ipsi Y , et z ipsi y ; erit pro constante α , $Z = \alpha Y$, et $z = \alpha y$; et pro $Y = ky$, erigatur e fine ipsius $\frac{Y}{k}$

$=y$, ad $p \perp_{\text{ris}} = \frac{Y\alpha}{k}$; erit g et finis ipsius $\frac{Y\alpha}{k}$

cum fine ipsius Z in recta, atque g, g' , et fines ipsorum $\frac{Y\alpha}{k}$ et z erunt apices rectanguli. Ita si 3tium

punctum g' accipiatur, patet rectam ex g' per finem respondentis z ductam, esse prioribus parallelam, et cum plano p angulum eundem efficere.

Potest etiam $z = \frac{b}{a}y$ ita esse, ut $\frac{b}{a} = 0$

sit, adeoque Z in p cadat; atque potest in integratione constans arbitraria c addi ut sit $z = 0.y + c$, adeoque planum ad distantiam c ipsi p parallelum.

2do. *Linea Brachistochrona*; seu linea per quam grave ex A ad C (puuctum in alia verticali cadens brevissimo tempore descendit; reperitur hoc modo. (Fig 54). Dividatur x per n , ducanturque per fines ipsorum $\dot{x}$, horizonti parallelæ; sit tempus descensus t , et respondeat $\dot{t}$ ipsi $\dot{x}$; nempe si de m to $\dot{x}$ sermo sit, per $\dot{t}$ intelligatur tempus, quo de parallela per m ti $\dot{x}$ finem superiorem, ad parallelam per finem m ti $\dot{x}$, pervenit grave.

Spatium sub $\dot{t}$ percursum exprimi per $\dot{t}\sqrt{gx}$ poterit; nempe facile demonstratur in mechanica, velocitatem esse pro quavis linea curva eandem, quae ad imum abscissae verticalis x esset; atque superius (217 et sequ.) erat $v\dot{t} = s$.

Consideretur et hic res prius ad planum restricta. Est longitudinis lineae differentiale =

$\dot{x}(1+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$. Erit igitur si atium prius, huic aequipollens; nempe $\frac{\dot{t}\sqrt{gx}}{\dot{x}\sqrt{(1+\dot{y}^2)}} \sim 1$, adeoque

$\dot{t} : \frac{\dot{x}(1+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{gx}} \sim 1$; adeoque si pro dato x , minimum ipsius $\int \frac{\dot{x}(1+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{gx}}$ reperiat, minimum t erit.

Accipiat, itaque $\frac{\dot{y}(1+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{gx}}$ pro certo valore ipsius x , (idem a certo valore ex gr. 0 usque ad $2r$, ad quemvis applicari patebit): erit derivata quaesita (quoad x accepta) $\frac{(1+\dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}} \dot{y} \cdot \dot{y}^2}{\sqrt{gx}}$, nempe $\dot{y}(\dot{y})$ quoad x , est $\dot{y}^2$ et $\sqrt{gx}$ pro certo x sumitur.

Itaque $N=0$, $P=\frac{(1+\mathcal{J}y^2)^{\frac{-1}{2}}\mathcal{J}y}{\sqrt{gx}}$. Sed $N=\mathcal{J}P$

adeoque $\mathcal{J}P=0$, et $P=\text{const.}$ Itaque $\frac{\mathcal{J}y}{\sqrt{gx}\sqrt{(1+\mathcal{J}y^2)}} = \text{const.}$, sit $=\alpha$; atque hinc $\mathcal{J}y = \alpha\sqrt{(1+\mathcal{J}y^2)}\sqrt{gx}$, et $\mathcal{J}y^2 = \alpha^2gx + \alpha^2gx\mathcal{J}y^2$, et hinc $\mathcal{J}y^2 = \frac{\alpha^2gx}{1-\alpha^2gx} = \frac{\beta x}{1-\beta x}$ (pro $\alpha^2g=\beta$).

Erat autem (326) pro cycloide $\mathcal{J}y^2 = (2v^{-1}-1)$, pro circuli genitoris radio $=1$, estque $\mathcal{J}^2=2rv^{-1}-1$ pro radio r ; hic autem est $v=2r-x$, quo substituto in $2rv^{-1}-1$, erit $\frac{2r}{v} - 1 = \frac{2r}{2r-x} - 1 = \frac{x}{2r-x}$, quod item tam numeratorem per

$2r$ dividendo, fit $=\frac{\frac{1}{2r} \cdot x}{1 - \frac{1}{2r} \cdot x} = \frac{\alpha^2gx}{1-\alpha^2gx}$, si $\alpha^2g=$

$\frac{1}{2ry}$ accipiat. $\frac{1}{2ry}$ accipiat. $\frac{1}{2ry}$

Est igitur, quum hoc pro quovis valore ipsius x ita prodeat, cyclois linea, pro qua quaesitum locum habere potest.

Atque etiamsi non restringatur ad planum, facile (ut antea) prodit, eam in plano et quidem verticali esse debere. Nempe si derivata quoad x ipsius $\frac{\sqrt{(1+\mathcal{J}y^2+\mathcal{J}z^2)}}{\sqrt{gx}}$ accipiat. $\frac{\sqrt{(1+\mathcal{J}y^2+\mathcal{J}z^2)}}{\sqrt{gx}}$ accipiat. $\frac{\sqrt{(1+\mathcal{J}y^2+\mathcal{J}z^2)}}{\sqrt{gx}}$

$\mathcal{J}P=0=\mathcal{J}P'$, quia $N=0=N'$; itaque P et P' constantes erunt, (uti antea), et $x=y.\text{const.}$ Erit igitur linea in plano et quidem verticali, quum x verticalis sit.

3tio. Interim tamen e dictis neutiquam maximum miniumve adesse constat; quum nonnisi condi-

tionem, sine qua maximum minimumve fieri nequeat, satisfactum sit : constat quidem, in casu primo circulum, in posteriore cycloidem esse lineam quaesitam, si maximum minimumve detur ; sed etiam si detur, quodnam sit, indecisum adhuc est. At responsio quoad casum praesentem facilis est.

Nempe sit $(1 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = (f) dy$ {pro variabili dy }: erit (per 289) $(f)(dy + d\omega) = (f)dy + d\omega(f)dy + \frac{d\omega^2}{2} d^2(f)dy - -$ (derivatis quoad dy acceptis) =

$$(1 + dy^2)^{\frac{1}{2}} + d\omega(1 + dy^2)^{\frac{-1}{2}} dy + \frac{d\omega^2}{2} \left[-(1 + dy^2)^{\frac{-3}{2}} dy^2 + (1 + dy^2)^{\frac{-1}{2}} \right] - - ; \text{ ubi coefficientis ipsius } d\omega \text{ est id quod supra P erat ; et terminus sequens} = \frac{d\omega^2}{2(1 + dy^2)^{\frac{3}{2}}} ; \text{ nam parenthesi clausum} =$$

$$\frac{-dy^2}{(1 + dy^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(1 + dy^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1 + dy^2 - dy^2}{(1 + dy^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Potest autem ω tam parvum accipi, ut $\frac{d\omega^2}{2} d^2(f)dy$ majus fiat summa sequentium : itaque

in hoc casu incrementum derivatae, ($y + \omega$ ponendo pro y) erit $\pm$ vum ; nam $\frac{dx^2}{2} d^2(f)dy$ pro hoc casu

$$\text{est} = \frac{d\omega^2}{2(1 + dy^2)^{\frac{3}{2}}} , \text{ quod } \pm \text{ est, namque } d\omega^2 \pm$$

est, et $(1 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ quoque hic $\pm$ ve accipitur, adeoque et denominator $\pm$ est. Unde in casu tali etiam integrale pro ω utvis parvo, $\pm$ ve crescit ; consequ. in casu relato minimum est.

4to. Possunt quidem etiamsi plures adfuerint variables, omnia dicta ex evolutione functionis plurimum variabilium (312) deduci: at Tyronum captui aptius videbatur, modo relato incipere.

Nempe si functio superior (333) dicatur $(F)(y, Jy) = (u)$ (pag 311); erat ibidem

$(F)(y + \omega, Jy + J\omega) = (u) + \omega^{1,y}(u) + J\omega^{1,Jy}(u) \dots$, si heic y sit quod ibi x erat, et quod ibi y erat heic Jy sit, atque ipsius λ vicem $J\omega$ subeat; prodibitque coefficiens tam ipsius ω , quam ipsius $J\omega$, plane

is qui (331) prodiit: nimirum $(u)^{1,y}$, nempe derivata ipsius (u) quoad y accepta est =

$aAy^{a-1} \dots + cCy^{c-1} Jy^d \dots$; nam termini ubi tantum altera variabilis Jy reperitur, (quae dum derivata quoad aliam accipitur, constans supponitur), derivata quoad Jy est 0.

Ita $(u)^{1,Jy} = bBJy^{b-1} \dots + dCy^c Jy^{d-1} \dots$; nam terminorum ubi tantum altera variabilis y (dum derivata quoad aliam nempe Jy accipitur, constans supposita) adest, derivata quoad y est 0.

Itaque superius $N = (u)^{1,y}$, et $P = (u)^{1,Jy}$, per (u) ipsum $(F)(y, Jy)$ intelligendo.

Erat ex gr. in exemplo prius allato, ubi aream datam claudens linea brevissima quaerebatur; derivata quoad $\dot{x}$ (denotante x aream datam)

$\frac{1}{y}(1 + y^2 Jy^2)^{\frac{1}{2}}$. Sit hoc $= (u) = (F)(y, Jy)$; erit

$(F)(y + \omega, Jy + J\omega) = (u) + \omega^{1,y}(u) + J\omega^{1,Jy}(u) \dots$; atque

$(u)^{1,y} = J \left[\frac{(1 + y^2 Jy^2)^{\frac{1}{2}}}{y} \right]$ (quoad y) =

$\frac{y(1 + y^2 Jy^2)^{-\frac{1}{2}}}{y^2} - \frac{(1 + y^2 Jy^2)^{-\frac{1}{2}}}{y} Jy^2$ (uti 333), et

hoc est $= \frac{y^2 dy}{y^2 \sqrt{(1+y^2 dy^2)}} - \frac{(1+y^2 dy^2)^{\frac{1}{2}}}{y^2}$, quod item

(ad denom. eundem reductum) est $= \frac{-1}{y^2 \sqrt{(1+y^2 dy^2)}}$

$=$ coefficienti ipsius ω atque superiori N.

$$\text{Ita } (u) = \int \left[\frac{(1+y^2 dy^2)^{\frac{1}{2}}}{y} \right] = \frac{(1+y^2 dy^2)^{-\frac{1}{2}} y^2 dy}{y}$$

$$= \frac{y dy}{\sqrt{(1+y^2 dy^2)}} \text{ (quum heic } y \text{ sit constans, et de-}$$

rivata quoad dy accipiatur); quod igitur coefficientis ipsius ω est, et superiori P aequalis.

Idem ad evolutionem plurium variabilium applicari, atque pro statu maximi minimive $N\omega + P d\omega + Q d^2\omega \dots = 0$ esse debere, et superius dicta sequi patet.

5to. Notandum tamen est, et hic (ut 316) terminos ulterius quoque $= 0$ esse posse; at si integrale partis reliquae (pro ω utvis exiguo sive $= +ve$ sive $-ve$ accipiatur), $\mp$ sit, minimum, et si $-$ sit, maximum esse. Quod si plures adfuerint variables, (uti in exemplis allatis dx erat); necesse sit pro casu maximi minimive esse seorsim quoque $N - dP = 0$, et $N' - dP' = 0$; si seorsim quaeratur conditio pro statu maximi minimive, pro una variabili, reliquis constantibus positis; et tum pro altera variabili, prioribus constantibus positis; perspicui potest.

At quum instituti ratio pluribus vacare haud permittat; sufficiat re vix attacta, monstrare, unde plura accipi possint: magnus *Lagrange* est, qui lucem huic disquisitionum generi quoque primus affudit; legatur *Theorie de fonctions*, opus saepius citatum, nunquam satis laudandum; quamvis giganteo plerumque passu per alpes gradiens, ambulantes in vallibus relinquat. Inter plurima alia, ibidem criteria etiam generalia exponuntur, e quibus dignosci queat, num partis reliquae integrale

✕ vel $-$, adeoque maximum vel minimum, aut vero nullum sit; imo etiam ad casum, ubi id quod o erat, ∞ fit (ut supra) extenditur.

§. 38. Ramorum in quos arbor (pag. 179) dividitur, is etiam quadamtenus explicandus est, ubi pro dato valore a functionis, valor variabilis in ea quis sit, quaeritur: vocatur haec *theoria aequationum*.

Si ex gr. quaeratur, quodnam a sit ipsi x substituendum, ut

$$(f)x = x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \dots + x^0t = o \text{ sit.}$$

1. Si m integer ✕vus sit, et in quovis termino sequente exponens ipsius x unitate decreseat, usque ad $x^0=1$, atque $p, q \dots$ constantes sint; dicitur aequatio gradus m i; atque si $(f)x$ ad formam $x^m + px^{m-1} \dots + x^0t$ reductum sit, *aequatio ordinata* vocatur; a vero dicitur *radix aequationis*. Nempe coefficientium $p, q \dots$ possunt esse quilibet, imo omnes $=o$; adeoque pro $x^m = o$, erit $x = \sqrt[m]{o} = o$, et pro $x^m + t = o$, erit $x = \sqrt[m]{-t}$; atque nomen radicis ad alios casus quoque hinc extenditur, (quamvis proprie pro his tantum casibus reipsa locum habeat).

2. Dicitur etiam *aequatio superior determinata*; quum mox pateat, ipsius x (si coefficientium nullus sit signo radicali affectus, aut cujusvis unus certus valor accipiatur) valores plane numero m dari, (inter quos tamen certi imo etiam omnes aequales esse possunt), qui functionem $=o$ reddant, quilibet eorum substituatur ipsi x . Imo si etiam plures aequationes totidemque variables (*incognitae* dictae, et literis pariter alphabeti ultimis designatae) fuerint, *determinata aequatio* dicitur: nempe cuilibet *incognitae* valores duntaxat numero certo substitui possunt, qui aequationibus satisfaciant.

Si vero pauciores sint aequationes, quam incognitae; *aequatio indeterminata* dicitur. Ex gr. pro $x+y=0$, est $x=-y$, et innumeri valores ipsi x substitui possunt, qui functionem ad 0 redigant. Possunt tamen etiam in aequationibus indeterminatis (ut infra patebit) valores incognitae certis conditionibus ita restringi, ut valores aut certo tantum numero dentur, aut nullus plane sit.

Potest etiam aequatio *plusquam determinata* dicta dari: si nempe plures aequationes quam incognitae sint: et tum proprie conditioni impossibili satisfieri nequit. Nempe hic si dicatur aequationes numero n dari; tales intelligantur, quarum nulla per reliquas ponitur, ex gr. hoc sensu $ab=x$, et $\frac{x}{a}=b$ non duae aequationes sunt, sed unica est; duae tantum sunt *identicae* dictae. Ex gr. Si detur $x-a=0$, et $x-\frac{a}{b}=0$, quidcunque sit a praeter 0, conditio impossibilis est.

3. Notandum vero est, aequationem aut aliunde dari, ut *resolvatur*, (id est radix ejus reperiat); aut certa tantum data exhiberi, e quibus sagacitas aequationem condant; cujus regulae non dantur, nisi quod perspiciatur, quid sit quaerendum, et incognitarum numerus ad minimum redigatur, atque illae literis ultimis denominentur, et aequatio e datis statuta, ordinetur; ac tum per regulas dicendas radix ejus quaeratur.

4. Notandum etiam est, non quamvis aequationis radicem petito satisfacere: nempe ex gr. si puella dixerit, ejus aetatem talem x esse, quae per matris, quae illam 40mo aetatis suae anno peperit, aetatem multiplicata, Methusalemi aetatem exaequet; minime dixit, aetatem suam cuilibet x aequalem esse, quod tale est, ut $x(40+x)=969$; nempe aequationis hujus etiam -57 radix est; sed aetas puellae est talis ut alicui radicem hujus aequa-

tionis sit aequalis (p.107); tunc tantum est incognita quaesita cuilibet radici aequationis certo aequalis, quum unica tantum radix datur, uti in aequatione gradus 1mi.

5. Quod ordinationem aequationis attinet: si x nullo signo radicali subsit: prius per quemvis divisorem, in quo x adest, aequatio multiplicetur, id est tam functio ipsius x , quam o ad dextram; et tum colligantur e tota functione ipsius x , quae $=o$ ponitur, omnes termini, in quibus x ad eundem exponentem elevatum est, et summa coefficientium tanquam coefficientis potentiae illius, ipsi praefigatur; atque si potentia summa ipsius x coefficiente gaudeat, per hunc dividatur aequatio: et manifesto reducetur aequatio ad formam superiorem; atque si huic aequationi satisfiat per $x=a$, idem a et functionem priorem ad o rediget. (p. 7 et 8)

Si vero x signo radicali subsit; casus simpliciores sunt sequentes.

Si exponens aliquis aut plures fracti sint; reducantur potentiae omnes ipsius x ad denominatorem communem, sit is n ; et fiet pro potentia

priore ipsius x in quovis termino, $x^{\frac{1}{n}}$ elevatum ad exponentem numeratori exponentis novi aequa-

lem. Ex gr. $x^{\frac{2}{3}} + px^{\frac{1}{2}} + x^0q = (\text{pro } x^{\frac{1}{6}} = y)$,

$(x^{\frac{1}{6}})^4 + p(x^{\frac{1}{6}})^3 + (x^{\frac{1}{6}})^0q = y^4 + py^3 + q$, et si valor α reperiatur, quo ipsi y substituto functio posterior ad o redigatur, erit propter

$y = \sqrt[6]{x}$, adeoque $y^6 = x$, valor α^6 in functione priore ipsi x substituendus, ut functio ad o redigatur;

nam $y^4 = (\sqrt[6]{x})^4 = x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{2}{3}}$, et ita de reliquis terminis patet.

At si potentia ipsius x per constantem multiplicata, et addita quantitati alicui, sit simul si-

gno radicali subjectae, casus tantum simplicioris, exempla ostendere sufficiat.

Si tantum in uno termino sit hoc, et reliquum dicatur X , adeoque functio sit ex gr. $X + \sqrt[n]{a + bx^2}$; erit $X = -\sqrt[n]{a + bx^2}$, et $X^n = -(a + bx^2)$ si n impar sit, et $a + bx^2$ si n par sit; ex gr. $-\sqrt[3]{8} = -2$, et $(-\sqrt[3]{8})^3 = (-2)^3 = -8$, at $(-\sqrt[3]{4})^3 = -4$. Aut potest poni $(-X)^n = a + bx^2$.

Sit $\sqrt[3]{a + bx^3} + \sqrt[3]{c + x} - \sqrt[3]{d + cx^2}$; hoc brevius ad formam $\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} = \sqrt[3]{A}$ reduci potest, et elevando ad 3 fit
 $\alpha\sqrt[3]{\alpha} + 3\alpha\sqrt[3]{\beta} + 3\beta\sqrt[3]{\alpha} + \beta\sqrt[3]{\beta} = A = (\alpha + 3\beta)\sqrt[3]{\alpha} + (3\alpha + \beta)\sqrt[3]{\beta}$, quod per $\gamma\sqrt[3]{\alpha} + \delta\sqrt[3]{\beta}$ exprimendo, fit $A^2 = \gamma^2\alpha + \delta^2\beta + 2\gamma\delta\sqrt[3]{\alpha\beta}$, quod ad formam $B = 2\gamma\delta\sqrt[3]{\alpha\beta}$ reducendo, fit $B^2 = 4\gamma^2\delta^2\alpha\beta$; et valoribus substitutis, functio a signo radicali libera prodibit, (seu ut dici solet, *rationalis* reddetur), atque modo supra dicto ordinari poterit.

$$\text{Sit } \sqrt[3]{\frac{a+x}{b+x}} + \sqrt[3]{c+x} + \sqrt[3]{d-x^3} + \sqrt[3]{x-e};$$

multiplicetur aequatio (supponendo functionis valorem $= 0$ esse) per $\sqrt[3]{(b+x)^3}$; patet aequationem formae sequentis inde emanare, $\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} = \sqrt[3]{\gamma} + \sqrt[3]{\delta}$ unde $\alpha + \beta + 2\sqrt[3]{\alpha\beta} = \gamma + \delta + 2\sqrt[3]{\gamma\delta}$, et hinc aequatio formae sequentis prodit $A = \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C}$; unde $A^2 = B + C + 2\sqrt[3]{BC}$, et $(A^2 - B - C)^2 = 4BC$.

Calculo saepe operoso e functione primo obtutu simplici, aequationem ex ingenti literarum numero demum ordinari perspicui potest.

6. Si vero aequatio e datis constructa, et ordinata fuerit: tum si aequationis gradus ejusdem resolutio generalis detur; nonnisi in formula generali ipsius x functionem ad 0 redigentis, substi-

tuenda substitui debent. Nempe $x^1 + a = 0$ est forma *aequationis gradus 1mi*, et quaecunque aequatio reducatur ad hanc formam, erit $x = -a$, quum $-a + a = 0$ sit: Ita quaecunque aequatio reducatur

ad formam $x^n + a = 0$, erit $x = \sqrt[n]{-a}$, quum

$(\sqrt[n]{-a})^n + a = -a + a = 0$ sit. Dicitur ejusmodi aequatio gradus *nti pura*, si vero adhuc in aliquo termino potentia ipsius x exponentis zero, altioris adsit, *affected* audit.

7. *Quadraticae aequationis formula* est $x^2 + px + q = 0$; quae si p non $= 0$, *affected* est: quum modus puram resolvendi in aperto sit; ultro succurrit de modo quo *affected* pura reddatur, cogitare; et quum tale quaeratur, quod ipsi x substituendo totam functionem $= 0$ reddat, via aperitur quaerendi, quidnam ipsi x substitui posset, quod terminum $px = 0$ efficeret? Sit id $= y + k$; erit

$$x^2 + px + q = (y + k)^2 + p(y + k) + q =$$

$$y^2 + 2ky + k^2 + py + pk + q = y^2 + (2k + p)y + k^2 + pk + q;$$

ubi illico patet, k ita accipi posse, ut $2k + p = 0$, adeoque $(2k + p)y = 0$ sit, et aequatio pura reddatur, e qua prodeunti y addito k prodeat x .

Est nempe $k = -\frac{p}{2}$, et $y = \sqrt{(-k^2 - pk - q)} =$

$$\sqrt{[-k(k + p) - q]} = \sqrt{\left[\frac{p}{2}\left(p - \frac{p}{2}\right) - q\right]} = \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)};$$

adeoque $x = \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)} - \frac{p}{2}$. Itaque sicubi fun-

ctio ad formam $x^2 + px + q$ reducta fuerit, *differentia dimidii coefficientis* (1mi, id est coeff. ipsius x) a radice quadrata e *differentia coefficientis* 2di (per quem x^0 multiplicatur), a quadrato dimidii coefficientis primi, est talis quantitas, quae si ipsi x substituatur, aequationem ad 0 rediget; uti et id ipsum per aequationem generalem Tyrones tentare quoque possunt.

Sunt autem manifesto duo valores ipsius x nec plures; nam signum $\sqrt{\quad}$ duos valores sibi invicem oppositos (alioquin aequales) parit, reliquae operationes autem unici resultati sunt, posito nempe cujusvis coefficientis unicum valorem esse; nam si in $x+a$ per a denotetur $\sqrt{4}$, erit $x=\sqrt{4}$. Est vero saepe valor uterque imaginarius; adeoque si realis quaeratur, petito satisfieri non posse in tali casu patet. Ex gr. si quantitas x quaeratur, cujus quadratum sit $=x-2$; erit $x^2-x+2=0$, et

$x = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} - 2\right)}$, quod satisfacit quidem aequationi, sed imaginarium est, quia

$$\sqrt{\frac{-7}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{-7}.$$

8. Videatur id etiam quod (pag. 115) de $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$ dictum est.

Facile interim patet, modum, quo terminus aequationis ordinatae 2^{us} dispareat, ad quemvis gradum m applicari posse; si nempe $x=y+k$, et (ut in aequatione gradus 2 erat $k=\frac{-p}{2}$), fiat $k=\frac{-p}{m}$.

Nam

$$(y+k)^m = y^m + my^{m-1}k + \frac{m(m-1)}{2}y^{m-2}k^2 \dots$$

$$p(y+k)^{m-1} = py^{m-1} + p(m-1)y^{m-2}k \dots$$

$$q(y+k)^{m-2} = qy^{m-2} \dots$$

ubi summa coefficientium ipsius y^{m-1} est $mk+p$;

adeoque si $k=\frac{-p}{m}$ accipiatur, aequationis novae

eiusdem gradus m terminus 2^{us} disparebit.

Pariter disparebit 3^{tus}, si pro coefficientium ipsius y^{m-2} summa, nempe

$$\frac{m(m-1)}{2}k^2 + p(m-1)k + q = 0, \text{ valor ipsius } k \text{ quae}$$

ratur, sed ad terminum 3tium resolutio aequationis 2di gradus requiritur, uti facile patet resolutionem aequationis $(n-1)$ ti gradus requiri, ut terminus n tus dispareat; quum in serie superiore exponentes ipsius k in quovis termino ulteriore unitate crescant, verticaliter infrorsum decrescant. Interim non sequitur valores ipsius k e duabus aequationibus prodeuntes aequales esse, ut simul plures termini dispareant.

9. Notandum autem est, substitutionem dictam novae incognitae, viam ad transformationes aequationum alias quoque aperuisse; (de quibus inferius).

Sublato tamen termino 2do via ad resolutionem aequationis cubicae patefit. Nempe aequatio generalis 3tii gradus, $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, sublato termino 2do sub formam $X^3 + aX + b = 0$ venit, (pro $x = X + k$ et $k = -\frac{p}{3}$); pro qua aequatione si $X = \beta$,

erit $\beta^3 + a\beta + b = 0$, et x erit $= \beta - \frac{p}{3}$. Itaque X quaeritur.

Sit $X = y + z$; quo valore substituto, erit $X^3 + aX + b =$
 $y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + ay + az + b = 0 = y^3 + z^3 + (3yz + a)(y + z)$.
 Si jam ipsorum y et z tales valores reperiantur, ut $y^3 + z^3 + b = 0$, et simul $3yz + a = 0$ sit; tum et $(3yz + a)(y + z) = 0$ erit, adeoque $y^3 + z^3 + (3yz + a)(y + z) = 0$ erit, et summa illorum y et z ipsi X substituta, functionem $X^3 + aX + b = 0$ reddet.

Pro $3yz + a = 0$ autem est $y = -\frac{a}{3z}$, et hoc valore in $y^3 + z^3 + b$ substituto, fit $z^3 - \frac{a^3}{27z^3} + b = 0$; nempe datur tale z quod functionem istam zero aequalem reddat; multiplicando enim per z^3 , fit

$$z^3 + bz - \frac{a^3}{27} = u^2 + bu - \frac{a^3}{27} \text{ (si } z^3 = u \text{ ponatur), e}$$

qua aequatione quadratica u reperitur =

$$\sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}\right) - \frac{b}{2}}, \text{ cujus } z \text{ radix cubica est.}$$

Dato z vero, et y reperitur; substituto enim valore ipsius z in $y^3 + z^3 + b = 0$, erit

$$y = \sqrt[3]{(-z^3 - b)} =$$

$$\sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}\right)} - b\right]} = \sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}\right)}\right]}$$

atque $X = z + y =$

$$\sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}\right)}\right]} + \sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}\right)}\right]}$$

et demum x prodit, addendo $-\frac{p}{3}$ valori huic

ipsius X , qui functionem $X^2 + aX + b$ zero aequalem

reddit; et pro $X - \frac{p}{3} = x$ functio proposita

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \text{ fit.}$$

Notandum tamen est regulam istam *Cardani*, quamvis semper satisfaciat algebraice, pro casu ubi $\frac{a^3}{27} =$ et $> \frac{b^2}{4}$ est, radices reales forma ima-

ginarii exhibere; demonstrari enim facile potest, aequationis cubicae semper unam radicem realem esse; atque si haec c sit, aequationem esse productum ex $X - c$ et aequatione quadratica, et hujus plane pro dicto casu radicem utramque realem esse.

10. Ex hoc resolutio aequationis gradus 4ti modo sequente deducitur: potest haec sublato termino 2do, ad formam $x^4 + Ax^2 + Bx + C$ reduci; quod ostendi potest, esse $= (x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c) = x^4 + (b + c - a^2)x^2 + (ac - ab)x + bc$.

Nam valores ipsorum a, b, c prodeunt ex $b+c-a^2=A$, $ac-ab=B$, et $bc=C$ positis; nempe $b+c=A+a^2$, $c-b=\frac{B}{a}$; unde aequationem posteri-

orem addendo priori, fit $2c=A+a^2+\frac{B}{a}$; subtra-

hendo vero posterius e priore, est $2b=A+a^2-\frac{B}{a}$;

atque hinc $c=\frac{A+a^2}{2}+\frac{B}{2a}=\frac{Aa+a^3+B}{2a}$, et

$b=\frac{Aa+a^3-B}{2a}$; atque $bc=C=\frac{Aa+a^3+B}{2a}\cdot\frac{Aa+a^3-B}{2a}$
 $=\frac{a^6+2Aa^4+A^2a^2-B^2}{4a^2}$; et hinc si $u=a^2$ ponatur,

erit $\frac{u^3+2Au^2+A^2u-B^2}{4u}=C$, et $u^3+2Au^2+A^2u-B^2$

$-4Cu=0=u^3+2Au^2+(A^2-4C)u-B^2$; quae cum
 aequatio cubica sit, reperitur u , adeoque et $a=\sqrt{u}$, et tum dato a , ex $b+c-a^2=A$, erit $b=A+a^2-c$,
 quo valore substituo ipsi b in $ac-ab=B$, erit
 $ac-aA-a^3+ac=B$, et $c=\frac{B+aA+a^3}{2a}$; quo item

in valore ipsius b substituto ipsi c , repertis a, b, c
 resolvi poterunt aequationes quadraticae x^2+ax+b
 et x^2-ax+c , e quarum facto conflata functio

x^4+Ax^2+Cx+C est; atque tum quaevis radix cu-
 jusvis illarum aequationum quadraticarum erit ra-
 dix aequationis posterioris; nam

$(x^2+ax+b)(x^2-ax+c)=0$ erit, si x tale sit in uno
 factore, quod eum $=0$ reddat; quia factum quo-
 que ex hoc et factore altero, 0 erit.

Manifesto autem et hoc priori operosius dif-
 ficultati eidem obnoxium est: ad alia igitur me-
 dia, quibus radix aequationis gradus cujusvis repe-
 ritur aut saltem aproximatur, confugiendum est;
 eo magis quod quamvis innumerae aequationes al-

tiores resolvibiles dentur; formula generalis per coefficients p, q --- determinata, nempe functio algebraica (pag. 180), (ut in 2di 3ti et 4ti gradus aequationibus) dari nequeat; quod jam in opere (p. 180) citato monitum erat; quamvis in eodem pluribus aequationibus altioribus ita resolutis, ut radix operationum (*additionis multiplicationis et extractionis radice quadratae*) certo numero, exhibeatur; (prorsus mira summi ingenii sagacitate, et profundissimo acumine) talia praestita sint, quae antea Geometria per annorum millia impossibilia videbantur: uti *peripheriae divisio per n , constructione geometrica* perficitur, si quidem n numerus primus formae $2^m + 1$, aut productum fuerit e primis hujus formae, ita ut nullus (excepto 2) pluries quam semel ut factor occurrat; et quidem cum illa restrictione, ut id per nullum alium integrum n fieri queat: nimirum etsi opus primo aspectu heterogeneum sit, ex (pag. 109) nexus intelligi potest; nam si ex gr. aequatio $x^{17} - 1 = 0$ numero certo operationum dictarum resolvatur, cosinus 17mae partis peripheriae, adeoque polygonum regulare 17 laterum, geometricè construitur, quum 17 requisita qualitate gaudeat; et plane stupendum est, opus istud giganteum ab adolescente 17 annos vix excedente, perfectum fuisse.

EXEMPLA.

1. E datis aetatis puellae (343) est $x(40+x) = 969$, adeoque $x^2 + 40x - 969 = 0$, quod sub formam $x^2 + px + q$ cadit; itaque $x = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)} = -20 \pm \sqrt{(400 + 969)}$, cujus valores sunt $-20 + 37 = 17$, et $-20 - 37 = -57$; quorum duorum valorum uni (nempe ipsi 17) est puellae aetas aequalis.

2. Notum est gravitates específicas esse uti pondera absoluta divisa per volumina, adeoque uti pondera absoluta, si volumina fuerint aequa-

lia; notum etiam est, corpus fluido totum immersum, e pondere suo tantum amittere, quantum pondus fluidi illius est, cujus locum occupat: hinc si corporis dicti pondus P , gravitas specifica G sit, et fluidum sit aqua, cujus (pro certa temperatura sub altitudine certa barometri) gravitas specifica sit 1 ; erit si pondus amissum p sit, hoc p pondus aquae sub volumine, corporis volumini aequali.

Itaque erit $G:1=P:p$, adeoque $G=\frac{P}{p}$, et $p=$

$\frac{P}{G}$. Hinc problematis Archimedei resolutio: sit

corona ponderis P , summa auri x et argenti $P-x$, (denotante x quoque pondus); atque volumen miscelae sit = summae mixtorum, (quamvis ex gr. spiritus vini voluminis v et aqua voluminis v commixta volumen minus quam $2v$ nanciscantur). Sit auri gravitas spec. G , et argenti sit g ; atque P amittat in aqua pondus A ; erit $\frac{x}{G} + \frac{P-x}{g} = A$;

nempe pondus absolutum divisum per gravitatem spec. dat pondus amissum, id est pondus voluminis aquae ejusdem; et summa ponderis amissi partis aureae, et argenteae, ponitur = ponderi amisso coronae.

Hinc ordinando fit $\frac{x}{G} - \frac{x}{g} + \frac{P}{g} - A = 0$,

seu $x(\frac{1}{G} - \frac{1}{g}) + \frac{P}{g} - A = 0$, adeoque

$x + (\frac{P}{g} - A) : (\frac{1}{G} - \frac{1}{g}) = 0$; quod sub formam

$x + a = 0$ venit, adeoque $x = -a$, seu pro casu hoc est

$$x = - (\frac{P}{g} - A) : (\frac{1}{G} - \frac{1}{g}) =$$

$$= \frac{-(P - Ag) : g - G}{Gg} = \frac{(P - Ag)G}{g - G} = \frac{P - Ag}{G - g}.$$

3. Si quaeratur quanti ponderis x suber sit ferro ponderis P addendus, ut in aqua quocunque immersum quiescat: sit G gravitas spec. ferri, g suberis; erit pondus aquae depulsae $\frac{P}{G} + \frac{x}{g}$, (prius ferro posterius suberi respondens); atque $\frac{P}{G} + \frac{x}{g} = P + x$, tunc enim requiescet, quum summa ponderum tantum premit deorsum, quantum aqua sustinet. Itaque

$$x\left(\frac{1}{g} - 1\right) + \frac{P}{G} - P = 0, \text{ et } x + \left(\frac{P}{G} - P\right) : \left(\frac{1}{g} - 1\right) = 0; \text{ adeoque } x = -\left(\frac{P}{G} - P\right) : \left(\frac{1}{g} - 1\right) = \frac{(P - PG)g}{G(1 - g)}.$$

4. Si quaeratur quantaenam diametri x quoad pedem expressae sit sphaera, cujus involucri (cujus modo crassities negligatur) pes quadratus ponderet q ; ut in aere cujus pedis cubici pondus sit α , requiescat, si ipsa tali aere repleatur, cujus pedis cubici pondus β est: erit sphaerae volumen $\frac{x^3\pi}{6}$, superficies autem $x^2\pi$, atque pondus sphaerae cum involucre erit $\frac{x^3\pi\beta}{6} + x^2\pi q$, quod pondus aeris externi ejusdem voluminis = esse debet; itaque $\frac{x^3\pi\beta}{6} + x^2\pi q = \frac{x^3\pi\alpha}{6}$; adeoque dividendo per

$$x^2\pi, \text{ et ordinando, fit } \frac{x\beta}{6} + q - \frac{x\alpha}{6} = 0 =$$

$$x\left(\frac{\beta - \alpha}{6}\right) + q; \text{ et } x + q : \frac{\beta - \alpha}{6} = 0, \text{ atque } x =$$

$$\frac{-6q}{\beta - \alpha} = \frac{6q}{\alpha - \beta}.$$

5. Si pondus pedis cubici ferri sit q , et quaeratur, quantanam sit diameter x globi tormentarii ponderis P , quoad pedem expressa? Erit $\frac{x^3 \pi q}{6}$,

$$= P: \text{ adeoque } \frac{x^3 \pi q}{6} - P = 0, \text{ et } x^3 - P : \frac{\pi q}{6} = 0$$

$$\text{atque } x = \sqrt[3]{\frac{6P}{\pi q}}.$$

6. Si quaeratur ferrum ponderis P quantumnam pedis cubici sit? Sit x , et sit pondus pedis cubici aquae α , et gravitas spec. ferri sit γ , sitque

$$\frac{P}{\alpha} = \gamma; \text{ erit } x = \frac{\gamma}{\gamma}, \text{ nempe quo major gravitas specifica, volumen pro eodem pondere eo minus erit; itaque } x = \frac{P}{\alpha \gamma}.$$

7. Motus soni (ut lucis) aequabilis est; percurrat sonus in certo aere (certae temperaturae) sub 1" id est minuto secundo spatium s ; quaeri ut certus obex, rupes aut murus exstruendus, ad quam distantiam minimam esse debeat, ut certum hexametrum reddat? Distantia haec manifesto tanta x est, ut si ad versum pronunciandum n'' requirantur, prima syllaba pronunciatione finita redeat, adeoque haec viam ns percurrat; quae quum dupla sit distantiae obicis, erit $x = \frac{ns}{2}$

8. Si lapis in puteum demittatur, et effluerint n minuta secunda a dimissione lapidis usquequo sonus ejus aquam attingentis in aurem perveniat; quaeritur, quanta sit profunditas usque ad aquae superficiem?

Sit ea $= x$; temporis effluxi pars prior ad descensum lapidis requirebatur, quae $= \sqrt{\frac{x}{g}}$, et

altera ad ascensum soni, quae est $\frac{x}{s}$. Itaque

$$n = \sqrt{\frac{x}{g} + \frac{x}{s}}, \text{ adeoque } n - \frac{x}{s} = \sqrt{\frac{x}{g}}, \text{ et qua-}$$

$$\text{drando est } n^2 - \frac{2nx}{s} + \frac{x^2}{s^2} = \frac{x}{g}; \text{ unde } \frac{x^2}{s^2} +$$

$$x\left(\frac{-2n}{s} - \frac{1}{g}\right) + n^2 = 0, \text{ et } x^2 + x\left(-2ns - \frac{s}{g}\right) +$$

$n^2 s^2 = 0$, quod sub formam $x^2 + px + q = 0$ veniens resolvitur (346).

9. In thermometro est ad punctum regelationis glaciei aqueae 0 *Reaumur*, atque *Fahrenheit* 32 gradibus suis inferius posuit zerum; ad punctum ebullitionis aquae (sub altitudine barom. normali &c) sunt 80R et 212F; itaque 80R=180F, et 1R= $\frac{9F}{4}$, et 1F= $\frac{4R}{9}$. Si igitur quaeratur, nR quot F

facit? Sit xF , et n ° ; erit $nR = \frac{9nF}{4} + 32F = x$,

ita $-nR = -\frac{9nF}{4} + 32F = x$, nam e numero gradu-

um Fahrenheitianorum, quos Reaumuriani infra 0R efficerent, 32 sunt Fahrenheitio ° vi; consequi $x =$

$\frac{9n}{4} + 32$, si n generaliter numerum graduum R

sive ° sive $-$ denotet. Unde si quaeratur xF quot

R facit; erit $n = \frac{4}{9}(x-32)$.

10. Si quaeratur, index minutarius, quando assequetur horarium, si hic ad XII et is ad XI sit? Sit unitas temporis hora, et unitas spatii

$\frac{1}{12}$ ta pars peripheriae, in qua tanquam puncta directione eadem circulari moveri indices concipiantur; unitates hae arbitrarie ponuntur, sed celerius

tatis unitas tum determinata, nempe illa est, quam mobile tempore horae, $\frac{1}{12}$ tam peripheriae descri-

bit. Erit igitur 1 celeritas horarii, et 12 minutarii, et 720 celeritas secundarii, qui nempe sub hora 60ies percurrit peripheriam, quae = 12. Dicatur x tempus ad cuius finem horarius minutariusque in conjunctionem veniant. Spatium est in motu aequabili = celeritati per tempus multiplicatae, et via a minutario percurrenda est major via horarii, illi nempe id quoque quo retro est, decurrendum est, sit hoc a ; erit igitur $12x = a + x$, unde $11x - a = 0$, et $x = \frac{a}{11}$, quod pro casu dicto est =

$\frac{1}{11}$ tae unius horae, nam si minutarius ad XI sit,

$a = 1$ est. Si vero $a = 0$ sit, tum per $\frac{a}{11}$ non nisi

id exprimitur, quod abinde usque ad conjunctionem nullum tempus sit; sed proxima sequens conjunctio ita exhibetur, si a ponatur = 12, nempe statim post illud temporis punctum, quantumvis exiguum tempus sit, spatium minutarii 12ies majus erit, adeoque simul esse non poterunt, priusquam minutarius totum circulum percurrendo eodem perveniat, ubi in conjunctione erat, et praeterea etiam spatium horarii sub eo tempore percursum et postea usque ad conjunctionem percurrendum, exaequet; est autem (tempore a conjunctione priore ad proximam usque x dicto) spatium horarii x , minutarii autem $12x$, itaque $12x = 12 + x$ esse debet; unde $x = \frac{12}{11} = 1$ horae + $\frac{1}{11}$ tae unius horae.

Ita si secundarius ab horario distantia b retro sit; erit (tempore quod usque ad conjunctionem est, y dicto) $720y = b + y$, et $y = \frac{b}{719}$, et si $b = 0$

sit (ut antea), erit $y = \frac{12}{719}$, quod a conjunctione secundarii cum horario usque ad proximam est.

11. Si autem quaeratur; quandonam minutarius secundariusque cum horario simul in conjunctionem veniant: si tam a quam b sit o , tum manifesto tam x quam y numero certo effluxisse oportet, ut tres indices simul sint; nam si tres simul sint, tum et minutarius et secundarius in conjunctione cum horario est; itaque $nx = my$ (pro n, m integris) esse debet; adeoque $\frac{n \cdot 12}{11} = \frac{m \cdot 12}{719}$, seu

$$n = \frac{11m}{719}, \text{ cujus quum } 11 \text{ non metiatur numerum}$$

719, valor minimus integer est pro $m = 719$, et tum $n = 11$ erit; id est 11ies evenire novam minutarii cum horario conjunctionem oportet, sive 719ies conjunctionem secundarii cum horario; id est conjunctio trium proxima fiet ad finem 12 horarium. Ita si plures sint, cujusvis conjunctio cum tardissima prius quaerenda est.

12. Notandum vero est, posse hos indices quoque ita locari, ut nunquam in conjunctionem venire queant. Sit ex gr. secundarius cum horario in conjunctione, et distantia minutarii, qua retro est, sit $a = \frac{11}{2 \cdot 719}$, nempe contra structuram horologii

ponatur ita, immotis ceteris: erit tempus, quod usque ad proximam minutarii cum horario conjunctionem requiritur, (p. 358) $= \frac{1}{2 \cdot 719}$; atque (pro n, m

integris) deberet esse $\frac{1}{2 \cdot 719} + nx = my$, ut tam

minutarius quam secundarius cum horario in conjunctione sint; itaque $\frac{1}{2 \cdot 719} = \frac{12m}{719} - \frac{12n}{11}$, et hinc

(reducendo ad denom. eundem, et utrinque per 11. 719 multiplicando) $\frac{11.719}{2} = 12.11m - 719.12n$;

quod absurdum est, nam membrum ad dextram numerus integer est, ad laevam autem est =

$$11.(359 + \frac{1}{2}) = 11.359 + 5 + \frac{1}{2}.$$

13. Attentionem meretur etiam acuta *Zenonis* objectio, in qua germen primum progressionis geometricae, et seriei infinitae convergentis, limitisque, motus retardati, imo etiam dependentiae unius variabilis ab alia, atque problematis proximi resolutio reperitur.

Sit sub 1mo t ; 2do t , 3tio t , -- $(m-1)$ to t , m to t

Via testudinis	1	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^2}$	...	$\frac{1}{n^{m-2}}$	$\frac{1}{n^{m-1}}$
Achillis	0	1	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n^{m-3}}$	$\frac{1}{n^{m-2}}$

nempe si ea ponatur conditio, ut celeritas Achillis sit celeritate testudinis n ies major semper post 1mum t : dependebit Achillis celeritas in quovis t a celeritate testudinis, qua sub illo t ire libuerit; si itaque sub quovis sequente t , testudo celeritate n ies minori moveatur; Achilles sub quovis t quidem n ies maiorem viam describet, sed via testudinis erit usque ad finem cujusvis m ti t , summa

terminorum seriei superioris usque ad $\frac{1}{n^{m-1}}$ inclusi-

ve, via Achillis autem est summa seriei inferioris eousque; patet vero (ab 1 incipiendo) quemvis terminum p tum unius p to alterius aequalem esse, sed terminum sub $(m-1)$ to t superioris, m to inferioris esse aequalem; adeoque ad finem m ti t viae testudinis excessum supra viam Achillis esse semper = termino m to superioris. Itaque pro temporibus t aequalibus, dependentia ista celeritatis

Achillis posita, testudinem nunquam assequetur :
 at excessus iste nempe $\frac{1}{n^{m-1}} \sim 0$; et si tantum ad distantiam 1 ab Achille, motum incipere testudo ponatur, limes viae testudinis erit limes summae seriei (cujus exponens $-\frac{1}{n} < 1$ est) nempe $\frac{1}{n} : (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} : \frac{n-1}{n} = \frac{n}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1}$, et si testudo (sublata conditione priore) aequabiliter repat, et celeritas ejus sit 1, erit celeritas Achillis n , ac si tempus quo eam assequetur, x dicatur, erit $nx = x + 1$, unde $x = \frac{1}{n-1}$, quae limes viae testudinis erat.

Pluribus exemplis brevitatis necessaria supersedere jubet: Tyrones ipsi ad cubicam quoque problemata condere possunt.

§. 39. Ex (348) ad plures aequationis transformandae modos via aperitur: nempe 1mo ipsi x substituendo $y + a$ (ex gr. pro $a = 1$ erit $y + 1$, et $y - 1$ pro $a = -1$); ubi aequationis novae radici addendum a est, ut radix prioris aequationis prodeat; nam $x = y + a$.

2do. Si ponatur $my = x$; substituendo prodibit $y^n m^n + py^{n-1} m^{n-1} + qy^{n-2} m^{n-2} \dots sym + t = 0$; cujus aequationis (quae dividendo per m^n ordinatur) radix per m multiplicari debet, ut aequationis primitivae radix prodeat; nam $x = my$.

3tio. Si y ponatur $= mx$; substituendo $\frac{y}{m}$ ipsi x ubique, fiet aequatio primitiva $= \frac{y^n}{m^n} + \frac{py^{n-1}}{m^{n-1}} + \frac{qy^{n-2}}{m^{n-2}} \dots + \frac{sy}{m} + t = 0$, ubi radix hujus aequationis (quae per m^n multiplicata ordi-

natur), per m dividi debet, ut radix primitivæ prodeat; nam $x = \frac{y}{m}$. Si vero $m = -1$ sit, y (nempe radix novae aequationis) per -1 divisa (sive multiplicata) fit radix aequationis primitivæ; id est radices novae priorum oppositae sunt.

4to. Si $x = \frac{1}{y}$ ponatur; atque $\frac{1}{y}$ substituendo ipsi x , aequatio ordinetur; per radicem aequationis novae unitas dividenda erit, ut x nempe radix aequationis primitivæ prodeat; eritque maxima radix (ex gr. I^{va}) aequationis novae, minima prioris, nam quo majus y eo minus $\frac{1}{y}$ est.

5to. Atque (ex 1mo) si per theor. binomiale evolvantur termini aequationis novae, in quam prior nempe $(f)x=0$ mutata est: erit $(\alpha+y)$ ponendo pro x ,

$$(\alpha+y)^n = \alpha^n + n\alpha^{n-1}y - - - + P\alpha^2y^{n-2} + \alpha y^{n-1} + y^n$$

$$p(\alpha+y)^{n-1} = p[\alpha^{n-1} + (n-1)\alpha^{n-2}y - - - + R\alpha y^{n-2} + y^{n-1}]$$

$$q(\alpha+y)^{n-2} = q[\alpha^{n-2} + (n-2)\alpha^{n-3}y - - - + y^{n-2}]$$

$$- - - - -$$

$$s(\alpha+y) = s\alpha + sy$$

$t=t$. Quorum omnium summa, collectis coefficientibus potentiarum earundem ipsius y e columnis verticalibus; erit aequatio nova coefficientibus $A, B - - -$ dictis)

$y^n + Ay^{n-1} + By^{n-2} - - - + Sy + \alpha^n + p\alpha^{n-1} + q\alpha^{n-2} - - - + s\alpha + t$; ubi id per quod potentia 0 ipsius y multiplicata est, pro ultimo accipi potest, et ab $(f)x$ nonnisi in eo differt, quod α sit pro x ; unde hoc, substituendo ubique α ipsi x in $(f)x$, illico prodit; adeoque si $\alpha = 1$ sit, erit $1 + p + q - - - + t$, et si $\alpha = -1$ ponatur, erit $(-1)^n + p(-1)^{n-1} + q(-1)^{n-2} - - - + s + t$; quod mox dum radix aequationis altioris quaeretur, usui erit.

6to. In (p 359 : 3tio) si aequatio per m^n multiplicetur; fiet $y^n + mpy^{n-1} + m^2qy^{n-2} + m^{n-1}sy + m^{n-2}t = 0$; et manifesto si quis coëfficiens fractus sit, denominatore m praeditus, is a denominatore liberabitur, cum quilibet terminus per potentiam integram ipsius m multiplicetur. Itaque si minimus talis numerus eligatur, quem coefficientis cujusvis (etiam ipsius y^0) ad terminos minimos reducti denominator metitur, atque pro m is sumatur, quivis coëfficiens si antea quantitas realis et commensurabilis fuerit, numerus integer evadet: atque postmodum nonnisi de tali casu sermo erit.

Notandum tamen est, uti e deductione patet; heic nullam potentiam ipsius y negligendam esse, etsi coëfficiens alicujus zerus fuerit.

§. 39. Posito (quod vix credibile esset a Geometris pluribus celebribus per se evidens visum fuisse) aequationem cujusvis gradus radice aliqua (si non reali, saltem imaginaria) gaudere; facile sequitur aequationem gradus n , radices numero n , nec plures paucioresve habere. Nempe quidcunque sit a , est

$$x^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + a^3x^{n-4} + \dots + a^{n-1}x^0) + a^n$$

et in genere $\beta x^\mu =$

$$(x - a)[\beta x^{\mu-1} + \beta ax^{\mu-2} + \beta a^2x^{\mu-3} + \dots + \beta a^{\mu-1}x^0] + \beta a^\mu;$$

nam multiplicando prius per x , tum per $-a$ prodibit

$$\beta x^\mu + \beta ax^{\mu-1} + \beta a^2x^{\mu-2} + \dots + \beta a^{\mu-1}x + \beta a^\mu, \text{ et}$$

$$-\beta ax^{\mu-1} - \beta a^2x^{\mu-2} - \dots - \beta a^{\mu-1}x - \beta a^\mu; \text{ quod} \\ = \beta x^\mu \text{ est, pro quovis valore ipsius } x.$$

Tyrones, ipsi n possunt ex gr. 5 substituere; ut clarius perspiciant.

$$\text{Est vero hinc } x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \dots + sx + t = \\ (x - a)[x^{n-1} + (a + p)x^{n-2} + (a^2 + ap + q)x^{n-3} + \\ (a^3 + a^2p + aq + r)x^{n-4} + \dots + (a^{n-1} + a^{n-2}p + \dots + ar + s)] \\ + a^n + pa^{n-1} + qa^{n-2} + \dots + sa + t. \text{ Ratio e sequenti}$$

exemplo in quo etiam n ipsi 5 substitui potest, facile perspicitur.

Sit $(f)x = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + ta^0$; erit

$$x^5 = (x-a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4) + a^5$$

$$px^4 = (x-a)(px^3 + apx^2 + a^2px + pa^3) + pa^4$$

$$qx^3 = (x-a)(qx^2 + aqx + qa^2) + qa^3$$

$$rx^2 = (x-a)(rx + ra) + ra^2$$

$$sx = (x-a)s + sa$$

$$t = t$$

Unde collectis (e columnis verticalibus) ejusdem potentiae ipsius x coefficientibus, erit $(f)x = (x-a)[x^4 + (a+p)x^3 + (a^2+ap+q)x^2 + (a^3+a^2p+aq+r)x + a^4+pa^3+qa^2+ra+s]x^0 + a^5 + pa^4 + qa^3 + ra^2 + sa + t$. Dicatur $(a)x$ id quod intra parentheses est, et α id quod post parentheses majorem est, quod $= 0$ est, si a radix aequationis $(f)x = 0$ est; patet vero, quod $(a)x$ praebeat aequationem $(n-1)$ ti gradus, si $(f)x$ fuerit n ti.

Pariter erit $(a)x = (x-b)(b)x + \beta$, et $(b)x = (x-c)(c)x + \gamma$, et ita porro donec ad tale ex gr. $(x-d)(d)x + \delta$ deveniatur, ut quum $(a)x, (b)x, (c)x, \dots$ aequationes gradus in quavis sequente, unitate decrescentes praebeant, demum aliqua $(d)x$ primi gradus prodeat.

Quid autem per $(b)x, \beta, (c)x, \gamma, \dots$ intelligatur, facile ex ipso $(a)x$ et α perspicitur: nempe si primus coefficientis in $(a)x$ dicatur p' , 2dus q' &c., erit (applicando ad casum proximum), $\beta = b^4 + p'b^3 + q'b^2 + r'b + s'$ (per s' coefficientem ipsius x^0 in $(a)x$ intelligendo); unde reliqua patent.

Itaque pro quibusvis valoribus ipsorum $x, a, b, c, \dots, d$, est $(f)x = (x-a)(a)x + \alpha = (x-a)[(x-b)(b)x + \beta] + \alpha$; quod est $= (x-a)(x-b)(b)x$, si pro valore α ipsius x sit

$(f)x=0$: et pro valore b ipsius x sit $(a)x=0$: nam
 tum $\alpha=a^5+pa^4+qa^3+ra^2+sa+t=0$, et $\beta=b^4+p'b^3+q'b^2+r'b+s'=0$. Ita porro si c radix ipsius $(c)x=0$
 sit, pro $x=c$ fit $\gamma=0$, et ita porro, ut demum pro
 $x=d$ fiat $\delta=0$, adeoque quodvis ipsorum $\alpha, \beta, \gamma \dots \delta$
 $=0$ sit; itaque $(f)x=(x-a)(x-b)(x-c)\dots$
 $(x-d)(d)x$ sit; atque $(d)x=(x-e) \cdot 1+(\varepsilon=0)$,
 si 1mi gradus fiat $(d)x=0$.

Atque hinc manifesto, cuivis ex gr. ipso-
 rum $a, b, c \dots d, e$ ponatur x aequale, $(f)x=0$ e-
 rit, et b radix aequationis $(f)x=0$ erit; ac si n
 ex gr. 5 fuerit, prodeunte $x-a$, functio $(a)x$ quar-
 ti gradus facta est, et hinc prodeunte $x-b$, pro-
 diit $(b)x$ gradus 3ti, et hinc prodeunte $x-c$ pro-
 diit $(c)x$ gradus 2di, atque hinc prodeunte $x-d$
 evadit $(d)x$ gradus 1mi, et hinc prodeunte $x-e$,
 ipsa a, b, c, d, e pro casu proximo efficient
 quinque radices, nempe radices numero gradus ipsi-
 us $(f)x=0$.

Consequ. si habuerit $(f)x=0$ aequatio gra-
 dus n unam radicem; radices numero n habere
 constat, quarum tamen possunt aliquae, imo omnes
 ut patebit, esse aequales: at quaeritur, num plures
 habere possit? Responsio facilis est: nam si illae
 nulli dictarum (in casu dicto quinque) radicum $=$
 esset; substituendo k ipsi x , fieret
 $0=(f)k=(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)(k-e)$, quod
 fieri nequit, nisi factor aliquis producti zerus sit,
 id est k alicui ipsorum a, b, c, d, e aequalis sit.

Solet hoc inde deduci, quod $\frac{\beta(x^\mu - a^\mu)}{x-a}$

sit $=\beta(x^{\mu-1} + ax^{\mu-2} \dots + ax + a^{\mu-1})$, uti peracta
 divisione (130) patet; atque hinc evolutis hoc
 modo terminis $\frac{x^n - a^n}{x-a}$, $\frac{px^{n-1} - pa^{n-1}}{x-a}$, $\frac{qx^{n-2} - qa^{n-2}}{x-a}$

$\dots$ usque ad $\frac{sx - sa}{x-a}$, et denuo multiplicando quo-

tum per $x-a$, atque addendo utrinque $a^n + pa^{n-1} + qa^{n-2} \dots + sa + t$, prodibit plane id quod supra. At pro $x=a$, fit tam dividendus quam divisor $=0$, divisionem vero plane pro aequationis radice $a=x$ per $x-a$ peragi oportet: interim (per 287)

fit tum $\frac{0}{0} = na^{n-1} + (n-1)pa^{n-2} + (n-2)qa^{n-3} \dots$

$+s$, nempe dum $x \sim a$, quotus ad hunc limitem tendit, quem coefficienti priori ipsius $(x-a)$ substituendo in eo a ipsi x , aequalem esse facile demonstrari potest, quod Tyronibus relinquatur; exemplo pro $p=5$ rem illustrare possunt.

Tum item si b ponendo pro a in nova aequatione, valor hujus 0 fiat, et per $a-b$ fiat divisio pro $a=b$, omnia perinde sequi patet: sed methodus prior clarior faciliorque est.

Si igitur aequatio gradus n gaudeat una radice a , erit e numero n factoribus ejusmodi uti $x-a$, $x-b \dots$ conflata, et quaecvis literarum in iis ab x diversarum, radix erit, nec ulla alia ab his diversa datur: ac conversim quoque si

$(x-a)(x-b) \dots = 0$ erit, quodcunque ipsorum $a, b \dots$ ponatur pro x ; ex gr. $(a-a)(a-b) \dots = 0$, aut $(b-a)(b-b) \dots = 0$, &c; quaecunque et quotvis quantitates $a, b \dots$ fuerint, $(x-a)(x-b) \dots$, si in eo ipsi x ipsorum $a, b \dots$ quodvis substituat, $=0$ fiet; poterunt autem $a, b \dots$ omnes aequales quoque accipi, uti $(x-a)(x-a) = x^2 - 2ax + a^2$ gaudet duabus quidem hoc sensu radicibus, sed quae aequales sunt.

Si itaque aequatio productum talium factorum sit; coefficientes ipsius x a radicibus dependere facile perspicitur; et ultro sequitur in legem qua formantur, inquirere. Nempe

2do. Erat etiam (pag. 137) quaestio de facto plurium binomiorum. Multiplicando $x-a$ per $x-b$, prodit $x^2 + (-a-b)x + ab$, et hoc multiplicando

per $x-c$
 fiet $x^3 + (-a-b-c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$

et idem porro continuando donec libuerit, eou-
sque patet: quod (si literae ab x diversae eo si-
gno accipiantur, uti in factoribus $x-a$, $x-b$, ---
sunt, denotantes radicum opposita), coefficientis
primus sit summa literarum dictarum, 2^{us} sit sum-
ma amborum, 3^{ius} summa ternorum, m ^{us} summa
 m ionum, quae e literis dictis accipi possunt, et
quidem ita ut quaevis m io factum ex iis literis sit
e quibus constat; ex gr. pro $m=2$, si ambo e li-
teris $-a$ et $-b$ sit, accipiat $(-a) \cdot (-b) = ab$;
ad finem vero coefficientis ipsius x^0 sit factum ex
omnibus literis dictis; quod igitur semel tantum
est.

Si vero de prodeunte P e numero n factori-
bus ejusmodi, valeat lex; valet etiamsi $(n+1)$ ^{us}
factor accedat. Nam sit novus factor $x-d$, et sit
 $-a=a'$, $-b=b'$, ---, $-d=d'$, atque sit coefficientis
 m ^{us} M , = summae m ionum quae ex n literis a', b' ---
accipi possunt, et $(m+1)$ ^{us} coefficientis sit N =
summae $(m+1)$ ionum, quae ex iisdem a', b' --- (ex-
cluso d') accipi possunt. Multiplicato P per ter-
minum priorem ipsius $x-d$, augebitur exponens
ipsius x unitate in quovis termino, adeoque et ae-
quatio uno altior prodibit; factor $-d$ scilicet ex-
ponentes ipsius x non mutat. Est autem in P ter-
minus m ^{us} (haud numerato primo ubi potentia al-
tissima ipsius x cum coefficiente 1 est), $= Mx^{n-m}$,
et sequens est $= Nx^{n-m-1}$; atque multiplicando P
per $x-d$, potentia exponentis $n-m$ ipsius x non
nisi ex Mx^{n-m} per $-d$, et Nx^{n-m-1} per x multi-
plicato prodire potest; terminus itaque facti, in
quo x^{n-m} est, fiet $= (N+d'M)x^{n-m}$; est autem hic
terminus $(m+1)$ ^{us} in novo facto ab x^{n+1} (excluso
hoc) numerando usque ad x^{n-m} ; atque N continet
omnes $(m+1)$ iones quae ex a', b' --- excluso d' ac-
cipi possunt, M vero omnes m iones ex iisdem, quae
singulae per d' multiplicatae exhibent omnes
 $(m+1)$ iones, ex a', b' --- d' , quae ipsum d' continent.

Quod ultimum attinet; is dum per d' multiplicatur, prodit $a' b' \dots d'$; penultimus autem per d' et ultimus per x multiplicatus, dat primam potentiam ipsius x , et sub formula dicta generali continetur.

3tio. Si aequatio in talem (per 359) transformata sit, ut quivis coefficientium numerus integer sit: tum si radix quantitas cum unitate commensurabilis sit, numerus integer, et quidem e factoribus termini ultimi est. Nam factorem termini ultimi esse (e 364) patet; si vero radix non esset numerus integer, sit $\frac{a}{b}$ pro a et b numeris inter se primis, quos nullus alius integer praeter 1 metitur. Substituto $\frac{a}{b}$ ipsi x , esset

$\frac{a^n}{b^n} + \frac{pa^{n-1}}{b^{n-1}} + \frac{qa^{n-2}}{b^{n-2}} \dots + \frac{ra}{b} + s = 0$, et per b^n multiplicando, est

$$a^n + bpa^{n-1} + b^2qa^{n-2} \dots + b^{n-1}ra + b^ns = 0, \text{ et hinc}$$

$$\frac{a^n}{b} = -[pa^{n-1} + bqa^{n-2} \dots + b^{n-2}ra + b^{n-1}s];$$

quod absurdum est, nam b non metitur numerum a^n , quia (ut paulo inferius demonstrabitur) numerus primus b inter factores ipsius $aaa \dots$ adesse deberet &c; membrum aequationis ad dextram autem manens integer est. Itaque radix realis, si quantitas commensurabilis sit, numerus integer est.

Hinc modo sequente investigari potest, num radix aequationis realis commensurabilis detur: nempe factoribus termini ultimi integris ipsi x substitutis, videri potest num valor functionis ad 0 redigatur. Ceterum si quis factorum integrorum termini ultimi radix sit; ad finem operationis sequentis prodire zerum, ex operatione ipsa patet.

Sit ex gr. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, atque sit a radix; erit $a^3 + pa^2 + qa = -r$; adeoque $a^2 + pa + q =$

$\frac{-r}{a}$, ubi $\frac{r}{a}$ integer est, dicatur r' . Est porro

$a^2 + ap = -r' - q$, et $a + p = \frac{-(r' + q)}{a}$, ubi $\frac{r' + q}{a}$ pariter integer est, dicatur q' ; est demum $a = -q' - p$, et $\frac{a}{a} = \frac{-(q' + p)}{a} = 1$, seu $\frac{q' + p}{a} + 1 = 0$, seu $\frac{q' + p}{a} = -1$.

Ex gr. Sit $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$; erit substituendo 2 ipsi x (quae radix aequationis est), quilibet quorum

torum $\frac{r}{a}$, $\frac{r' + q}{a}$, $\frac{q' + p}{a}$... numerus integer, et

ultimus $= -1$ est, nempe $\frac{8}{2} = 4$, $\frac{4 - 10}{2} = -3$,

$\frac{-3 + 1}{2} = -1$. Nisi quilibet quorum integer et ultimus $= -1$ sit, numerus substitutus radix esse nequit.

4to. Si aequationis ordinatae (gradus μ completae, adeoque ex $\mu + 1$ terminis constantis, per $(f)x = 0$ designatae) coefficientes omnes, abstrahendo a signo praeposito, $\pm$ vi, atque radices omnes reales sint: tot *transitus* (ex $+$ in $-$ vel vice versa) erunt, quot radices $\pm$ vae, et tot *successiones* (nempe $++$ aut $--$) quot radices $-$ vae. Successiones signorum aequalium dicuntur breviter *successiones*, uti successiones signorum inaequalium *transitus* dicuntur.

Nam per a, b ... $\pm$ va intelligendo, aequatio formae $x - a$, aut formae $x + b$, *simplex* dicitur, et quidem prior $\pm$ va, posterior $\mp$ va; quum aequationis e talibus factoribus conflatae prior, radicem $\pm$ vam a , posterior $\mp$ vam $-b$ procuret.

Prodibit autem aequatio eadem, quocunque ordine multiplicentur aequationes simplices, adeoque etsi prius tantum $\pm$ vae multiplicentur, et factum F per aliquam aequ. simplicem $\mp$ vam, et quod pro-

dit per novam — vam, et hoc item per novam (si adfuerit) multiplicentur, donec nulla supersit; aut inverse factum f e — vis per + vas simplices modo dicto multiplicetur.

Si jam numerus aequationum simplicium (adeoque radicum) + varum sit n , et numerus — varum adeoque numerus radicum + varum sit m ; atque demonstretur 1mo f per aequ. simplicem + vam multiplicatam unum transitum novum acquirere, et quodvis factum ita prodiens per aequ. simplicem + vam multiplicatum, unum transitum novum nancisci; multiplicatione per omnes aequationes simplices consummata, patebit, in $(f)x$ ad minimum n transitus dari. Ita si demonstretur 2do F per aequationem simplicem — vam multiplicatum unam successionem acquirere; patebit, in $(f)x$ ad minimum m successiones adesse. Atque quum numerus omnium successionum, (sive aequalium sive inaequalium) in $(f)x$ sit $n+m=\mu$, quum $\mu+1$ termini sint; plures transitus quam n dari nequeunt, nam tum m nempe numerus successionum imminueretur, quem dari constat; n transitus vero certo adsunt; ita m successiones adsunt, nec plures esse possunt, quia tum n numerus transituum imminueretur. Consequ. plane n transitus (nempe quot) radices + vae); et m successiones erunt, (nempe quot radices — vae).

Itaque nonnisi 1mum et 2dum demonstranda veniunt.

Quoad 1mum: Sint multiplicandi signa quocunque ordine, et multiplicator sit aequatio simplex + va, ex gr. $x-a$ (pro a + vo); erit si tantum signa coefficientium scribantur, et in facto coefficientes potentiae cujusvis ipsius x addantur, schema sequens; notando, quod coefficientis termini 1mi in utroque factore sit 1, atque terminus 1mus facti sit 1.1, coefficientis uno altioris potentiae ipsius x ; postea vero signa plane multiplicandi in linea facti super ore describantur, quum multipli-

catio per x omnia signa immutata relinquat; multiplicando per $-a$ autem, eadem signa in contraria mutata, sub 2^{do} superioris incipiendo, uno ulterius terminentur; atque quodvis v tum seriei superioris et $(v-1)$ tum inferioris simul coefficientem potentiae exponentis $\mu-v+2$ ipsius x efficiant; quum nempe potentiae ipsius x in multiplicando, quovis termino ulterius ad dextram unitate decrescant, adeoque si 1^{mus} terminus sit x^μ , in termino v to est potentia ipsius x exponentis $\mu-v+1$; et idem terminus per priorem multiplicatoris terminum dat $x^{\mu-v}+2$, ac potentia eadem ipsius x duntaxat e multiplicatione termini $(v-1)$ ti multiplicandi per terminum 2^{dum} multiplicatoris prodeat.

Quibus praemissis patet in schemate sequente

+	—	—	+	—	+	+	—
+	—						
+	—	—	+	—	+	+	—

— + + — + — — + qualisvis fuerit signorum ordo in multiplicando, quemvis transitum, qui in multiplicando est, transitum in facto parere, et praeterea unum transitum accedere. Nam si in multiplicando fuerit + — aut — +, fiet e primo, — e posteriore + +; atque ubi in multiplicando prima vice occurrit —, adeoque primus transitus est, fiet in multiplicando + — et — in facto; adeoque terminus —^{vus}, qui cum termino primo transitum efficiet; ita postea veniens primus +^{vus} in multiplicando, producet 2^{dum} transitum in multiplicando, et 2^{dum} in facto, quum in multiplicando tum — + efficiat + in facto; et ita porro quivis novus transitus in multiplicando pariet novum in facto; nam si ex gr. prodeat in facto —, sed antequam prodierit +, jam terminus +^{vus} prodiret, transitus evenit.

Consequ. quivis transitus multiplicandi, transitum in facto parit. Sed praeterea adhuc unus transitus in facto accedit: nam si in facto alicubi tale $\equiv$ occurrat, post quod nullum $\frac{+}{+}$ est; tum in multiplicando post illud $+$ — per quod illud $\equiv$ productum est, usque ad ultimum, terminum quemvis $\equiv$ um esse oportet; nam secus $- +$ produceret $\frac{+}{+}$; si vero in facto tale $\frac{+}{+}$ sit post quod nullum $\equiv$ est, tum in multiplicando abinde termini usque ad ultimum $\frac{+}{+}$ vi sunt, secus $+ -$ produceret $\equiv$, et post $\frac{+}{+}$ esset $\equiv$ contra hyp. Itaque quum terminus ultimus seriei superioris et inferioris, e termino eodem (nempe ultimo multiplicandi) prodeant, nempe superior per $+ x$, inferior per $-$ multiplicando; in utroque casu, sive $\equiv$ sive $\frac{+}{+}$ occurrat in facto ultima vice, a termino seriei superioris ad ultimum inferioris unus transitus erit; in casu primo a $\equiv$ vo ad $\frac{+}{+}$ um in altero casu a $\frac{+}{+}$ vo ad $\equiv$ um. Consequ. semper ubi per aequationem simplicem $\frac{+}{+}$ um multiplicatur, factum ad minimum unum transitum acquirit.

Quod 2dum attinet: qualiacunque signa multiplicandi se invicem excipiant; multiplicando per aequationem simplicem $\equiv$ um, ex gr. $x+2=0$, erunt signa multiplicatoris $+ +$, adeoque ex gr. schema sequens erit.

$$\begin{array}{cccccc}
 + & - & - & + & + & - \\
 + & + & & & & \\
 \hline
 + & - & - & + & + & - \\
 & + & - & - & + & + & -
 \end{array}$$

Nempe series signorum multiplicandi ipsa est series facti tam superior quam inferior, terminis hujus uno ad dextram protrusis.

Ubi in facto $\bar{+}$ aut $\bar{+}$ est, in casu primo co-
efficiens $-$ in altero $+$ est, ita termini ultimi in-
ferioris, qui solus coëfficiens ipsius x^9 est, signum
quod ibidem est manet; ubi autem $\bar{+}$ aut $\bar{+}$ est, a
magnitudine coefficientium pendet, quodnam si-
gnum terminus is nanciscatur.

Sed (uti *Segner* ingeniose animadvertit), si-
gnum in facto manet id, quod in serie superiore
est, donec post $\bar{+}$ tale $\bar{+}$ aut post $\bar{+}$ tale $\bar{+}$, aut
post $\bar{+}$ tale $\bar{+}$ aut post $\bar{+}$ tale $\bar{+}$ sequatur; ut si
pro casu 1mo in $\bar{+}$, pro 2do in $\bar{+}$, pro 3tio in $\bar{+}$,
pro 4to in $\bar{+}$, coëfficiens inferior sit major superi-
ore, atque pro casu 3tio in $\bar{+}$ quod ante $\bar{+}$ est, et
pro casu 4to in $\bar{+}$ quod ante $\bar{+}$ est, coëfficiens su-
perior sit major inferiore; manifesto enim in his
solis casibus fit *descensus* a signo seriei superioris
ad sequentem inferioris; uti schemata haec exhibent.

Patet vero in omnibus his casibus descensum
successionem parere, a $-$ ad $-$ vel a $+$ ad $+$
eundo.

Post signum autem ad quod descensum est,
series signorum inferius plane illa sequitur, quae
superius post signum a quo descensum est; adhuc-
dum itaque numerus successionum uno auctus est;
manet vero in facto signum seriei inferioris abin-
de, donec post $\bar{+}$ tale $\bar{+}$ aut post $\bar{+}$ tale $\bar{+}$, aut
post $\bar{+}$ tale $\bar{+}$ vel inverse sequatur, ut pro casu 1mo in
 $\bar{+}$, pro 2do in $\bar{+}$ pro 3tio in $\bar{+}$, pro 4to in $\bar{+}$ coëffi-

ciens superior major sit inferiore, etquidem ita ut pro casu 3tio in $\bar{+}$ pro 4to in $\bar{+}$ coefficiens inferior sit major superiore; in his enim casibus fiet *ascensus* a *Segnero* dictus, nempe a signo seriei inferioris ad signum superioris ascendendum erit; uti schemata haec exhibent.

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} - \\ - \end{array} \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & \begin{array}{c} + \\ + \end{array} \begin{array}{c} - \\ + \end{array} & \begin{array}{c} - \\ + \end{array} \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \begin{array}{c} - \\ + \end{array} \end{array}$$

Ubi item patet in duobus casibus prioribus unam successionem, quae in inferiore (adeoque in multiplicando quoque est) destrui; quum in casu primo pro $- -$ fiat $- +$, in 2do pro $+ +$ veniat $+ -$; in 2 posterioribus vero transitum mutari in successionem.

Itaque si prius accesserit una successio, hic una quae in multiplicando adfuit, destrui potest, usque ad signum, ad quod ascensum est.

Post ascensum eadem signorum series, quae in multiplicando a signo respondente est, sequitur; atque dicta denno repetuntur; patetque quotvis descensus fuerint, totidem successiones oriri tales quae in multiplicando non erant, at vero per quemvis ascensum posse successionem aliquam quae in multiplicando adest, destrui.

Interim descensuum numerus in omni casu numerum ascensuum uno superat; nam aut ascensus nullus est, aut datur ultimus; si nullus sit, tum si alius descensus non detur, saltem ab ultimo signo superioris ad ultimum inferioris illi aequale descendendo una successio nova producitur, quae in multiplicando non fuit; si detur ascensus, sive unus sive plures fuerint, erit ultimus, nempe ultra quem alius non datur; atque tum is aut ad signum ultimum seriei superioris ascendet, aut ad aliquem ante ultimum; in casu posteriore manebunt signa seriei superioris sequentia usque ad ultimum, et in utroque casu accedet nova successio, descenden-

do ab ultimo signo superioris ad ultimum inferioris illi aequale.

Unde si in multiplicando fuerint successiones numero N , et in facto descensuum numerus sit β , ascensuum numerus erit $\beta-1$; atque etsi quovis ascensu N uno minor fieret, adeoque ex N fieret $N-(\beta-1)$, idem per numerum descensuum fieret $N-(\beta-1)+\beta=N+1$. Itaque semper ubi nova radix $-va$ infertur, multiplicatione per aequationem simplicem $-vam$, factum ad minimum unam successionem acquirit.

Atque hinc per superius dicta assertum patet.

Ex gr. $x^3+x^2-10x+8$ unam successionem et 2 transitus, atque 2 radices $\mp vas$ 1 et 2 ac unam $-vam$ -4 habet; $y^3-y^2-10y-8$ vero uno transitu et 2 successionebus gaudens, unam $\mp vam$ radicem 4 et duas $-vas$ -1 et -2 habet. Nempe radices posterioris sunt radicibus prioris plane oppositae; quum substituto (360) $-y$ ipsi x , fiat $-y^3+y^2+10y+8=0$, et dividendo per -1 , (ut potentia suprema a signo $-$ liberetur); erit $y^3-y^2-10y-8=0$, cujus radix y est opposita radici prioris, nempe $y=-x$. Si exponens potentiae supremae par sit, tum termini ad exponentes pares manifesto manent, et tantum termini in quibus exponentes impares sunt, mutantur in opposita; ubi vero exponens supremus impar est, tantum termini in quibus exponens par est (haud excepto zero) mutantur in opposita; ut radices novae aequationis, priorum oppositae reddantur. Ex gr. $x^4+6x^3-5x^2-42x+40$ habet radices 1, 2, -4 , -5 , et radices ipsius $x^4-6x^3-5x^2+42x+40$ sunt -1 , -2 , et 4 ac 5.

Per praec. igitur si radices omnes reales sint, quot sint $\mp vae$ et $-vae$ dignoscitur; observando interim, quod si quis terminus desit, 0 tam $+$ quam $-$ accipi possit; et si per hoc numerus radicum $\mp varum$ et $-varum$ diverso modo indicaretur, radicem imaginariam adesse constet.

7mo. Si radix commensurabilis sit, illam numerum integrum (per 367), et factorem termini ultimi (per 366) esse constat. Itaque inter factores termini ultimi quaerendus est, qui functionem $(f)x = 0$ reddat, si is in ea ipsi x ubique substituatur; uti in exemplo proximo, terminus ultimus est 40, et radices (quum omnes commensurabiles sint) e factoribus integris ipsius 40 sunt.

Si tamen terminus ultimus t nimis magnus sit, multisque factoribus gaudeat; facile poterit (per 359) aequatio, substituto $y+a$ ipsi x in $(f)x$, in talem transformari, cujus radici y addendum a est, ut x prodeat; adeoque e factoribus ipsius t illi tantum tentandi erunt, num radices ipsius $(f)x$ sint, qui subtracto a factores termini ultimi aequationis novae sunt. Saepius sufficit $a = +1$ vel -1 accipere; et si aequationum pro $x = y+a$, et $x = y'-a$ transformatarum ultimi dicantur U et u ; patet factorem k ipsius t radicem ipsius $(f)x$ non nisi tunc esse posse, si detur ipsius U factor talis y , et factor talis y' ipsius u , ut $k = y+a = y'-a$ sit.

Ex gr. Pro $x^4 - 40x^3 + 595x^2 - 3900x + 9504 = 0$, fit substituendo $y+10$ ipsi x , aequationis novae terminus ultimus $= 4$, cujus 1, 2, -1 , -2 factores; atque $10+1$, $10+2$, $10-1$, $10-2$ radices aequationis prioris sunt.

8vo. Si vero radix realis quidem, sed non sit cum 1 commensurabilis: tum quaerantur talia a et b , inter quae radicem cadere oportet; atque ipsis a et b quanto propius ad se invicem latis, radix inter ea cadens modo dicendo approximetur. Si $(f)a \mp \text{vum}$ et $(f)b \mp \text{vum}$ sit, demonstrabitur paulo inferius, $(f)x = 0$ radice reali inter a et b cadente gaudere; itaque talia a et b a se invicem quo minus differentia reperienda sunt. Substituendo nempe ipsi x pro radice $\mp \text{va}$ numeros 0, 1, 2... et pro radice $\mp \text{va}$ 0, -1 , -2 ... si ex gr. $(f)x$ sit $x^3 - 3x^2 - 17x + 43$; si sub quemque ponatur va-

lor ipsius $(f)x$ substituto illo numero ipsi x ; erit
 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,$
 $-1, 40, 57, 56, 43, 24, 5, -8, -9, 8$
 itaque unam radicem $\mp$ vam inter 2 et 3, alteram
 inter 4 et 5, 3tiam vero $\mp$ vam inter -3 et -4 ca-
 dere constat.

Est autem etiam, ut substituendo numeros ipsi
 x , decrescat aliquamdiu $(f)x$, et tum item cre-
 scat, manente signo eodem: ex gr. sit $(f)x = x^3$
 $-2x^2 - 21x + 55$; erunt

numeri $----- -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 --$
 valores ipsius $(f)x -- 81, 73, 55, 33, 13 \quad 1 \quad 3 --$

atque radix $\mp$ va erit (si quidem realis fuerit) in-
 ter 2 et 3, aut inter 3 et 4; tentandum in tali ca-
 su est, addendo $\pm \omega < 1$ in hoc casu ipsi 3, num
 $(f)(3 \pm \omega) \sim 0$; quo in casu $3 \pm \omega$ eo propius
 radici erit, quo minus $(f)(3 \pm \omega)$ erit. Si vero

$(f)(3 \pm \omega)$ neutiquam ~ 0 , tum radices omnes
 imaginariae erunt, siquidem $(f)x$ abinde signo eo-
 dem utrinque crescat semper, ab illo termino se-
 riei tam ad dextram quam ad laevam eundo. In

hoc quidem casu, pro $\omega = \frac{1}{2}$ est $(f)(3 + \frac{1}{2}) =$

$-\frac{1}{8}$; adeoque radix inter $3 + \frac{1}{2}$ et 4 est.

Omnia haec autem illustrantur, si x tanquam
 abscissa, et $(f)x = y$ ordinata abscissae x respon-
 dens consideretur, et quaeratur tale c ut $(f)c = y$
 $= 0$ sit; atque ad ductum lineae per extremitates
 ordinarum descriptae reflectatur; nempe si a fi-
 ne abscissae a puncto in lineam abscissarum lato,
 donec ex a fiat b ; posito interea $(f)x$ semper rea-
 le finitum esse, transibit linea ex una plaga in alte-
 ram per partem abscissae inter fines ipsarum a et
 b , si $(f)a \mp$ et $(f)b =$ sit.

9no. Ut tamen molestia tot numeros tentandi
 minuatur; e re est certos nosse, intra quos tenta-

re sufficiat; nec de aliis nisi $\pm$ vis radicibus agere necesse est, quum aequatio facile (359) in talem mutetur, cujus radices $\pm$ vae 'per -1 multiplicatae, radices $\mp$ vas prioris praebeant; dicuntur autem *limites radicum* $\pm$ varum, duo valores ejusmodi, quorum unus major quavis radice illius aequationis $\pm$ va, alter vero minor quavis radice $\pm$ va ejusdem sit.

Si quaevis radix $\pm$ va < 1 fuerit, tum 1 est unus limes. Consideretur itaque radix $\pm$ va unitate major pro aequatione gradus n .

Si $-M$ coefficientis $\mp$ vus maximus sit; et idem $-M$ sit coefficientis termini m ti (haud numerato primo);

erit terminus m tus $= -Mx^{n-m}$; et si $x > 1 + \sqrt[m]{M}$ accipiatur, pro radice $\pm$ va et > 1 , valor ipsius $(f)x$ certo $\pm$ erit. Nam tum summa terminorum (simul cum illo in quo x^0 est), etsi omnes coefficientes seorsim $= -M$ essent, esset $\frac{-M(x^{n-m+1} - 1)}{x - 1}$;

(si $-M$ primus, et x exponens ponatur per 131); quo si x^n majus sit, $(f)x$ $\pm$ erit, nempe si ipsi x tale

α $\pm$ vum substituatur. Fiet vero hoc, si $\alpha > 1 + \sqrt[m]{M}$ sit;

nam tum pro $(\alpha > 1)$ erit $\alpha - 1 > \sqrt[m]{M}$, et $(\alpha - 1)^m > M$, atque $(\alpha - 1)\alpha^{m-1} > M$; et hinc multiplicando utrinque per $\frac{\alpha^{n-m+1}}{\alpha - 1}$, erit $\alpha^n > \frac{M\alpha^{n-m+1}}{\alpha - 1}$; quod

si fuerit, tanto fortius fiet $\alpha^n > \frac{M\alpha^{n-m+1} - 1}{\alpha - 1}$;

consequ. $(f)x$ $\pm$ erit, si ipsi x substituatur $\alpha > 1 + \sqrt[m]{M}$. Facile hoc ad exempla proxime allata applicatur.

10mo. Ita si (360) transformetur aequatio, ponendo $x = \frac{1}{y}$, atque aequatio ordinetur: reperita tali quantitate Q , qua si y majus accipiatur,

valor functionis novae $\pm$ sit; erit (pro $Q' > Q$),
 $\frac{1}{Q'} < \frac{1}{y}$, per y radicem $\pm_{\text{vam}}$ novae aequatio-
 nis intelligendo; adeoque $\frac{1}{Q'} < x$, nempe $\frac{1}{Q'}$ est
 minima radice $\pm_{\text{va}}$ aequationis minor. Itaque in
 praec. tale prodierat, quo radix major esse nequit,
 quia tum $(f)x$ fieret $\pm$ et non o , hic autem tale
 prodiit, quo x majus est.

11mo. Quoad radices $-$ vas autem transforman-
 da aequatio in talem est (per 373), cujus radices
 $\pm_{\text{vae}}$ per -1 multiplicatae, exhibeant radices $-$ vas
 prioris; atque limitibus radicum $\pm_{\text{varum}}$ aequatio-
 nis novae quaesitis, limites radicum $-$ varum prio-
 ris reperientur.

Vix autem monendum est, heic limitem non
 sensu superiori accipi; item quod si radix una α
 ipsius $(f)x=0$ prodierit, $\frac{(f)x}{x-\alpha}$ praebet aequatio-
 nem uno gradu inferiorem, cujus radices pariter
 quaeri possunt. Patet etiam, quod si terminus ul-
 timus deficiat, unam radicem zerum esse; nempe
 si o substituatur ipsi x , functio ad o redigetur;
 est quoque termini ultimi o unus factor $= o$. Ita si
 terminus secundus deficiat, summa radicum $= o$
 est (365), adeoque summa radicum $\pm_{\text{varum}}$ est
 summae $-$ varum aequalis. Ita etiam patet coeffi-
 cientem termini 2di non posse realem esse, nisi ra-
 dices imaginariae (si adfuerint) se invicem destru-
 ant. Patet quoque radicem $\pm_{\text{vam}}$ non dari; si coef-
 ficientes omnes (etiam ipsius x^0) $\pm_{\text{vi}}$ sint; nam
 tum pro quovis valore $\pm_{\text{vo}}$ ipsius x , valor $\pm_{\text{vus}}$
 et non o erit.

12mo. Si autem aequationis radicem per di-
 cta inter certos integros contineri constet, atque
 tentationibus inter illos factis, prodierit tale w ,

ut vera radice x dicta, $x-w$ sit ex gr. $< \frac{1}{10}$ vel

$\frac{1}{100}$ &c. . . , nempe $x=w+f$ (denotante f fractionem veram exiguam); erit methodo Newtoniana

$$x^n = (w+f)^n = w^n + nw^{n-1}f + f'f$$

$$px^{n-1} = p(w+f)^{n-1} = pw^{n-1} + p(n-1)w^{n-2}f + f''f \text{ et}$$

$t = t$; atque $f'f + f''f \dots$, id est summa terminorum, in quibus fractio vera f ad una altiore potestatem elevata est, Ff dicta; erit

$$(f)x = w^n + pw^{n-1} + qw^{n-2} \dots + sw + t$$

$$+ [nw^{n-1} + p(n-1)w^{n-2} + q(n-2)w^{n-3} \dots + s]f + Ff = 0;$$

atque hinc

$$f = - \frac{w^n + pw^{n-1} + qw^{n-2} \dots + sw + t - Ff}{nw^{n-1} + p(n-1)w^{n-2} + q(n-2)w^{n-3} \dots + s}$$

unde ex aequatione et quantitatis deficientis limite, aestimando maximum errorem qui committi potest, negligendo Ff ob potentias fractionis verae exiguae altiores; omisso Ff fit $x = w + f =$

$$w - \frac{w^n + pw^{n-1} + qw^{n-2} \dots + t}{nw^{n-1} + (n-1)pw^{n-2} + (n-2)qw^{n-3} \dots}, \text{ et ad}$$

denom. eundem reducendo, et addendo, fit

$$x = \frac{(n-1)w + (n-2)pw^{n-1} + (n-3)qw^{n-2} \dots - t}{nw^{n-1} + (n-1)pw^{n-2} + (n-2)qw^{n-3} \dots}$$

Approximando hoc pacto, valore reperto w' item novum f quaeritur; et operatio juxta dicta toties quoties repetitur.

Alter methodus est *Lagrangeiana*. Si nempe prodierit integer a radice proxime minor, (aut valor talis uti supra w), ut radix vera x sit $=$

$$a + \frac{1}{y} \quad (\text{pro } y > 1); \text{ substituatur in } (f)x, a + \frac{1}{y}$$

ipsi x , et ordi. ta aequatione quaeratur integer b

ipso y proxime minor; itaque $a + \frac{1}{b+1} < x < a + \frac{1}{b}$.

Ponatur $y = b + \frac{1}{y'}$, ubi item $y' > 1$, et aequatione proxima (in qua $a + \frac{1}{y}$ substitutum ipsi x est)

(f') y dicta, substituatur in (f') y , $b + \frac{1}{y'}$ ipsi y ; et

quaeratur integer b' ipso y' proxime minor; atque

idem semper repetatur; ita ut si prodierit b cum μ accentis (quod dicatur β) integer ipso y totidem accentis insignito (quod dicatur Y) proxime minor,

substituatur in aequatione novissima, $\beta + \frac{1}{Y}$,

ipsi Y (per Y' intelligendo y uno accentu pluribus quam Y habet nempe $\mu+1$ accentis praedictum).

$$\text{Eritque } x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{b' + \frac{1}{b'' + \dots}}}$$

Itaque radix incommensurabilis fractione *continua* dicta, in infinitum protensa approximatur: sed de fractionibus continuis paulo inferius agetur. Pater vero superius incipiendo usque ad $b, b', b'' \dots$ alternatim esse valorem radice majorem minoremve, quam si illi b ubi subsistere libet, 1 addatur.

§. 40. Si plures fuerint incognitae $x, y \dots$ et totidem aequationes gradus 1mi tales dentur, quarum nullius veritas aut falsitas e reliquis fluit:

1. Aut quaeritur ex una valor ipsius x , quasi reliquae incognitae notae essent, et reperto valore, substituto ipsi x in aequatione sequente, quae-

ritur ex hac valor ipsius y , qui hoc pacto neque x nec y continet; atque si z adfuerit, substituto in aequatione sequente valore ipsius x prius reperto, et tum ipsi y substituto ubique valore proxime reperto, prodibit aequatio, in qua x, y non amplius adsunt, et nonisi z est, si in initio tantum x, y, z fuerint; adeoque z reperitur; et inde regrediendo, ex aequatione, in qua nonnisi y et z erant, substituendo valorem ipsius z , prodibit y , atque ex aequatione in qua x, y, z sunt, substitutis jam repertis valoribus ipsorum x, y , prodibit x quoque.

Quotvis autem fuerint incognitae numero μ ; progrediendo ad aequationem sequentem v tam, incognitae numero $v-1$ disparent; adeoque demum una manet; inde reperto hujus valore per aequationes per quas descensum est ascendendo, omnes prodeunt.

2. Aut ita transformantur aequationes, ut e summa earum nova aequatio promanet talis, in qua coefficiens omnium incognitarum, praeter unam (quam quaerere libet), $=0$ sit: quo pacto incognita ista reperitur.

Ex gr. Sit $ax + by = c$
et $a'x + b'y = c'$; erit (juxta 1)

$x = \frac{c-by}{a}$, quo substituto in aequ. sequente erit

$$c' = \frac{a'(c-by)}{a} + b'y = \frac{a'c - a'by}{a} + b'y, \text{ et hinc}$$

$$y \left(b' - \frac{a'b}{a} \right) + \frac{a'c}{a} - c' = 0, \text{ atque hinc}$$

$$y + \frac{a'c - c'a}{a} : \frac{b'a - a'b}{a} = 0; \text{ consequ.}$$

$$y = - \frac{(a'c - c'a)}{ab' - ba'} = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}; \text{ atque hoc in}$$

$$x = \frac{c-by}{a} \text{ substituto, fit } x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Idem modo 2do prodit: nempe multiplicando aequ. priorem per b' , posteriorem, per $-b$, et addendo fiet $x(ab' - a'b) + y(bb' - bb') = b'c - bc$, unde x idem prodit, quod prius. Pariter y prodit.

Utrumque ad tres pluresve incognitas applicari potest.

EXEMPLA. 1. Quaerantur duae quantitates x et y tales, ut $x + y = s$ et $x - y = d$: erit methodo priore $x = s - y$, quo substituto in sequente, est $s - y - y = d$, unde $-2y = d - s$, adeoque $2y = s - d$, et $y = \frac{s - d}{2}$; et hoc substituendo in $x = s - y$, fit

$$x = \frac{s + d}{2}.$$

Modo posteriore substituto s ipsi c , et d ipsi c' , ac 1 ipsis a et a' et b , atque -1 ipsi b'' ; erit

$$x = \frac{s(-1) - 1.d}{1.(-1) - 1.1} = \frac{-(s + d)}{-2} = \frac{s + d}{2} \text{ ut prius.}$$

2. Nota est mulorum de sarcinis suis concurrentium fabula. Prioris sarcina est x , alterius y ; is tantam esse suam queritur, ut si hic illi pondus $= 1$ traderet, aequae gravati essent; hic autem respondet suum pondus duplum fore, si is illi 1 traderet. Erit hinc

$$x + 1 = y - 1, \text{ et } y + 1 = 2(x - 1), \text{ adeoque } x - y = -2 \text{ et}$$

$2x - y = 3$; itaque multiplicando superiorem per -1 , et addendo (id est superiorem subtrahendo ex inferiore) coefficientis ipsius y erit 0, et $x = 5$ erit, quo substituto in quavis aequatione, erit $y = 7$.

Idem prodit, si superius ponatur $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$, $a' = 2$, $b' = -1$, $c' = 3$.

Exempla ad plures incognitas passim reperire et Tyrones ipsi condere possunt: quotvis autem incognitae fuerint, ingeniosa a *Bezout* data regula, reperiri possunt. Nimirum

Si e rebus a, b, c, d construantur permutationes, ita ut prius prodeant ab , et ba , ac priori praeponatur signum $+$ posteriori $-$, et semper omnibus permutationibus factis literarum permutatarum suscipiatur operatio sequens, cum singulis eo ordine quo prodierunt: nimirum sequens litera nova postponatur, deinde migret ista seper uno porro versus sinistram, donec omnes ad dextram post se relinquat; et prima harum permutationum, in qua litera nova ultima versus dextram est, retineat signum illius, cui postponitur, reliquae autem quavis migratione uti prodeunt signum mutant; atque si prodierint permutationes $A, B \dots$, prius ex A generentur modo dicto aliae, tum ex B , et ita porro, ac ordinentur uti prodierunt, prius ex A generatae, tum ex B generatae, &c.

Regula porro est sequens: quod si fuerint tot incognitae quot aequationes primi gradus, et coefficientis ipsius x sit litera a , coefficientis ipsius y sit litera b , ipsius z litera c et ita porro; quaevis in prima aequatione sine accentu, in 2do cum uno, in 3tia cum duobus, et ita porro: ad dextram vero sit litera sequens post omnium coefficientium literas, cum eodem accentu quae in aequatione est; litera ista vero denotet partem aequationis cognitam, ita ut alterius membri, quod ad sinistram est, quivis terminus sit factum ex incognita in cognitam: tum in denominatore describantur literarum coefficientium permutationes omnes, quae literas illas omnes continent, illo ordine quo modo dicto prodierunt, atque iis signis afficiantur quibus prodierunt: tum pro valore cujusvis incognitae scribatur in numeratore supra literam coefficientis incognitae illius, litera quae ad dextram est; praeter hoc vero supra quamvis literam denominatoris, ponatur in numeratore quoque litera eadem, et in quovis termino tam numeratoris, quam denominatoris litera prima sit sine accentu, quaevis sequens vero acquirat unum accentum.

Demonstratione, ingeniosa et elegans haec lex digna videtur. Si valet haec regula de quotvis incognitis usque ad certum numerum v incognitarum (a 2 idcipiendo), demonstratur valere etiam de numero incognitarum uno majore; atqui verum est de 2, de 3 --- incognitis ab inductione &c.

I. Exprimantur literae numeris, primae incognitae x coefficiens a numero 1; secundae y numero literae ipsius, nempe per 2 &c.

Multiplicentur omnes aequationes praeter ultimam; prima per m , sequens per n , 3tia per p 4ta per q &c. --- sint m, n, p, q --- integri; tum subtrahatur ultima aequatio e summa priorum, atque in differentia ponatur omnis incognitae (praeter illam cujus valor quaeritur) coefficiens $= 0$, et erit valor incognitae, cujus coefficiens remansit $=$ membro ad dextram, diviso per coefficientem incognitae,

Ex gr. Sit $1x + 2y + 3z + 4u + 5v = 6$

$$1'x + 2'y + 3'z + 4'u + 5'v = 6'$$

$$1''x + 2''y + 3''z + 4''u + 5''v = 6''$$

$$1'''x + 2'''y + 3'''z + 4'''u + 5'''v = 6'''$$

$$1''''x + 2''''y + 3''''z + 4''''u + 5''''v = 6''''$$

erit $x(m1 + n1' + p1'' + q1''' - 1''') = m6 + n6' + p6'' + q6''' - 6''''$

et $x = \frac{m6 + n6' + p6'' + q6''' - 6''''}{m1 + n1' + p1'' + q1''' - 1''''}$ si nimirum

$$m2 + n2' + p2'' + q2''' = 2''''$$

$$m3 + n3' + p3'' + q3''' = 3''''$$

$$m4 + n4' + p4'' + q4''' = 4''''$$

$$m5 + n5' + p5'' + q5''' = 5''''$$

Ita valor cujusvis alius incognitae per dicta determinatur; at patet expressionem valoris ingredi numeros indeterminatos m, n, p, q neque novas incognitas, sed datis una pauciores, pro quibus totidem aequationes dantur; adeoque si pro tot incognitis valeat regula a B. data; determinentur

ope istius, incognitae m, n, p, q , et in valore ipsius x substituantur valores reperti; idem fiat pro valoribus $y, z, \dots$; et inquiratur num valores hoc modo reperti, regulae congrui sint. Posito valere regulam de v incognitis, (cujus vicem modo subeat 4); determinabuntur juxta regulam, incognitae m, n, p, q ex aequationibus earum dictis, quae modo sequente exprimantur

$$^*1m + ^*2n + ^*3p + ^*4q = ^*5$$

$$1'm + 2'n + 3'p + 4'q = 5'$$

$$1''m + 2''n + 3''p + 4''q = 5''$$

$$1'''m + 2'''n + 3'''p + 4'''q = 5'''$$

ubi stellula cujusvis columnae numero cuivis superposita cogitetur, ut per numerum denotetur quidem, quotaenam incognitae coefficiens intelligatur, sed valor ab illo, quem numerus idem sine stellula denotat in prioribus aequationibus, diversus significari queat.

II. Interim valores incognitarum ex proximis aequationibus per regulam a Bezout datam expressibile in numeros stella carentes transferri modo

sequente possunt: nempe *1 denotat 2, $1'$ denotat 3, et ita porro deorsum numero accentorum uno

major uno majus denotat; porro *2 mutatur in $2'$, *3 in $2''$, *4 in $2'''$; ita $1'$ in 3, $2'$ in $3'$; verbo numero accentorum additur 2 ut prodeat numerus, et numerus unitate mulctatus dat accentorum numerum; nam in suprema aequationum proximarum accentus ubique 0 est; in illis aequivalentium suprema vero est ubique $2 = 0 + 2$; accentusque in hac est in loco primo $0 = 1 - 1$ tum quovis loco accedit unus accentus, uti numerus crescit uno in aequationum primitivarum suprema; porro autem in his in quavis columna verticali deorsum accenti in qua-

vis linea uno crescunt, uti numeri in prioribus in quavis linea eadem horizontali manentes iidem; itaque 2 addito numero accenti dat semper numerum prioris; et accentum esse semper *o* patet dum 1 transfertur qualivis accentu gaudeat, 2 vero dare accentum *'*; et cum in primitivis aequationibus numeri in quavis linea horizontali ab 1 progrediantur, priorum vero idem numerus quovis loco unum accentum nanciscatur, est numerus accentorum in translatione numerus translatus unitate mulctatus. Ubi nullus accentus est, reputetur pro accentu *o*. Aequationes ipsorum *m, n* - - (p.384) primitivae dicuntur, quibus priores equivalent.

Si igitur, numerus incognitarum in aequationibus totidem prius propositis, quivis sit, et lex de incognitis una paucioribus valeat; considerato casu proposito (in quo numerum 5 e demonstratione ipsa quemvis repraesentare posse patebit): pro valere ipsius *x* erit

$$m = \frac{\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 5 & 2' & 3'' & 4''' \end{array} - \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 5 & 2' & 4'' & 3''' \end{array} + \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 5 & 4' & 2'' & 3''' \end{array} \dots}{\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 2' & 3'' & 4''' \end{array} - \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 2' & 4'' & 3''' \end{array} + \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 4' & 2'' & 3''' \end{array} \dots}$$

$$n = \frac{\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 5' & 3'' & 4''' \end{array} - \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 5' & 4'' & 3''' \end{array} + \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 4' & 5'' & 3''' \end{array} \dots}{\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 2' & 3'' & 4''' \end{array} - \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 2' & 4'' & 3''' \end{array} + \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 4' & 2'' & 3''' \end{array} \dots}$$

$$p = \frac{\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 2' & 5'' & 4''' \end{array} - \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 2' & 4'' & 5''' \end{array} + \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 4' & 2'' & 5''' \end{array} \dots}{\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 2' & 3'' & 4''' \end{array} - \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 2' & 4'' & 3''' \end{array} + \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 4' & 2'' & 3''' \end{array} \dots}$$

$$q = \frac{\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 2' & 3'' & 5''' \end{array} - \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 2' & 5'' & 3''' \end{array} + \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 5' & 2'' & 3''' \end{array} \dots}{\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 2' & 3'' & 4''' \end{array} - \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 2' & 4'' & 3''' \end{array} + \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ 1 & 4' & 2'' & 3''' \end{array} \dots}$$

atque translatione (per II) facta, erunt valores

$$m = \frac{\begin{array}{cccc} 2''' & 3' & 4'' & 5''' \end{array} \dots}{\begin{array}{cccc} 2 & 3' & 4'' & 5''' \end{array} \dots} = \frac{\begin{array}{cccc} 3' & 4'' & 5''' & 2''' \end{array} \dots}{\begin{array}{cccc} 2 & 3' & 4'' & 5''' \end{array} \dots}$$

A A a

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{2 \ 3''' \ 4'' \ 5''' \text{---}}{2 \ 3' \ 4'' \ 5''' \text{---}} = \frac{2 \ 4'' \ 5''' \ 3''' \text{---}}{2 \ 3' \ 4'' \ 5''' \text{---}} \\
 p &= \frac{2 \ 3' \ 4''' \ 5''' \text{---}}{2 \ 3' \ 4'' \ 5''' \text{---}} = \frac{2 \ 3' \ 5''' \ 4''' \text{---}}{2 \ 3' \ 4'' \ 5''' \text{---}} \\
 q &= \frac{2 \ 3' \ 4'' \ 5''' \text{---}}{2 \ 3' \ 4'' \ 5''' \text{---}}
 \end{aligned}$$

Ita si quaevis alia incognitarum quaeratur; eodem modo reperiuntur talia m, n --- ut coefficientes reliquarum evanescant; atque quum pro aliis incognitis non eadem m, n --- ponantur, et statim dicenda M, N --- non eadem pro diversis incognitis sed concernentia intelligantur.

Quae de valore ipsius x demonstrabuntur, mutatis mutandis ad y, z --- applicari poterunt.

Quomodo autem ad singularem hanc regulam perveniri potuerit, perspicui ex exemplo (p.380) allato potest, sicubi coefficientes incognitarum (simul cum coefficiente potentiae exponentis o) ita ut ibi designantur, denotare contigit.

Denominator tam valoris m , quam reliquarum incognitarum n, p, q est idem continens omnes

permutationes numerorum 1, 2, 3, 4, dicatur d ; et denominator d valorum eorundem m, n, p, q postquam modo dicto in numeros stellula carentes translati sunt, dicatur D ; numeratores autem sint M, N, P, Q . Eritque

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{6.M + 6'.N + 6''P + 6'''Q - 6^{iv}}{D} \\
 &= \frac{1M + 1'N + 1''P + 1'''Q - 1^{iv}}{D} \\
 &= \frac{6.M + 6'.N + 6''P + 6'''Q - D.6^{iv}}{1.M + 1'N + 1''P + 1'''Q - D.1^{iv}}
 \end{aligned}$$

Ita pro reliquis incognitis quoque respective concernentibus m, n, p, q repertis; erunt, pro quavis

incognita, concernentia (id est pro illa prodeuntia)
 $M, N, \dots$, intelligendo ;

$$y = \frac{6.M + 6'.N + 6''.P + 6'''Q - D.6''''}{2.M + 2'.N + 2''.P + 6'''Q - D.2''''}$$

$$z = \frac{6.M + 6'.N + 6''.P + 6'''Q - D.6''''}{3.M + 3'.N + 3''.P + 3'''Q - D.3''''}$$

$$u = \frac{6.M + 6'.N + 6''.P + 6'''P - D.6''''}{4.M + 4'.N + 4''.P + 4'''Q - D.4''''}$$

III. Si translatio formularum, qua D ex d ,
 et qua M, N, P, Q prodeunt consideretur, cum
 (per hyp) in quovis termino sint accenti $o' '' '''$
 patet (per II) prodire in quovis termino ipsorum
 D, M, N, P, Q numeros 2, 3, 4, 5, accentos vero in
 D esse in quovis termino $o' '' '''$; quia terminus
 quilibet ipsius d est permutatio numerorum

* * * *

1, 2, 3, 4; unde etiam in D prodit permutatio quae-
 vis numerorum 2, 3, 4, 5; quia prouti in d permu-
 tantur numeri 1, 2, 3, 4, imaginis 2, 3, 4, 5, ab
 accentis constantibus $o' '' '''$ pendentis, accenti
 ita migrant in imagine dicta, omni permutatione
 possibili; itaque si semper juxta accentos dispo-
 nantur, patet permutationem quamvis (nec eandem
 imaginem bis) prodire, quia tum permutatio eadem
 in d bis occurreret.

Porro cum in expressionum illarum, e quibus
 M, N, P, Q deprompta sunt, quavis adsint omnes

permutationes numerorum $1 \overset{*}{2} \overset{*}{3} \overset{*}{4} \overset{*}{5}$, nempe in illa

e qua M translata est, absque 1 , in illa e qua N trans-

lata est, absque 2 , absque 3 in illa e qua P &c,
 deprompta est (per hyp); patet adesse quidem in
 quovis ipsorum M, N, P, Q omnes permutationes
 numerorum 2 3 4 5; sed in M deesse accentum o

propter defectum numeri ^{*}1 in expressione e qua deducitur, in N deesse accentum ', in P accentum '' in Q accentum ''' propter defectum^{*} numerorum

^{*}2, ^{*}3, ^{*}4 in expressionibus primariis dictis; nempe

(per II) ubi ^{*}1 deest, in translato accentus o deest, nam numerus accenti est = numero ipsi unitate mulctato; ita ubi 2 deest, in translato accentus $2-1=1$ deesset debet &c.

Si jam in expressione superiore ipsius x in numeratore cuivis termino ipsius M praeponatur 6 sine accentu, in quovis termino ipsius N praeponatur $6'$ cum uno accentu, (scilicet ibi datur accentus o), in P loco tertio ponatur in quovis termino $6''$, in Q loco quarto $6'''$ in quovis termino, et $6'''$ loco ultimo cujusvis termini ipsius D; in denominatore vero plane in loca dicta ponatur 1 cum iisdem accentis; prodibunt superius permutationes omnes numerorum 2,3,4,5,6, inferius omnes numerorum 1, 2, 3, 4, 5; et quum ita ordinentur, ut in valore ipsius x , ubi 1 infra stat, semper 6 stet supra 1, reliqui numeri etiam in quovis termino iidem cum iisdem accentis in quavis verticali iidem esse poterunt. Itaque pro valore ipsius x juxta *regulam B.* prodeunt termini, praeterquam quod signa rite prodiisse demonstrandum supersit.

Idem pro alia incognita patet, si haec locum in aequationibus cum x permutet.

IV. Quod autem signa attinet: sit μ numerus incognitarum in aequationibus totidem propositis: erunt $m, n \dots$ numero $\mu-1$, ex totidem aequationibus determinanda. Dicantur permutationes, quae pro valoribus ipsorum $m, n \dots$ (per hyp) juxta *regulam B.* rite prodeunt, *primitivae*, et eadem (p. 384) in numeros stella carentes translatae dicantur *translatae* priorum; denotetque heic litera in locum exponentis accentu postposito numerum

accentorum illius numeri, cui quasi exponens adponitur.

Quaevīs primitiva permutatio numerorum

$1^*, 2^*, \dots (\mu-1)^*$ gaudet signo $+$, *regulae B.* convenienti; et *translata* quoque illius signum idem retinet, atque permutatio cuivis superimposita signo eodem gaudet.

Erit autem μ aut par, aut impar; et $\mu-1$ in casu priore fiet impar, et par in posteriore. Si μ par fuerit, prodibunt pro valore ipsius x (386) termini denominatoris omnes, quoad numerum accentorum ordinati, *regulae* convenientes; nempe tum permutationes in D *regulae* contrariis signis praeditae, praeposito signo $-$ valorem *regulae* convenientem dabunt, ut statim patebit.

Si vero μ impar fuerit; tum omnes denominatoris permutationes, simul cum terminis ipsius $-D.1^{(\mu-1)'}$, juxta numeros accentorum ordinatae, signa *regulae* contraria habebunt; atque tam numeratoris quam denominatoris, opposita accipiendo, valore ipsius x immutato, singuli termini signa *regulae* convenientia nanciscentur.

Consideretur enimvero prius tantum in d permutatio primitiva prima, et huic in numeratoro

superimposita; nempe
$$\frac{1^* 2'^* 3''^* \dots (\mu-1)^*(\mu-2)'}{1^* 2'^* 3''^* \dots (\mu-1)^*(\mu-2)'};$$

erit superioris *translata* una permutatio ipsius M , inferioris *translata* erit una permutatio ipsius D ; eritque *translata* numeratoris (si extremi permuentur, juxta numeros accentorum ordinando)

$3^1 4^{11} \dots \mu^{(\mu-2)'} 2^{(\mu-1)'}$; inferior autem erit $2^1 3^1 4^{11} \dots \mu^{(\mu-2)'}$, (per II.).

Atque hinc pro valore ipsius x in $\frac{(\mu+1)M}{1M}$

per translationem prodibit

$$\frac{(\mu+1).3'.4'' \dots \mu^{(\mu-2)'} . 2^{(\mu-1)'}}{1 . 3'.4'' \dots \mu^{(\mu-2)'} . 2^{(\mu-1)'}} , \text{ in } \frac{D.(\mu+1)^{(\mu-1)'}}{D.1^{(\mu-1)'}}$$

autem prodibit $\frac{2.3'.4'' \dots \mu^{(\mu-2)'} . (\mu+1)^{(\mu-1)'}}{2.3'.4'' \dots \mu^{(\mu-2)'} . 1^{(\mu-1)'}}$

Termini tantum denominatoris considerandi veniunt; nempe in denominatore, si incognitae numero μ fuerint, permutationes numerorum $1, 2 \dots \mu$ omnes prodeunt, et dein pro x supra 1 ubique ponitur $\mu+1$, reliquis literis autem iisdem, etiam signa accentique ubique eadem ponuntur.

Translatae permutationes quaevis cum primitivis eodem siguo gaudent, tantum valorem facti e quantitatibus permutatis tanquam factoribus producti respiciendo; sed praeposito 1 tanquam multiplicatore, permutatio $1 3' 4'' \dots \mu^{(\mu-2)'} 2^{(\mu-1)'}$, quae quoad valorem signo $+$ gaudet, ut factum

ex 1 et translata ipsius $+ 1 2 3 \dots (\mu-1)^{(\mu-2)'}$, si μ impar fuerit, juxta *regulam* signum $-$ habebit.

Nam numerus numerorum in permutatione inter 1 et 2 erit $\mu-2$, adeoque par si μ par fuerit, et impar si μ impar sit; 1 2 vero habebat $+$; ponatur prius 3 ad finem dextrum, manebit signum idem, permutet 3 locum cum praecedente 2, fiet $-$; ponatur sequens nempe 4 ad finem dextrum, manebit $-$, permutet 4 locum cum 3, fiet $+$; et ita porro, semper numerus sequens immediate major ponatur ad finem dextrum, qui signum praecedens retinens permutet locum cum praecedente, donec nullus major supersit: hoc pacto patet toties permutari signum, quot numeri inter extremos sunt, et si numerus mutationis signi par sit, signum

+ manere, si impar sit, signum — juxta *regulam* fieri. Itaque pro μ pari, id quod prodit, convenit *regulae*, pro μ impari autem contrariatur.

Item si μ par sit, $-D.1^{(\mu-1)'}$ legi conveniens est; si μ impar fuerit, contrariatur. Nam tum 1 erit ultimus; nempe heic numerus accenti uno auctus = numero loci; numeri intermedii sunt qui prius in termino primo; itaque quum 21 gaudet juxta *regulam* signo —, prodibit pro μ pari $D.1^{(\mu-1)'}$ cum signo —; itaque factum $D.1^{(\mu-1)'}$ juxta *regulam* quoque signum — habebit; valori ipsius x etiam satisfaciendo.

Si vero μ impar fuerit; prodibit $D.1^{(\mu-1)'}$ juxta *regulam* cum signo +: itaque quum et praecedentes permutationes denominatoris signis legi contrariis praeditae sint; tam numeratoris quam denominatoris oppositum accipiendo, valore ipsius x immutato, signa legi quoque convenient, (nempe tum etiam $-D.1^{(\mu-1)'}$ in + $D.1^{(\mu-1)'}$ mutabitur).

Quod autem e solo termino denominatoris primo ad omnes concludi queat, patet sic: quaevis permutatio fuerit in translatis, quibus x modo dicto exprimitur; illa ex aliqua primitivarum dictarum orta adposito 1 in denominatore juxta accentum ejus, et supra id $\mu+1$, cum ea signum idem habet in expressione ipsius x , (abstrahendo a *lege B*). Facile autem perspicitur; quod permutatio quaevis rerum certarum, e quavis permutatione earundem produci queat, permutatione unius aut plurim certarum cum immediate praecedente ad laevam certo numero facta, et quaevis ejusmodi permutatione signum per *legem B*. mutetur; atque etiam dum in primitiva permutatur aliqua cum praecedente ad laevam, et in translata ejus mutetur signum: atque hinc patet quod si prior permutatio superius dicta legi convenerit, convenient omnes; si non, tum omnes signa contraria habeant;

quae uberius exponere, tam prolixitas vitanda quam brevitatis necessaria vetat.

Consequ. de x regula generaliter valet; nempe sive par sive impar fuerit μ valet, si de $\mu-1$ valet; valet autem de duabus, tribus, et quatuor incognitis; itaque valet de quinque, et hinc de sex, atque inde de septem, et ita porro.

Parique modo de reliquis incognitis demonstrando generaliter constat.

§. 41. Si autem aequationes gradus 1mi pauciores fuerint quam incognitae (342): tum accipiendo tot incognitas quot aequationes datae sunt; earum valoribus quaesitis, reliquis incognitis arbitrarie quidvis substitui potest, nisi certa restrictione posita, valores incognitarum certa qualitate praeditos esse oporteat.

Ex gr. Pro $10x + 5y + \frac{1}{2}z = 100$, ex $x + y + z = 100$, si cujusvis incognitae valor integer postuletur, $x=1$, $y=9$, et $z=90$, neque alia resolutio ulla datur.

Resolutio ejusmodi aequationis (*indeterminatae* dictae gradus 1mi) pro valoribus incognitarum integris, commode ope *fractionum continuarum* perficitur: itaque quum et superius (379) mentio earum fuerit, atque etiam aequatio quadratica ope earum resolvi possit, de his quaedam dicenda veniunt; quapropter alia adhuc pariter per se quoque necessaria praemittuntur.

Imo. Conversa ipsius (p. 60) quoque valet, nempe fractionis terminis nonnisi per aequalia multiplicatis, fractio valoris aequalis prodit: sit quippe

$$\text{pe } \frac{a}{a'} = \frac{A}{A'}; \text{ tum } \frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}. \text{ Sit enim } \frac{A'}{a'} = q,$$

$$\text{et } \frac{A}{a} = q \mp r; \text{ erit } A' = a'q, \text{ et } A = a(q \mp r) =$$

$aq \mp ar$. Sed $\frac{aq}{a'q} = \frac{a}{a'} = \frac{A}{A'} = \frac{aq \mp ar}{a'q'}$; unde $aq = aq \mp ar$, quod nisi $r=0$ sit, fieri nequit.

2do. Si A et A' numeri inter se primi fuerint: tum $\frac{A}{A'}$ terminis minimis exprimitur. Nam exprimitur valor idem integris minimis per $\frac{a}{a'}$; erit $\frac{a}{a'} = \frac{A}{A'}$, ac (per praec.) $A=aq$, et $A'=a'q$, ubi q integer (praeter 1) esse nequit; nam tum integros A, A' integer metitur, adeoque non essent primi. Itaque q aut fractio vera, aut summa fractionis verae f et integri i est; neutrum esse potest; fractio vera non, quia tum $\frac{af}{a'f} = \frac{a}{a'}$ minoribus terminis exprimeret valorem $\frac{a}{a'}$ (contra hyp.); neque $q=f+i$ est; nam tum $\frac{a}{a'} = \frac{ai + af}{a'i + a'f}$; ubi numerator denominatorque, ita ai et $a'i$, adeoque af et $a'f$ integri sunt; atque $af < a$ et $a'f < a'$ est, quia $f < 1$; itaque valoris ejusdem non esset minima expressio $\frac{a}{a'}$ (contra hyp.), nam $\frac{a}{a'} = \frac{af}{a'f}$.

3tio. Si A et A' item numeri inter se primi fuerint, et $\frac{A}{A'} = \frac{a}{a'}$, et $Ak=a$: tum et $A'k=a'$ (per 1mum); k vero integer est, si a et a' integri sint. Nam $k < 1$ esse nequit: quia $kA < A$ esset, et $\frac{A}{A'}$ per $\frac{a}{a'}$ minoribus terminis exprimeretur (contra 2dum); sed k neque summa integri i et fractionis verae f est; nam (ut in praec.) item non esset minima ejusdem valoris expressio.

4to. Si $N=ab$ vel $ab \dots t$, et $N, a, b, \dots, t$ integri, et praeter N omnes numeri per se primi sint, (nempe quorum nullum alius praeter se et 1 metitur, id est nullus per alium integrum divisus quotum integrum dat): tum N alia factorum primorum imagine exprimi nequit; id est factores primi quorum factum $=N$ est, semper iidem qui prius sunt, nec praeter factorum ordinem differunt.

Nam sit prius $n=ab$, pro a, b per se primis: si pro q per se primo esset etiam $n=Bq$; tum $ab=Bq$ fieret, atque hinc $\frac{a}{q} = \frac{B}{b}$; et quum a, q

per se primi, adeoque inter se primi (nisi aequales) sint, esset (per 3tium) talis integer k , ut $ak=B$ et $qk=b$; adeoque b non esset per se primus. Si

vero $a=q$, tum $B=b$, propter $\frac{a}{q} = 1 = \frac{B}{b}$.

Consequ. si n e duobus factoribus primis constat, ex aliis constare nequit.

Hinc vero de quotvis ad uno plures concluditur: nempe si nullus integer I expressus per m factores primos, (cujus imago sit i), queat abstrahendo a factorum ordine ullo modo alia primorum imagine exprimi; accedat factor primus v , et sit $Iv=N$: tum N nulla alia factorum primorum imagine nisi per iv (abstrahendo a factorum ordine) exprimi poterit.

Nam exprimatur etiam per $\beta\gamma$ (denotante γ numerum primum); erit tum $iv=\beta\gamma$, atque hinc

$$\frac{i}{\beta} = \frac{\gamma}{v}; \text{ ubi (ut antea) } \gamma \text{ et } v \text{ inter se primi sunt,}$$

adeoque (pro certo integro k) est $i=\gamma k$: et si k imagine factorum primorum expressum K dicatur, erit $i=\gamma K$, et quum i ex m factoribus primis constet, i et γK aequales imagines sunt. Atque hinc est $iv=v\gamma K$; et quia $iv=\beta\gamma$ erat, est $v\gamma K=\beta\gamma$, adeoque $vK=\beta$; sed iv adeoque $v\gamma k$ constat ex $m+1$

primis factoribus, itaque vK constat ex m , per hyp. autem numerus qui per m factores primos exprimitur, alia primorum imagine exprimi nequit. Consequ. vK et β eadem imago est; adeoque $v\gamma K$ et iv ac $\beta\gamma$ eaedem imagines sunt.

5to. Hinc si primorum $a, b, \dots$ quilibet seorsim metitur numerum N ; eundem N et productum e quibuslibet eorundem *primorum* metitur. Nam sit n imago ipsius N factoribus primis expressi; et sit $\frac{N}{a} = Q$, adeoque $N = aQ$, et sit q imago ipsius Q factoribus primis expressi: erit n et aq imago eadem (per 4tum). Itaque a adest in n , pariter quivis ipsorum $b, \dots$ adest; consequ. quilibet eorum ita ordinari possunt, ut partem imaginis constituent.

Conversim quoque integer P integrum N non nisi ita metitur, si P factoribus primis ita exprimi queat, ut imaginis alicujus, qua N factoribus primis exprimitur, partem constituat. Nam si $N = P.M$, et N, P , atque M factoribus primis exprimantur; imago eadem ipsius $P.M$, quae ipsius N erit.

6to. Num. vero numerus aliquis per se *primus*, aut e primis *compositus* (ut dici solet) fuerit: de hoc videatur opus (130.) citatum. Vulgare est, numerum quemvis primum formae $6n \pm 1 = 2.3n \pm 1$ esse debere, quamvis conversim non sit quivis (ex gr. 25) formae $6n \pm 1$ primus: nempe si integer N per 6 dividatur, sit quotus q , residuum est ipsorum 1, 2, 3, 4, 5 aliquis; si 2 vel 4 sit, tum N par est; si 3 sit, tum $N = 2.3.q + 3 = 3(2q + 1)$; si residuum 5 sit, tum $N = 2.3q + 2.3 - 1 = 2.3(q + 1) - 1$, seu $6n - 1$. Itaque nisi residuum 1 aut 5 sit, idest N sub formam $6n \pm 1$ vel $6n - 1$ veniat, compositus est.

7mo. E prioribus etiam divisor communis maximus plurium integrorum factoribus primis expressorum, necnon minimus eorum, quem datorum

quavis metitur, reperitur. Nempe quoad primum, ejusmodi imago I factorum primorum construenda est, in qua nonnisi talis factor occurrat, qui in quolibet datorum adest, et quavis adsit toties, quoties adest in datorum quovis, nec pluries adsit in omni quovis eorundem: nam tum imago ista I imaginis datorum cujusvis pars erit; qualiscunque primus p autem adjungeretur ipsi I ut ex I fiat I' ; si I' quemque datorum metiatur, tum p adest in quovis datorum, adeoque in I quoque; atque si p in I adfuerit m ies, tum in I' erit $(m+1)$ ies; itaque et in quovis datorum aderit $(m+1)$ ies; atque in I non adesset toties, quoties in quovis adest, quum nonnisi m ies adsit.

Quod 2dum attinet: talis imago i primorum construenda est, in qua datorum quivis factor primus adsit, et quivis toties, quoties idem in aliquo datorum plurima vice occurrit. Nam datorum cujusvis omnes factores primi in i adesse debent; nam cujusvis imaginem, partem ipsius i esse oportet; si vero aliquis factor p ex i tolleretur, si is in illo datorum (K dicto) ubi plurima vice adest, m ies adsit, etiam in i aderat m ies, et nunc $(m-i)$ ies remansit; itaque K ipsum i (sublato p) non metitur (per 395).

Hinc si fractionum quarumvis ad terminos minimos reductarum, denominator communis C minimus quaeratur: erit is, minimus eorum, quem quilibet denominatorum metitur; et fractionum da-

tarum quaevis $\frac{a}{b}$ sit; erit $\frac{C.a}{b}$ numerator fra-

ctionis novae, quae $= \frac{a}{b}$, nempe $\frac{C.a}{b} : C =$

$\frac{aC}{bC} = \frac{a}{b}$. Nam quum a et b inter se primi sint,

per integrum multiplicandi sunt, ut valor aequalis prodeat; itaque denominator quivis communem metiri debet; consequ. denominatorem, integrum mi-

nimum esse oportet, quem quivis denominatorum metiatur.

8vo. Potest quidem divisor communis maximus absque eo quoque ut factores primi quaererentur, reperiri: quotvis integri $A, B, \dots$ fuerint; quaeritur prius ipsorum A et B factor communis maximus F , tum quaeritur ipsorum F et C factor communis maximus f , et semper novissimi factoris communis, et sequentis numeri dati, factor communis maximus quaeritur; atque ultimus erit omnium factor communis maximus. Nam si omnes hi integri factoribus primis expressi cogitentur; in imaginibus ipsorum A, B , praeter F nihil commune erit, neque in F et C praeter f ; itaque nec in A, B, C praeter f commune est; quia id tam in C quam in eo quod ipsis A, B commune est, nempe in F adesse deberet. Unde ad plura conclusio pro-na est.

Modus autem alter dictus quoad duos a et b est sequens, (denotante hic litera quavis tam latina quam germanica integrum). Dividatur a per b (pro $a > b$), sit quotus α et residuum c , et divisor novissimus dividatur semper per residuum novissimum, donec residuum o sit; et divisor ultimus erit quaesitus. Sint nempe divisores ordine sequente se invicem excipientes, b, c, d, e et quoti sint $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; nempe divisor primus b , residuum c ; qui tum 2dus divisor fit dando residuum d , qui 3tius divisor fit, cujus residuum e tanquam divisor 4tus det residuum o : erit e divisor communis ipsorum a, b maximus. Nam e metitur utrumque ipsorum a, b , nec ullum $\beta > e$ metitur: namque e metitur ipsum d , itaque (diagonaliter ad dextram ascendendo) etiam ipsum dc ; sed e metitur se ipsum quoque, adeoque et ipsum $c = dc + e$; atque hinc metitur ipsum cb , sed metiebatur ipsum d , adeoque metitur ipsum b ; et hinc metitur ipsum ba ; sed metiebatur ipsum c , consequ. metitur ipsum $a = ba + c$,

Si vero β metiatur tam ipsum a quam ipsum b ; tum metitur ipsum ba , et ipsum c ; quia si ipsum b metitur, et ipsum ba metitur, atque si et ipsum a metitur, etiam in altera parte ipsius a certo numero adest. Si vero β metitur tam ipsum b quam ipsum c , metitur (descendendo) ipsum d , quia metitur ipsum cb et ipsum b , ita metitur ipsum e , quia metitur tam ipsum dc quam ipsum c ; quod cum $\beta > e$ esse nequit.

9^{no}. Ex hac operatione promanat fractio continua vulgaris modo sequente. Operatio praecedens exprimi potest per

I. $\overbrace{a:b:c:d:e}$, ubi a, b, c, d quotos exhibent, et diviso d per e residuum sit $=0$. Unde

$$\text{II. } \frac{b}{a} = \frac{b:b}{a:b} = \frac{1}{a+\frac{c}{b}} = \frac{1}{a+\frac{c:c}{b:c}} = \frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{d}{c}}} = \frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{d:d}{c:d}}}$$

$$= \frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{c+e}{d}}} = \frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{c+e:e}{d:e}}} = \frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{c+1}{d}}}$$

III. Si $b < a$ sit, tum $\frac{b}{a}$ est < 1 ; adeoque nul-

lum integrum efficit: exprimatur hoc per $\frac{0}{1} = 0$;

et dicantur $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a+\frac{1}{b}}$ &c fractionis commu-

nis forma expressa, *fractiones approximantes* (ob rationem inferius dicendam); et quidem $\frac{0}{1}$ dica-

1^a , et exprimatur per $\frac{A}{A'}$, $\frac{1}{a}$ dicatur

2^a , et exprimatur per $\frac{B}{B'}$; $\frac{1}{\frac{a+1}{b}} = \frac{b}{ab+1}$ dicatur

3^a , et designetur per $\frac{C}{C'}$, et ita porro. Tabella sequens etiam modum, quo e quavis fractione approximante sequens per quotum suprascriptum formatur, exhibet.

IV.

a	b	c	d
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{b \cdot 1 + 0}{ab+1}$	$\frac{bc+1}{abc+c+a}$
$\frac{A}{A'}$	$\frac{B}{B'}$	$\frac{C}{C'}$	$\frac{D}{D'}$
		$\frac{Bb+A}{B'b+A'}$	$\frac{Cc+B}{C'c+B'}$

Nempe 3^a fractio approximans $\frac{C}{C'}$ prodit

ex $\frac{B}{B'}$, si tam numerator quam denominator per quotum suprascriptum multiplicetur, et numeratori numerator praecedens, denominatori denominator praecedens addatur; ita etiam ab inductione patet esse $D=Cc+B$, et $D'=C'c+B'$.

Unde lex generationis cujusvis e praecedente patet: si nempe lex usque ad $\frac{K}{K'}$ valeat, valet et

de $\frac{I}{I'}$. Namque tunc $\frac{K}{K'} = \frac{Ii+H}{I'i+H'}$; prodit au-

tem $\frac{L}{L'}$, si pro i ponatur $i + \frac{1}{k}$; atque tum

$$\text{fiet } \frac{I(i+\frac{1}{k})+H}{I'(i+\frac{1}{k})+H'} = \frac{L}{L'} = \frac{Iik+I+Hk}{I'ik+I'+H'k} =$$

$\frac{k(Ii+H)+I}{k(I'i+H')+I'}$, quod est $= \frac{Kk+I}{K'k+I'}$; quia (per hyp.) $Ii+H=K$, et $I'i+H'=K'$. Nempe quotvis fuerint quoti, donec residuum 0 fiat, literarum majorum minorumque significatio respectiva perspicui potest.

10mo. Si $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$. . . considerentur; subtra-

hendo quodvis e sequente: differentiae erunt $\frac{-1}{A'B'}$,

$\frac{+1}{B'C'}$, $\frac{-1}{C'D'}$, $\frac{+1}{D'E'}$ Nam $A=0$, $A'=1$, $B=1$,

$B'=a$, adeoque $\frac{AB'-A'B}{A'B'} = \frac{0-1}{A'B'} = \frac{-1}{A'B'}$; atque

quodvis par $\frac{I}{I'}$ et $\frac{K}{K'}$ fuerit, si $\frac{IK'-I'K}{I'K'} = \frac{\pm 1}{I'K'}$;

pro $\frac{K}{K'}$ et $\frac{L}{L'}$ erit $\frac{KL'-K'L}{K'L'} = \frac{\mp 1}{K'L'}$, nempe si

$IK'-I'K=\pm 1$, erit $KL'-K'L=\mp 1$.

Namque substitutis valoribus ipsorum L , L' (ex praec.), erit $KL'-K'L=K(K'k+I)-K'(Kk+I)=KI'-K'I=-(IK'-KI')$; quod est $=\mp 1$ si $IK'-KI'=\pm 1$ fuit. Denominatorem autem subtractione peracta ipsis $\frac{KL'}{K'L'}=\frac{K}{K'}$ et $\frac{LK'}{L'K'}=\frac{L}{L'}$ communem esse K/L' patet.

Est vero hinc quaevis *approximans* praecedente alternatim major minore; quum differentiae sint alternatim $-$ vae et $+$ vae: sed cur *approximans* vocetur, nondum videtur. Interim differentiarum

nempe ipsius $\frac{-1}{A'B'}$, $\frac{+1}{B'C'}$ &c . . . quamvis sequente minorem esse facile perspicitur; quum $B' > A'$, $C' > B'$, $D' > C'$ &c . . .; nam etsi quodvis i per quod multiplicatur ex gr. I' ut K' fiat, 1 sit, est $K' = I'i + H'$, et H' nullibi est < 1 , nempe post $A' = 1, = B' = a$, est $C' = a + 1$ &c . . , et a $\times$ ve accipitur.

11. Sed in differentias fractionum harum (*approximantium* dictarum) a primitiva $\frac{b}{a}$, inquirendum est.

Denotetur (398 II.) $b + \frac{b}{c}$ per β , ita pro quoto k in genere, $k + \frac{m}{l}$ denotetur per x : quaevis littera graeca substituatur ipsi β et latina magna nominis ejusdem ipsi B , atque praecedens ipsi A , et germanicae parvae ipsis c , b post litteram nominis ejusdem cum B sequentes; erit $(B\beta + A)c = b$, et $(B'\beta + A')c = a$.

$$\text{Nam } B\beta + A = B(b + \frac{b}{c}) + A = \frac{Bbc + Bb + Ac}{c} = \frac{(Bb + A)c + Bb}{c} = \frac{Cc + Bb}{c}, \text{ quia } Bb + A = C \text{ (399)}; \text{ et}$$

hinc $(B\beta + A)c = Cc + Bb$, quod est $= b$; nam si littera quaevis id denotet, quod proprie significat est $B = 1$, $\beta = b + \frac{b}{c}$, $A = 0$, adeoque $(B\beta + A)c =$

$(b + \frac{b}{c})c = bc + b = b$; atque de quovis ad sequens concluditur generaliter; nempe etiam $Dd + Ce = Cc + Bb$; quia $Dd + Ce = (Cc + B)b + Ce = Ccd + Bb + Ce = C(cd + e) + Bb = Cc + Bb$.

Pari modo liquet $(B'\beta + A')c = C'c + B'b$ esse $= a = Dd + C'e$ &c . . . , dummodo litterae magnae accipiantur
CC c

cento insigniantur; quum plane $C'e + B'd = abc + c + ad$ sit, quod est $= a$; quia $a = ab + c = abc + c + ad$, (nam $b = bc + d$).

Hinc differentia cujusvis *approximantis* $\frac{B}{B'}$ ab ipsa primitiva $\frac{b}{a}$, (litera cujusvis nominis substituatur ipsi B , ceteras quoque concinne applicando), erit $\frac{b}{a} - \frac{B}{B'} = \frac{bB' - aB}{aB'}$, quod (substituendo in numeratore valores dictos ipsorum b et a) est $= \frac{(B\beta B' + AB')c - (B'\beta B + A'B)c}{aB'} = \frac{(AB' - A'B)c}{aB'}$ $= \frac{\pm e}{aB'}$; nempe si $\frac{A}{A'}$ approximantem *ntam* repraesentet, et n par fuerit, est $AB' - A'B = +1$, si vero n impar sit, -1 accipiendum est (400).

Itaque si *approximantium* $\frac{D}{D'}$ et $\frac{E}{E'}$ differentiae a $\frac{b}{a}$, nempe ipsa $\frac{\pm e}{D'a}$ et $\frac{\mp f}{E'a}$ considerentur; erit posterior manifesto minor priore; quia $E' > D'$, et $f < e$ est (si f non $= 0$); patetque quum differentiae alternatim $\mp$ vae et $-$ vae sint, valoribus $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{D'}$, $\frac{E}{E'}$ --- (differentia decrescente) valorem $\frac{b}{a}$ approximari, quamvis alternatim sint majores minoresve. Si vero $f = 0$ sit (ut 398); tum $\frac{E}{E'} = \frac{b}{a}$, quia $\frac{b}{a} - \frac{E}{E'} = 0$.

12. Est autem si b et a inter se primi fuerint, etiam $E = b$, et $E' = a$. Nam (per 401) est $(D\delta + C)e = b$, et $(D'\delta + C')e = a$; sed si $f = 0$, tum (398) $\delta =$

$d + \frac{f}{e} = d + \frac{0}{e} = d$; adeoque $b = (Dd + C)e = Ee$, quia $Dd + C = E$ (399), atque etiam $a = (D'd + E')e = E'e$. Estque e tum divisor communis maximus ipsorum a et b , qui itaque si a et b inter se primi fuerint, $= 1$ est. Unde etiam $E = b$, et $E' = a$ est,

13. Sed nec ulla fractio terminorum integrorum $\frac{p}{q}$ datur (quaecunque approximantes $\frac{C}{C'}$ et $\frac{D}{D'}$ fuerint), quae denominatore ipso D' minori gaudens, ipsis $\frac{C}{C'}$ et $\frac{D}{D'}$ interseri queat; id est ut pro casu, si $\frac{C}{C'} < \frac{D}{D'}$ fuerit, sit $\frac{C}{C'} < \frac{p}{q} < \frac{D}{D'}$, et pro $\frac{C}{C'} > \frac{D}{D'}$ sit $\frac{C}{C'} > \frac{p}{q} > \frac{D}{D'}$.

Nam si $\frac{C}{C'} < \frac{D}{D'}$; tum $\frac{C}{C'} - \frac{D}{D'} = \frac{-1}{C'D'}$, et $\frac{C}{C'} - \frac{p}{q} = \frac{Cq - C'p}{C'q} = -\frac{m}{C'q}$ (pro m in'egro $\neq 0$ et non 0); adeoque $\frac{C}{C'} + \frac{1}{C'D'} = \frac{D}{D'}$, atque $\frac{C}{C'} + \frac{m}{C'q} = \frac{p}{q}$ est $> \frac{D}{D'}$, quia m non < 1 , et q (per hyp) esset $< D'$. Si vero $\frac{C}{C'} > \frac{D}{D'}$; tum $\frac{C}{C'} - \frac{D}{D'} = \frac{1}{C'D'}$, et $\frac{C}{C'} - \frac{p}{q} = \frac{m}{C'q}$; atque $\frac{C}{C'} - \frac{1}{C'D'} = \frac{D}{D'}$, et $\frac{C}{C'} - \frac{m}{C'q} = \frac{p}{q}$, quod est $< \frac{D}{D'}$, quum ex eodem $\frac{C}{C'}$ heic minus subtrahatur, quam prius.

14. Exemplum sequens illustret praecedentia : sit $b=7$, et $a=19$; erit (398 et seq.) schema sequens.

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 2 & 2 \\ \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \\ 19 & 7 & 5 & 2 : 1 \end{array}$$

2		1		2		2		
$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{2} >$		$\frac{1}{3} <$		$\frac{3}{8} >$		$\frac{7}{19}$
$\frac{A}{A'}$		$\frac{B}{B'}$		$\frac{C}{C'} = \frac{1.1+0}{2.1+1}$		$\frac{D}{D'} = \frac{1.2+1}{3.2+2}$		$\frac{E}{E'} = \frac{3.2+1}{8.2+3}$

Patet autem etiam $\frac{n.19}{n.19}$ pro utvis magno n eosdem quotos, adeoque easdem approximantes dare. Ude fractio terminis magnis expressa, cum errore in praxi exiguo terminis parvis exprimi potest.

15. Notandum etiam est, approximantium quamvis minimis terminis expressam esse. Nam $\frac{C}{C'} =$

$\frac{n}{m}$ (pro n, m integris et $n < C$) esse nequit; quia

tum pro certo integro q , (per 393) $C=nq$ et $C'=mq$ esset. Sed $BC'-B'C=\pm 1$ (400); itaque (substituendo ipsis C et C') esset $Bmq-B'nq=\pm 1$; adeoque $Bm-B'n=\pm \frac{1}{q}$; quod fieri nequit, quum

$Bm-B'n$ integer, $\frac{1}{q}$ vero < 1 si'.

16. Sed est praeterea (si per $\frac{B}{B'}$ post $\frac{A}{A'} = \frac{0}{1}$ sequens intelligatur), $\frac{B}{B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{C'D'} - \frac{1}{D'E'} =$

$\frac{E}{E'} = \frac{b}{a}$; (nempe continuando donec libuerit, erit seriei summa aequalis approximanti litera seriei postrema denotatae). Nam $\frac{B}{B'} - \frac{C}{C'} = \frac{1}{B'C'}$, adeoque $\frac{B}{B'} - \frac{1}{B'C'} = \frac{C}{C'}$, ita $\frac{C}{C'} - \frac{D}{D'} = \frac{-1}{C'D'}$, hinc $\frac{C}{C'} + \frac{1}{C'D'} = \frac{D}{D'}$; itaque $\frac{B}{B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{C'D'} = \frac{D}{D'}$; quod continuari patet. In exemplo allato est $\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.8} - \frac{1}{8.19} = \frac{7}{19}$.

17. Sit
$$\frac{a}{a' + \frac{b}{b' + \frac{c}{c' + \dots}}}$$

retineanturque denotationes superiores; nempe $\frac{A}{A'} = \frac{a}{a'}$, $\frac{B}{B'} = \frac{a}{a'}$, $\frac{C}{C'} = \frac{a}{a' + \frac{b}{b'}}$ &c...; erit hic

quoque in genere $\frac{K}{K'} = \frac{Ii' + Hi}{I'i' + H'i}$, nempe $K = Ii' + Hi$, et $K' = I'i' + H'i$; adeo ut lex formationis cuiusvis approximantis e praecedente, juxta tabelam sequentem pateat.

a, a'	b, b'	c, c'	d, d'
$\frac{a}{1} = \frac{A}{A'}$	$\frac{a}{a'} = \frac{B}{B'}$	$\frac{C}{C'} = \frac{Bb' + Ab}{B'b' + A'b}$	$\frac{D}{D'} = \frac{Cc' + Bc}{C'c' + B'c}$

Nam si $I = Hh' + Gh$, atque $I' = H'h' + G'h$; substituendo $h' + \frac{i}{i'}$ ipsi h' , patet prodire $\frac{K}{K'}$; est

$$\text{autem } \frac{H(h' + \frac{i}{i'}) + Gh}{H'(h' + \frac{i}{i'}) + G'h} = \frac{Hh'i' + Hi + Gh'i'}{H'h'i' + H'i + G'h'i'} = \frac{Ii' + Hi}{I'i' + H'i}$$

quia $Hh' + Gh = I$, et $H'h' + G'h = I'$ (per hyp.)

$$18. \text{ Erit autem } \frac{A}{A'} - \frac{B}{B'} = \frac{-a}{A'B'}, \quad \frac{B}{B'} - \frac{C}{C'} = \frac{BC' - B'C}{B'C'} = \frac{B(B'b' + A'b) - B'(Bb' + Ab)}{B'C'} = \frac{(BA' - B'A)b}{B'C'}$$

$$= \frac{ab}{B'C'}. \text{ Atque in genere si } \frac{I}{I'} - \frac{K}{K'} = \frac{ab \dots i}{I'K'},$$

$$\text{est } \frac{K}{K'} - \frac{L}{L'} = \frac{ab \dots ik}{K'L'}. \text{ Nam } KL' - K'L = K(K'h' + I'h) - K'(Kh' + Ih) = (KI' - K'I)h = -(IK' - KI')h = \frac{ab \dots ik}{K'L'}.$$

Erit itaque series differentiarum cujusvis a se-
quente $-\frac{a}{A'B'} + \frac{ab}{B'C'} - \frac{abc}{C'D'} + \frac{abcd}{D'E'} \mathcal{E}^c$ atque

$$\text{quum sit } \frac{A}{A'} - \frac{B}{B'} = \frac{-a}{A'B'} : \text{ est } \frac{A}{A'} + \frac{a}{A'B'} = \frac{B}{B'},$$

$$\text{et quia } \frac{B}{B'} - \frac{C}{C'} = \frac{ab}{B'C'}, \text{ est } \frac{B}{B'} - \frac{ab}{B'C'} = \frac{C}{C'} =$$

$$\frac{A}{A'} + \frac{a}{A'B'} - \frac{ab}{B'C'}; \text{ quod continuari patet, ut pro}$$

$$A = 0 \text{ sit } \frac{a}{A'B'} - \frac{ab}{B'C'} + \frac{abc}{C'D'} - \frac{abcd}{D'E'} = \frac{E}{E'}; \text{ et ita porro.}$$

Ponatur $a=1$, $b=a^2$, $c=b^2$, $d=c^2 \mathcal{E}^c$, atque
 $a'=a$, $b'=b-a$, $c'=c-b$, $d'=d-c \mathcal{E}^c$; erit $B'=a$, et $C'=B'b'+A'b=a(b-a)+a^2=ab$; atque si $H'=abc \dots g$, et $I'=ab \dots h$, est $K'=ab \dots hi$; nam
 $K'=I'i'+H'i=I'(i-h)+H'h^2=ab \dots hi-ab \dots h^2+ab \dots gh^2=ab \dots hi=K'$.

Atque hinc generaliter est, pro quavis differentiarum dictarum $\frac{ab \dots f \cdot a^2 b^2 \dots e^2}{F'G'} = \frac{ab \dots e \cdot ab \dots ef}{ab \dots e \cdot ab \dots ef}$
 $= \frac{1}{f}$.

Itaque $\frac{a}{A'B'} - \frac{ab}{B'C'} + \frac{abc}{C'D'} - \frac{abcd}{D'E'} = \frac{E}{E'} =$
 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$; idemque continuari usquequo libuerit patet.

Unde manifesto, si $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \dots$ series convergens sit, et $\sim s$; etiam

$$\frac{1}{a+a^2} \sim s. \text{ Hinc } \frac{1}{1+1} \sim \frac{\pi}{4}; \text{ quae}$$

$$\frac{b-a+b^2}{c-b+c^2} \sim \frac{2+9}{2+25} \sim \frac{\pi}{4};$$

$$\frac{d-c \dots}{2 \dots} \sim \frac{\pi}{4}.$$

expressio dimidii quadrantis (pro radio 1) a *Lord Brounker* primo fractionum continuarum auctore est: et cum serie Leibnitiana (p. 304) convenit, pro $a=1$, $b=3$, $c=5 \dots$ adeoque $b-a=2=c-b \dots$ &c; nimirum $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots \sim \frac{\pi}{4}$.

Potest etiam terminis fractionis permutatis, valor fractione continua exprimi; nempe $\frac{4}{\pi} =$

$$1 : \frac{\pi}{4} = 1 : \frac{1}{1+\gamma}, \text{ si } \frac{1}{2+9} \text{ per } \gamma \text{ exprimatur;}$$

$$\text{itaque } \frac{4}{\pi} = 1+\gamma = 1+\frac{1}{2+9} = \frac{2+25}{2+49} = \frac{2+25}{2 \dots} \sim \frac{\pi}{4}.$$

19. Applicatur fractio continua et ad resolutionem
aequationis quadraticae, modo sequente. Sit

$x(a+x)=b$; est $x=\frac{b}{a+x}$, et hoc (substituendo ipsi

x ad laevam, semper $\frac{b}{a+x}$; fiet $x = \frac{b}{a+x} =$

$\frac{b}{a+x}$ continuando in ∞ . Quaeritur, num valor

usque ad aliquod α acceptus valori ipsius x dato
quovis propius accedat?

Est hic (præc.) $a=b=c=d \dots =b$, et $a'=b'=c' \dots =a$;

atque $\frac{A}{A'} = \frac{0}{1}$, $\frac{B}{B'} = \frac{b}{a}$, $\frac{C}{C'} = \frac{ab}{a^2 + b}$, $\frac{D}{D'} =$

$\frac{a^2b + b^3}{a^3 + 2ab}$ &c Differentiae vero sunt $-\frac{b}{A'B'} +$

$$\frac{b^2}{B'C'}, -\frac{b^3}{C'D'}, +\frac{b^4}{D'E'} \text{ \&c.} \dots \text{ ubi exponentem ipsi-}$$

us δ semper porro uno crescere patet; atque etiam quodvis ipsorum $A, B - - -, A', B' - - -$ (si $\frac{M}{M'}$

ab $\frac{A}{A!}$ incipiendo $(n+2)$ um sit), exprimi per n ,

α, β potest; nempe $\frac{M}{M'} =$

$$\frac{a^n b + (n-1)(a^{n-2} b^2 + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} a^{n-4} b^3 \dots)}{a^{n+1} + n a^{n-1} b + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} a^{n-3} b^2 \dots} \quad \text{terminis}$$

tam in numeratore = M , quam in denominatore = M' eousque acceptis, donec factor aliquis 0 fiat. Est nempe pro $(n+2)$ to terminus ultimus numeratoris

$$\frac{(n-p)(n-(p+1))(n-(p+2)) \cdots [n-(2p-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p} a^{n-p} b^{p+2}$$

si p denotet $\frac{n}{2}$ pro n pari, et $\frac{n-1}{2}$ pro n impari. Denominatoris autem terminus ultimus est $\frac{[n-(p'-1)] [n-p'] \dots [n-(2p'-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p'} a^{n-(2p'-1)} b^{p'}$ denotante p' pro n pari id quod antea, pro n impari vero $\frac{n+1}{2}$.

Nimirum si aliquot ipsorum $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'} \dots$

computentur; facile animadvertitur, e quovis prodire sequentis denominatorem, si illius denominator per a multiplicatus numeratori ejusdem addatur, et prodire numeratorem, si illius denominator per b multiplicetur: unde tabula coefficientium numericorum, qui terminis literarum praefixarum appertinent, sequens conficitur.

A', B	1	0		
B', C	1	0		
C', D	1	1	0	
D', E	1	2	0	
E', F	1	3	1	0
F', G	1	4	3	0

Manifesto 2da columna numerorum verticalis, est series numerorum naturalium, 3ta est series 2di, 4ta 3ti ordinis . . , et quovis terminus est summa supstantis et illius qui ad laevam in columna horizontali superius sequente est. Hinc ad expressio-

nem dictam perveniendo, de quovis ad sequens concluditur: nempe si valeat usque ad $\frac{I}{I'}$, quod

sit $(n+2)$ um, valet et de $\frac{K}{K'}$ (nempe $(n+3)$ to). E-

rit enim $\frac{K}{K'} = \frac{Ia + Hb}{I'a + H'b}$; estque (per hyp)

DD d

$$Ia = a^{n+1}b + (n-1)a^{n-1}b^2 + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} a^{n-3}b^3 \dots +$$

$$\frac{(n-\mu)[n-(\mu+1)] \dots [n-(2\mu-2)] [n-(2\mu-1)]}{1 \cdot 2 \dots \mu} a^{n-2\mu} b^{\mu+1},$$

$$Hb = a^{n-1}b^2 + (n-2)a^{n-3}b^3 + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} a^{n-5}b^4 \dots +$$

$$\frac{(n-\mu)[n-(\mu+1)] \dots [n-(2\mu-2)]}{1 \cdot 2 \dots (\mu-1)} a^{n-2\mu} b^{\mu+1}$$

ubi considerando formulam, eamque applicando ad n et $n-1$, patet terminum ultimum prioris et posterioris, terminos generales, atque valoribus dictis ipsorum p et p' substitutis ultimos esse, nempe terminum immediate sequentem, factorem o ingredi; imo eadem substitutione prodit, pro denominatoris termino ultimo, ipsius a exponentem o fieri pro n impari, et 1 pro n pari, atque

$$\frac{[n-(p'-1)] (n-p') [n-(p'+1)] \dots [n-(2p'-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p'} \text{ esse}$$

$=1$ pro n impari, et $\frac{n}{2}+1$ pro n pari, (de $(n+2)$ ta fractione loquendo).

Si vero in dictis terminis generalibus, coefficientes ejusdem facti e potentiis ipsorum a et b confati, (reducendo ad denom. eundem) addantur; factore communi exempto, erit $\mu+n-(2\mu-1) = n-(\mu-1)$, atque prodibit

$$\frac{[n-(\mu-1)] (n-\mu) (n-(\mu+1)) \dots [n-(2\mu-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \mu} a^{n-2\mu} b^{\mu+1};$$

quod pro $a^{n-2\mu} b^{\mu+1}$, in K (in quo terminus 1mus est $a^{n+1}b$) regulae dictae conveniens esse applicando patet. Eodem modo autem de K' demonstrari potest.

Si vero in expressionem $\frac{Ia+Hb}{I'a+H'b}$ ipsius $\frac{K}{K'}$ ponatur $a+x$ pro a : prodibit $\frac{I(a+x)+Hb}{I'(a+x)+H'b} = x$;

nempe nonnisi pro uno α , quod infimum in fractione continua est, poni $\alpha+x$ debet, ut valor ipsi x aequalis sit; et peracta operatione prodibit

$$\frac{I(a+x)+Hb}{I'(a+x)+H'b} = \frac{Ia+Hb}{I'a+H'b} =$$

$$\frac{b(a+x)(H'I-HI') + ba(HI'-H'I)}{[(a+x)I'+H'b](aI'+H'b)} = \frac{-bx(IK'-I'K)}{K'K'+xI'K'}$$

quod (nempe differentia fractionis approximantis a valore unius radices aequationis quadraticae) pro α et b $\nlessdot$ vis, ~ 0 si $n \sim \infty$.

Sit enim $\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)} = \pm\left(-\frac{a}{2} + \omega\right)$ pro ω

$\nlessdot$ vo; erit $-\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \omega = \omega$ unus valor ipsius x ;

eruntque in hoc casu a, b, ω , atque omnes termini ipsorum I', K' $\nlessdot$ vi; et si $b=1$ ponatur, et $\frac{K}{K'}$

sit fractio $(n+2)$ ta pro n impari, coefficientis potentiae ipsius b in termino ultimo (410) erit

$\left(\frac{n}{2} + 1\right)a$; est autem K' (et tanto fortius $K'K' +$

$\omega I'K'$) isto majus; numerator $-bx(IK'-I'K)$ vero est $= -\omega$, quia $b=1$, et $IK'-I'K$ est potentia ipsius b (408); atque manente numeratore denominatorem utvis augere licebit.

Ex gr. Pro $a=2$ et $b=1$ sit $x^2+ax=b$; erit unus valor ipsius $x=-1 \nlessdot \sqrt{(1+1)} =$

1 ; et hinc $\nlessdot \sqrt{2} = 1 \frac{1}{2+1} + 1$; unde etiam si

$$\frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots \quad \frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \frac{1}{2+1} \dots$$

pro $x^2+2x=1$ fiat $x^2-2x=1$, adeoque unus valor ipsius $x=1 \nlessdot \sqrt{2}$; erit

$e \Rightarrow \frac{-1}{2+1} = \frac{1}{-2+1}$; nempe facile patet , quod tamvis fractionem approximantem computatam , iisdem terminis, eodemque signo — gaudere.

Sit $x^2 + x = 1$, erit $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + 1\right)} \Rightarrow$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+1} ; \text{ et hinc } -1 \pm \sqrt{5} = \frac{2}{1+1},$$

$$\frac{1+1}{1+1} \quad \frac{1+1}{1+1}$$

$$1 \dots \quad 1 \dots$$

nempe supremi fractionis continuae termini , id quod infra lineam supremam est, divisor est. Hinc

vero $\sqrt{5} \Rightarrow \frac{2}{1+1} + 1$, quod etiam $= \frac{1}{4+1} + 2$

$$\frac{1+1}{1+1} \quad \frac{4+1}{4+1}$$

$$1 \dots \quad 4 \dots$$

ex $x^2 + 4x = 1$.

Ita ex $x^2 - x = 5$ est $\frac{5}{-1+5}$ unus valor ipsi-

$$\frac{-1+5}{-1+5} \dots$$

et x .

20. Brevitatis studio casus pro $b = 0$ praeterire liceat; quum et de resolutione aequationis $x^2 - x = a$ analogia aliquid dicendum sit. Est nempe $x = a + x$, adeoque $x = \sqrt{a+x}$, et hoc ipsi x semper substituendo donec libuerit, erit $x = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a+x}}}$ $= \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a+x}}}}$, et ita porro ; atque hoc quoque (pro $a \neq 0$) eousque continuari potest, ut omisso x , quovis ω minus ab x differat, (ut statim patet).

Ex gr. $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} \approx \pm \frac{(1 \pm \sqrt{5})}{2}$

est $x^2 - x - 1 = 0$, et $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ unus valor ipsius x .

est. Ita ex $x^2 - x - 2$, est $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2} \dots}}$

± 2 , et 2 est unus valor ipsius x , uti -2 in aequatione $x^2 + x - 2 = 0$. Unde etiam (412)

$$\text{est } 2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2} \dots}} = 2$$

$$\frac{1+2}{1+2} \quad \frac{-1+2}{-1+2}$$

$$\frac{1+2}{1+2} \quad \frac{-1+2}{-1+2}$$

$$\frac{1+2}{1+2} \quad \frac{-1+2}{-1+2}$$

Nempe $\sqrt{}$ aut ubique $\pm$ ve aut ubique $-$ ve accepto, duo valores oppositi alioquin aequales prodeunt; quos etiam tales esse oportet, ut eorum unus aequationi $x^2 + x - 2 = 0$, alter ipsi $x^2 - x - 2 = 0$ satisfaciatur; ut statim patebit, quum -2 pro casu utroque idem maneat; quamobrem $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ in

casu priore, et $\frac{1-3}{2}$ in posteriore accipi nequit.

Potest quippe etiam x^m pro x^2 poni, denotante m quemvis integrum ≥ 1 ; eritque

$$\sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a} \dots}} = x \text{ pro aequatione } x^m - x - a$$

$$= 0. \text{ Sit } \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a}} = b, \sqrt[m]{(a+b)} = b' \text{ \&c, erit } \sqrt[m]{a} < b$$

$$< b' \text{ \&c; prius, } b \text{ ipsi } \sqrt[m]{a}, \text{ tum } b' \text{ ipsi } b \text{ \&c substitutis.}$$

Hinc si $\sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a} \dots}}$ quousque libuerit ad laevam continuatum, generaliter N dicatur; crescet N semper

$$\text{quovis novo } \sqrt[m]{a + \dots} \text{ praeposito; manebit tamen } <$$

$$1 + 2a; \text{ nam si } \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a}}} = N, \text{ erit } N^m =$$

$$a + \sqrt[m]{a + \dots + \sqrt[m]{a}}; \text{ adeoque } N^m - a = \sqrt[m]{a + \dots + \sqrt[m]{a}}$$

$\angle (N = \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a \dots + \sqrt[m]{a}}})$; atque hinc quodvis N est $\angle 1 + 2a$; nam si $N =$ aut $> 1 + 2a$ esset, tum $N^m - a > N$ esset; nempe $(1 + 2a)^m - a > 1 + 2a$ (pro $m > 1$). Itaque crescens N sine fine, manens tamen $\angle 1 + 2a$, gaudet limite. Sit limes is α , et

sit $\sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a \dots + \sqrt[m]{a}}} = \alpha - \omega$, et $\sqrt[m]{a \dots + \sqrt[m]{a}}$

sit $= \alpha - \lambda$; erit $(\alpha - \omega)^m = a + \sqrt[m]{a \dots + \sqrt[m]{a}} = a + \alpha - \lambda$. Sed tam ω quam $\lambda \rightsquigarrow 0$; atque tum $(\alpha - \omega)^m \rightsquigarrow \alpha^m$, et $a + \alpha - \lambda \rightsquigarrow a + \alpha$. Consequ

$\alpha^m = a + \alpha$; atque limes ipsius $\sqrt[m]{a \dots + \sqrt[m]{a \dots}}$ est radix aequationis $x^m - x - a = 0$; atque si m par sit, radicali $\vee$ ve accepto prodibit radix aequationis $x^m + x - a = 0$.

21. Notandum quoque est et $\sqrt[m]{a \sqrt[m]{a \sqrt[m]{a \dots}}}$

limite gaudere, esseque limitem hunc $a^{\frac{1}{m-1}}$ (excepto $a=1$, nempe tum non limes, sed quivis va-

lor $= a^{\frac{1}{m}} = 1$). Nam incipiatur a dextra ad lae-

vam praeponendo radicalia in ∞ ; erit prius $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$, dein $\sqrt[m]{a \sqrt[m]{a}} = \left[a^{\frac{m}{m}} \cdot a^{\frac{1}{m}} \right]^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{m+1}{m^2}}$,

atque $\sqrt[m]{a a^{\frac{m+1}{m^2}}} = \left[a^{\frac{m^2}{m^2}} \cdot a^{\frac{m+1}{m^2}} \right]^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{m^2+m+1}{m^3}}$.

Si vero prodeat $a^{\frac{m^p + m^{p-1} \dots + 1}{m^{p+1}}}$, fiet $\sqrt[m]{a}$ praeponendo, $\left[a^{\frac{m^{p+1}}{m^{p+1}}} \cdot a^{\frac{m^p + m^{p-1} \dots + 1}{m^{p+1}}} \right]^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{m^{p+1} + m^p \dots + 1}{m^{p+2}}}$; exponens hic ipsius a autem est

$$= \left(\frac{m^{p+2}-1}{m-1} : m^{p+2} \right) = \frac{m^{p+2}-1}{(m-1)m^{p+2}}, \text{ quod } \sim$$

$\frac{1}{m-1}$; namque si (per 130) dividatur $m^{p+2}-1$ per

$m-1$, quotus erit $m^{p+1} + m^p + \dots + 1$. Consequ.

$$\sqrt[m]{a} \sqrt[m]{a} \dots \sqrt[m]{a} \dots \sim a^{\frac{1}{m-1}}$$

$$\text{Ex gr. } \sqrt{2} \sqrt{2} \sqrt{2} \dots \sim 2^{\frac{1}{2-1}} = 2$$

$$\sqrt[3]{5} \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{5} \dots \sim 5^{\frac{1}{3-1}} = \sqrt{5}.$$

22. Plura hujus generis construi posse cuique succurrere potest: sed his amplius immorari non vacat. Interim patet etiam, quod si fuerint $\frac{\alpha}{\beta} = q$,

$$\frac{\beta}{d} = Q + \frac{r}{d}; \quad \frac{r}{d'} = q' \text{ et } \frac{d}{d'} = Q' + \frac{r'}{d'}; \text{ et}$$

$$\frac{r'}{d''} = q'' \text{ et } \frac{d'}{d''} = Q'' + \frac{r''}{d''} \text{ \&c.}; \text{ erit } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha : d}{\beta : d}$$

$$= \frac{q}{Q + \frac{r}{d}} = \frac{q}{Q + \frac{r : d'}{d : d'}} = \frac{q}{Q + \frac{q'}{Q' + \frac{r'}{d'}}} = \frac{q}{Q + \frac{q'}{Q'' + \frac{r''}{d''} \text{ \&c.}}}$$

at pro $q, q' \dots Q, Q' \dots$ integris, si α, β incommensurabilia fuerint, residuum nunquam 0 erit; quamvis ex gr. r'' et d'' per dato quovis minus d'' dividi possit, prodeunte Q''' minus magno cum residuo $r''' < d'''$, adeoque quotus $= Q + (\frac{r'''}{d'''} < 1)$, at

continuari donec libuerit, et $\frac{\alpha}{\beta}$ per fractiones

approximantes dictas approximari posse e jam dictis patet.

§.42. Applicatio fractionis continuæ ad resolutionem æquationis indeterminatæ gradus I^{mi}, pro valoribus integris, (343) exponenda venit.

Sit $\pm ax \pm by = \pm c$, (pro $a > b$, atque signis $\pm$ (pro a, b, c integris, et a, b inter se primis), sive ubique idem sive diversa denotantibus.

1. Si quodvis ipsorum a, b , integer aliquis i metiatur tertium haud metiens tum x et y valoribus integris minime gaudent. Nam si x et y integri essent, tum $\frac{\pm ax \pm by}{i}$ quoque integer esset;

$\frac{c}{i}$ vero non esset integer; atque integer esset non integro æqualis.

2. Ponatur coefficientis major (qualicunque signo gaudeat) loco primo; atque si signum $-$ habeat, multiplicetur æquatio per -1 , ut ex $-ax \pm by = \pm c$ fiat $ax \mp by = \mp c$. Tum evolvatur $\frac{b}{a}$ in fractionem continuam, et quaeratur approximantium penultima; sit hæc ex gr. $\frac{E}{E'}$; erit sequens

$\frac{F}{F'}$, atque $F = b$, et $F' = a$, quum b et a inter se primi sint, (402); eritque $EF' - E'F = -1$ si $\frac{E}{E'}$ fuerit a $\frac{0}{1}$ inclusive numerando n ta, et n par sit, et -1 pro n impari. Unde $aE - bE' = \pm 1$, adeoque $aEc - bE'c = \pm c$; atque addito (pro casu si c non $= 1$) $abq - abq = 0$, fit $a(Ec - bq) - (E'c - aq) = \pm c$.

Itaque si signa ipsorum b et c quibus in hac æquatione gaudent, cum signis quæ in æquatione proposita habent, convenirent, tum q rite accepto, $Ec - bq$ ipsi x , et $E'c - aq$ ipsi y substitui possent: at si signa dicta non convenerint, trans-

formanda erit aequatio modo sequente , ut hoc obtineatur.

3. Si b in aequatione proposita signum $+$ habeat: pro $-b(E'c - aq)$ ponatur $+b(-E'c + aq)$; nempe factore utroque per -1 multiplicato, signum ipsius b salvo valore mutatur.

Si vero signum ipsius c sit diversum in $a(Ec - bq) - b(E'c - aq) = \pm c$, aut in $a(Ec - bq) + b(-E'c + aq) = \pm c$, tum $\pm c$ et coefficientes ipsorum a et b multiplicentur per -1 ; nempe hoc pacto aequatio tota per -1 multiplicata, atque ad formam aequationis propositae reducta erit.

Pariet autem quaevis duarum harum aequationum duas aequationis formas, prouti c signo $+$ vel $-$ gaudebit. Nempe

$$\text{e priori, } a(Ec - bq) - b(E'c - aq) = \pm c$$

$$\text{et } a(-Ec + bq) - b(-E'c + aq) = \mp c$$

$$\text{ex altera, } a(Ec - bq) + b(-E'c + aq) = \pm c$$

$$\text{et } a(-Ec + bq) + b(E'c - aq) = \mp c$$

Unde videre est, quod ubi signa ipsorum Ec et $E'c$ conveniunt, etiam signa ipsorum aq et bq conveniant, sed illis contrariantur, et ubi illa diversa sunt, haec quoque tam inter se quam cum illis contrariantur.

4. Quaeritur, quomodo q pro quavis harum aequationum eligi debeat, ut valores integri $\mp vi$, imo valores minimi prodeant ?

Oportet q esse integrum; quia nisi aq , bq integri sint, $Ec - bq$ et $E'c - aq$ integri non erunt, si vero aq , bq integri essent et $q < 1$ esset, fieret $\frac{bq}{aq}$ fractio terminis minoribus expressa quam $\frac{b}{a}$

(pag. 393), quum b et a sint inter se primi &c.

In forma 1ma, ut $Ec - bq$ et $E'c - aq$ $\mp vi$ fiant, debet esse $Ec > bq$ atque $E'c > aq$; itaque $q <$

EE e

tam ipso $\frac{Ec}{b}$ quam ipso $\frac{E'c}{a}$. Unde manifesto ex integris qui infra utrumque valorum $\frac{Ec}{b}$ et $\frac{E'c}{a}$ sunt, maximus integer eligendus pro q erit, ut quam plurimum destruendo, quam minimum $\pm$ vum relinquat.

In forma 2da debet esse $bq > Ec$ et $aq > E'c$; itaque $q > \frac{Ec}{b}$ et simul $> \frac{E'c}{a}$; adeoque pro q ex integris tam ipsum $\frac{Ec}{b}$ quam ipsum $\frac{E'c}{a}$ superantibus, minimus eligendus est, ut terminus $\pm$ vus e $\pm$ vo destruens quam minimum relinquat. Unde forma 2da semper gaudet valore petito; uti etiam 1ma, quum ibi si pro q alius integer non datur, 0 accipi possit; nempe si $aE - bE' = \pm 1$, tum $aEc - bE'c = \pm c$ (419).

In 3tia forma debet esse $bq < Ec$ et $aq > E'c$; itaque $\frac{E'c}{a} < q < \frac{Ec}{b}$, atque si inter $\frac{E'c}{a}$ et $\frac{Ec}{b}$ integer detur, quivis ipsi q substitui poterit; si vero nullus detur, nec ipsorum x et y valores ulli integri $\pm$ vi erunt. In hac aequatione autem, si minimus valor ipsius x quaeratur; tum omnium valorum dictorum ipsius q maximus accipiendus est, ut quo plus destruat e $\pm$ vo; si vero minimum y quaeratur, minimum accipi debet, ut $\pm$ vum destruens quo minus relinquat. In forma 4ta $q > \frac{Ec}{b}$ et $q < \frac{E'c}{a}$; itaque si detur integer ipso $\frac{Ec}{b}$ major et ipso $\frac{E'c}{a}$ minor, is accipi poterit; at-

que pro minimo x minimum q ; pro minimo y maximum q eligendum est.

5. Si $c=1$; tum nonnisi in casu formae secundae addi modo relato $abq-abq$ debet; nam si $aE-bE'=\pm 1$ cum aequatione proposita conveniat, tum (ut statim patebit), E et E' valores minimi erunt; si vero non convenerit; in quavis forma praeter 2dam, q fractio vera erit quia $E < b$ et $E' < a$, adeoque (417) valor non erit integer.

Quod E et E' valores minimi sint, si $aE-bE'=\pm 1$ propositae aequationi convenerit, patet sic. Nisi minimi sint; sint $E-n$ et $E'-m$ minimi; erit $aE-an-E'b+bm=\pm 1$, et subtrahendo aequationem priorem, est $bm-an=0$, adeoque $bm=an$; et hinc $\frac{b}{a}=\frac{n}{m}$; atque (per 393) $n=bk$ et $m=ak$ (pro k integro); unde $E-n=E-bk$, et $E'-m=E'-ak$ valores $-vi$ essent non $\pm vi$; quia $E < b$, et $E' < a$.

6. EXEMPLA.

Si quis debeat cruciferum alteri, atque is monetam 17 cruciferorum, et hic nonnisi monetam 7 cruciferorum habeat; quaeritur numerus monetarum minimus, quo solutio fiat.

Erit $17x - 7y = 1$. Evolvatur $\frac{7}{17}$ in fractionem

continuum: fiet $17 : 7 : 3^2 : 1$, et approximantes erunt, $\frac{0}{1} \frac{1}{2} \frac{2}{5} \frac{7}{17}$, ubi $E=2$ et $E'=5$; atque EF'

$-E'F$ idest $Ea-E'b=-1$, quia $\frac{E}{E'}$ est 3tia, et

3 est numerus impar; itaque signum ipsius 1 non convenit cum aequatione proposita. Fiet vero juxta formam 2dam $a(-E+bg)-b(-E'+aq)=1$, (nem-

pe c heic = 1); est vero $\frac{E}{6} = \frac{2}{7}$, et $\frac{E}{a} = \frac{5}{17}$,
 atque (ut dictum est) q minimum integrorum utrumque valorem superantium esse debet; erit igitur $q=1$; atque $17(-2+7)-7(-5+17)=1$, nempe $17.5-7.12=1$.

Ita vulgare problema resolvitur: 100 thaleris coempta sunt 100 pecora, vaccae 10 thaleris, oves 5 thaleris, et sues dimidio thalero; quaeritur quotnam fuerint vaccae, quot oves, et quot sues?

$$10x + 5y + \frac{1}{2}z = 100, \text{ atque } x + y + z = 100.$$

Unde multiplicando per 2 aequationem priorem, et tum subtrahendo ex ea posteriorem; erit $19x + 9y = 100$; et si $\frac{9}{19}$ in fractionem continuam e-

volvatur, fiet $19:9:1$, atque approximantes erunt $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, et ultima fractio est $\frac{9}{19}$, penultima

vero est $\frac{1}{2}$; atque $EF' - E'F = 19 - 9.2 = 1$; et per

$c=100$ multiplicando, fit $19.100 - 9.200 = 100$; atque hinc fit $19(100 - 9q) + 9(-200 + 19q) = 100$ aequationi $19x + 9y = 100$ conveniens. Unde per formam 3tiam $\frac{200}{19} < q < \frac{100}{9}$, adeoque q integer in-

ter $10 + \frac{10}{19}$ et $11 + \frac{1}{9}$ esse, pro valoribus integris $\nmid$ vis ipsorum x, y , debet; quapropter q nonnisi 11 esse potest; eritque

$x = 100 - 9.11 = 1$, et $y = -200 + 19.11 = 9$. Unde $z = 100 - x - y = 100 - (1 + 9) = 90$.

Ex eodem demonstratur peripheriam per factum e quotvis numeris primis constructione geo-

metrica dividi posse; si per quemvis eorum id fieri queat, et nullus eorundem in facto pluries quam semel occurrat.

Sit nempe peripheria $=1$, et sint primi dicti $\alpha, \beta, \gamma \dots$ singuli diversi, et accipiantur prius tantum α et β ; erit pro certis x, y integris et $\beta > \alpha$,
$$\frac{x \cdot 1}{\alpha} - \frac{y \cdot 1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta}.$$
 Nam reducendo ad denom. e-

undem, est $\frac{\beta x - \alpha y}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha\beta}$; et hinc $\beta x - \alpha y = 1$; quod semper valores integros $\mp$ vos pro x et y per formam 2^{dam} habet; si nempe penultima approximans,

ipsius $\frac{\alpha}{\beta}$ det $EF' - E'F = 1$, erit $x = E$ et $y = E'$;

si vero $EF' - E'F = -1$, per formam 2^{dam} prodibunt valores quaesiti.

Atque si de certo quovis factorum $\alpha, \beta \dots$ primorum numero constet; et de uno pluribus constabit. Sit enim $\alpha\beta \dots = p$, et accedat factor primus μ ; erit p aut $>$ aut $< \mu$, quia si $p = \mu$ esset, μ compositus fieret; sit igitur ex gr. $p > \mu$; erit
$$\frac{1}{p\mu} = \frac{x \cdot 1}{\mu} - \frac{y \cdot 1}{p};$$
 nam per hoc esset $px - \mu y = 1$, ubi p et μ inter se primi sunt, adeoque x et y valoribus integris $\mp$ vis gaudent.

Si vero factor aliquis pluries occurrat; hoc modo neutiquam habebunt x et y valores integros $\mp$ vos. Nam ex gr. $\frac{1}{\alpha\alpha\beta} = \frac{x}{\alpha} \pm \frac{y}{\alpha\beta}$ pro x, y integris esse nequit: nam tum esset $1 = \alpha\beta x \pm \alpha y$, et hinc $\frac{1}{\alpha}$ esset $= \beta x \pm y$, quod fieri nequit, quum $\frac{1}{\alpha} < 1$, membrum ad dextram autem integer sit.

Interim alio modo factorem 2 quotiesvis ingredi posse ex elementis Geometriae notum est. Videatur opus (p. 180) citatum.

§. 43. In opere eodem aequatio indeterminata gradus 2di generaliter resolvitur: quod quum (uti pro x, y - aequationes altiores) referre instituti ratio haud permittat, cum pluribus aliis supplemen- to reservatur. Aliquid tamen ad illustrandam (pag 361) addendum est.

1. Si m aut numerus impar fuerit, aut pro m pari, $t =$ sit: $x^m + px^{m-1} + \dots + sx + t$ semper ra- dice reali gaudet. Potest enim in casu primo x tam magnum accipi, una vice $+$ ve altera vice $-$ ve, in casu posteriore vero una vice tam magnum, al- tera vice tam parvum, ut in utroque casu valor ex- pressionis una vice $+$, altera $-$ sit; atque tum transitum per 0 dari statim patebit.

Sit $px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + rx^2 + sx + t = \alpha$, id est di- catur α , et $x^m + px^{m-1} + \dots + rx^2$ dicatur β , et $x^m + px^{m-1} + \dots + sx$ dicatur γ .

Si integer i quovis coefficientium (et coeffici- ente ipsius x^0) major, atque $x > mi$ accipiatur; e- rit omnino $x^{m-1} > x^{m-2} > x^{m-3} \&c. \dots$ eruntque post x^m termini numero m , quorum quivis $< ix^{m-1}$; itaque $mix^{m-1} > \alpha$, seu $mi(mi)^{m-1}$, id est $x^m > \alpha$. Itaque pro m impari, si x accipiatur $= mi$, $+$ ve, valor expressionis $+$ vus erit, si vero idem $-$ ve ac- cipiatur, valor $-$ vus fiet.

Pro m pari autem et $t = 0$, si $x = \frac{1}{i(m-1)}$ et i talis integer sit, ut i sit majus quovis coeffici- entium; erunt pro β ante sx termini numero $m-1$, atque quum $x < 1$ sit, erit $x^2 > x^3 > x^4 \dots > x^{m-1} > x^m$, adeoque $(m-1)six^2 > \beta$, seu $\frac{(m-1)si}{i^2(m-1)^2}$,

id est $\frac{s}{i(m-1)}$ nempe $sx > \beta$.

Aut vero si i ita accipiatur, ut il sit $>$ quovis coefficientium, et x ponatur $= \frac{1}{mi}$; constabit γ

terminis ante t numero m , et $x > x^2 > x^3 \dots$,
 atque $\frac{mit \cdot 1}{mi} > \gamma$, id est $t > \gamma$.

Itaque pro m pari et $-vo$ t quoque, poterit per
 plane dicta x una vice tam magnum accipi, ut va-
 lor functionis $\ddagger$ sit, et altera vice tam parvum,
 ut valor $-vus$ sit; nempe si $x = \frac{1}{i(m-1)}$ accipia-
 tur $-ve$ si $s \ddagger$, et $\ddagger ve$ si $s -$ fuerit; erit $\gamma -vum$
 adeoque et addito $t -vo$ functio tota $-$ fiet; pa-
 riter si x (modo posteriore) ita accipiat, ut t
 $> \gamma$ sit.

Consequ. in omnibus casibus dictis datur fun-
 ctionis valor tam $\ddagger$ vus quam $-vus$: et tum valo-
 rem $= 0$ dari (praeter 375) et modo sequente
 constat.

Pro quovis a datur tale ω , ut $(F)x$ dicta fun-
 ctione $x^m + p.x^{m-1} \dots$, sit $(F)(x+\omega) - (F)x < a$.
 Nam terminus ultimus t adest, imo et reliqui ter-
 mini omnes ipsius $(F)x$ adsunt in $(F)(x+\omega)$, adeo-
 que differentia est summa ceterorum; quae non
 major esse potest, quam si termini hic omnes
 signo eodem gauderent, sed minor est, quam si
 generaliter pro $A((x+\omega)^\mu$ praeter Ax^μ accipia-

tur $\frac{2A\mu x^\mu \omega}{2x - (\mu-1)\omega}$ in termino quovis; nempe

$A(x^\mu + \mu x^{\mu-1} \omega + \frac{\mu(\mu-1)}{2} x^{\mu-2} \omega^2 - + \omega^\mu) - Ax^\mu$ est

minus quam si a $\mu x^{\mu-1} \omega$ incipiendo series ∞ ta
 exponentis $\frac{(\mu-1)\omega}{2x}$ esset; nam sequentes exponen-

tes decrescunt, atque $\frac{(\mu-1)\omega}{2x} < 1$ fit, si $\omega <$

$\frac{2x}{\mu-1}$ accipiat; essetque tum limes summae

$\mu Ax^{\mu-1}\omega : (1 - \frac{(\mu-1)\omega}{2x}) = \frac{2A_{\mu}x^{\mu}\omega}{2x - (\mu-1)\omega}$. Sunt autem

in $(F)(x+\omega)$ termini numero m (praeter t) sub formam $A(x+\omega)^{\mu}$ venientes; eritque quodvis

$A(x+\omega)^{\mu} - Ax^{\mu} < \frac{a}{m}$, si $\frac{2A_{\mu}x^{\mu}\omega}{2x - (\mu-1)\omega} = \frac{a}{m}$; fiet

vero hoc, si $\omega = \frac{2ax}{2m\mu Ax^{\mu} + (\mu-1)a}$, nempe ex ω

valor iste ipsius ω prodit; in quo ita augere m licet, ut ω dato quovis minus $= \lambda$ fiat; exprimatur

enim per $\frac{h}{mk+l}$, et ponatur νm pro m ; erit $\frac{h}{\nu mk+l}$

$= \lambda$, si $\nu = \frac{h}{mk\lambda} - \frac{l}{mh}$ accipiatur; estque mani-

festo ν eo majus quo minus λ est. Si igitur quaera-

tur tale ω , ut $(x+\omega)^m - x^m < \frac{a}{m}$, $p(x+\omega)^{m-1} -$

$px^{m-1} < \frac{a}{m}$, et idem fiat pro quovis termino usque

ad $s(x+\omega) - sx$; accipiatur minimum illorum ω , sive λ quovis eorum minus, cum $\nu > 1$; eritque quum termini praeter t numero m sint, $(F)(x+\omega) - (F)x$

$< (\frac{m \cdot a}{m} = a)$.

Concipiatur jam (Fig 54) $\ddagger x > mi$, atque feratur extremitas ejus retrorsum, ut decrescat usque ad o in p , et inde porro crescat $-ve$ semper porro: erit prius aliquamdiu valor functionis $\ddagger$, adeoque (pag. 16) punctum aliquod ultimum $*$, intra quod valor semper $\ddagger_{vus}$ fit, post quod autem aliquamdiu non est $\ddagger_{vus}$. Erit autem $p*$ radix aequationis, nempe x quod inter p et $*$ est ipsi x substituto, fit $(F)x = 0$. Nam valor is nec $\ddagger$ nec $-$ (nisi o) esse potest: si enim $\ddagger$ esset, sit $= \ddagger a$: accipiaturque $x = p* + \omega$, ita ut ω ultra $*$ ad dextram et tale sit, ut si valor novus

functionis b dicatur, sit $b-a < a$; erit b necessario $\mp$, quia si $-$ esset, fieret $b-a > a$, (si vero $b=0$ esset, radix ibi esset). Essetque idem pro quovis adhuc minori $-$ vo ω : itaque punctum ultimum ulterius esse deberet. Si vero $(F)(x=p_*) -$ esset: sit $=-b$, et accipiatur tale $\mp \lambda$ intra $*$ ad laevam, ut sit pro $x=p_* - \lambda$ valor functionis c , atque $c - (-b) < -b$: erit c necessario $-$; si enim $\mp$ esset, fieret $c+b < \pm b$; itaque punctum ultimum ante $*$ esset, et in neutro casu in $*$ caderet.

Consequenter in omni casu, excepto si m par et $t -$ sit, datur radix realis; et nonnisi de hoc casu quaestio est. Realem aliquando, et aliquando nonnisi imaginariam dari casus ostendunt: ex gr. $x^2 \pm 3x + 2$ habet utramque realem, ita $X^{17} - 1 = 0$ unam realem; at $x^2 + x + 2$ nonnisi imaginariam radicem habet. At vero semper si non reali, saltem imaginaria radice quaevis aequatio gaudet.

2. Demonstrationem hujus tamen ad casum exceptum restringere necesse non est; quum jam Anno 1799 prodierit *Demonstratio nova Theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Auctore Carolo Frederico GAVSS.* — Primitiae messis ditissimae — quasi stella venientis solis nuncia — veteranum juvenis opus — ad instar Herculis dum serpentem infans disruptit. Demonstrationum quas summi Geometrae dederant; defectu summa cum modestia revelato, ibidem non solum exacta, sed valde clara, elegans, et evidens exponitur: fit quidem Geometriae subsidio; sed veritas veritati heterogenea non est, quippe quae omnes coelesti fraternitatis vinculo junctae, ad quamvis tuendam confluunt; monitum tamen ibidem est, totam demonstrationem mere analytice tradi posse; sed methodus ista rem clarius ob oculos ponere videbatur. Trium quas dedit Auctor, prima haec tantum, et quidem plane huc huc pervenit:

Instituti ratio eam tantum partem breviter referre permittit, quae in quovis casu unam saltem imaginariam radicem dari probat; unde (ut ibidem traditur) id quod titulus pollicetur, facile sequitur.

Pag. 173 est $A + B\sqrt{-1} = u (\cos z + \sqrt{-1} \sin z)$, et hoc ad n elevatum est $= u^n (\cos nz + \sqrt{-1} \sin nz)$. Unde si $x^m + ax^{m-1} + \dots + kx + l$ dicatur X , substituendo $r(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)$ ipsi x , erit $X = r^m \cos mz + ar^{m-1} \cos (m-1)z + \dots + rk \cos z + l + [r^m \sin mz + r^{m-1} \sin (m-1)z + \dots + rk \sin z] \sqrt{-1}$; quod si dicatur $U + \sqrt{-1} T$, erit $X = 0$ pro illis z, r , pro quibus $U = 0$ et simul $T = 0$; quia tum $U + \sqrt{-1} T = 0 + \sqrt{-1} \cdot 0 = 0$, atque substituendo $r \cos z + \sqrt{-1} \sin z$ ipsi x , fiet $X = 0$.

Talia z, r igitur dari (pro quovis determinato integro $\pm v_0 m$) demonstrandum venit. Sint in plano P quaquaversum ∞ ta (Fig 56) recta ab utrinque ∞ ta; et in ea punctum fixum c ; et cujuscunque puncti ipsius P nomen generale sit p , dicaturque r recta pc , et angulus acp generaliter z dicatur. Concipiatur porro quovis radio r ($\pm v_e$ accepto) in plano P circa centrum c circulus, et in quovis puncto p erectum ad P perpendiculum $= T$, et quidem supra planum, si valor ipsius T pro illo p $\pm v_{us}$ sit, et infra si $-$ sit, atque in plano si $T = 0$ sit: dicaturque complexus omnium extremitatum, in qua aliqua ordinatarum dictarum terminatur, *superficies prima*. Pari modo (nonnisi U pro T ponendo) fiat *superficies secunda*. Erit manifesto superficies utraque continua, et quaquaversum ∞ ta ut planum, spatium quaquaversum ∞ tum in 2 plagas dividens: complexus autem omnis ejus, si quid prima cum plano P commune habeat, dicatur *linea prima*, et complexus ejus si quid superficies secunda cum P commune habeat, dicatur *linea secunda*; nempe lineas esse (sensu in Geom. subl.) patebit. Si quod punctum superficiei

primae cum P commune fuerit, manifesto ibi ordinata $T=0$ est; et in puncto superficiei secundae cum P communi ordinata $U=0$ est. Determinantur idcirco lineae 1^{ma} et 2^{da} per aequationes $T=0$, et $U=0$. Atque si probetur, lineam primam cum linea secunda punctum aliquod p' commune habere; tum si recta $p'c$ dicatur r' , et angulus $ap'c$ dicatur z' ; erit $r'(\cos z' + \sqrt{-1} \cdot \sin z')$ radix aequationis; quia pro illis r' , z' , tam T quam U erit simul $=0$.

3. In opere citato plura commemorantur, curvam hanc singularem concernentia; quae prouti m et coefficientes accipiuntur, varia pluribusque ramis utrinque infinitis complexa esse potest; et quum plures haud tanti momenti ab inventoribus nuncupatae sint, nisi inter tot tantaque alia Auctoris inventa occasum quasi heliacum pateretur, *Gaussiana* dici posset.

Ex gr. Est curva utraque, si ad *coordinatas orthogonales* (id est rectangulas) revocetur, ordinis m ti. Est nempe (Fig 57) $x=r \cos z$, $y=r \sin z$; et (per 171) quidquid sit n , est $r^n \sin nz =$

$$nx^{n-1}y - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3}y^3 + \dots, \text{ et}$$

$$r^n \cos nz = x^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}y^2 +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4}y^4 - \dots$$

Itaque tam functio superior, ipsum T quam functio ipsum U exprimens, pro $T=0$, et $U=0$, pro abscissis x e centro acceptis, et ordinatis y ad x perpendicularis, constabit (per 171) e certo terminorum formae $Ax^\alpha y^\beta$ numero, denotantibus α, β integros $\mp$ vos, quorum summa ubi maxima est, fit $=m$.

Danturque ad minimum m intersectiones lineae primae cum secunda; quamquam fieri etiam

possit, ut prima a pluribus ramis secundae secetur, et tum X plures factores aequales habebit. Intersectio autem sub angulis rectis fit; et si plura crura utriusque curvae in eodem puncto conveniant, totidem crura lineae primae adsunt, quot crura secundae, haecque alternatim posita, sub angulis aequalibus secant se invicem &c; sed totam dissertationem describere nimium foret. Hic sufficit unius intersectionis necessitatem demonstrare.

4. Demonstratur ibidem ad scopum praesentem; *e centro c describi posse circulum, in cuius peripheria sint $2m$ puncta (nec plura) in quibus $T=0$, totidemque in quibus $U=0$; et quidem ita, ut singula posteriora inter bina priorum jaceant.*

Dicatur enimvero (μ) extremitas arcus z ex a $\mp$ ve supra ac incipientis, si $z = \mu \frac{q}{m}$ (pro $q =$ dimidio quadranti, atque data aequatione X , gradus certi m); (dicaturque S summa coefficientium omnium terminorum post x^m sequentium $\mp$ ve acceptorum); dicaturque R quodvis $\mp$ r quod tam (posita omnino) unitate quam ipso $S/\sqrt{2}$ majus est. Eritque pro quibusvis R et μ , atque $z = \frac{\mu q}{m}$, per superius (p. 426) dictum,

$$T = R^m \sin \frac{m\mu q}{m} + R^{m-1} a \sin (m-1) \frac{\mu q}{m} +$$

$$R^{m-2} b \sin (m-2) \frac{\mu q}{m} \dots + Rk \sin \frac{\mu q}{m}; \text{ quod item est } =$$

$$R^{m-1} \left[R \sin \mu q + a \sin (m-1) \frac{\mu q}{m} + \frac{b}{R} \sin (m-2) \frac{\mu q}{m} \right.$$

$$\dots + \frac{k}{R^{m-2}} \sin \frac{\mu q}{m} \left. \right]; \text{ atque hoc pro } \mu = 8i+1$$

aut $\mu = 8i+3$ (denotante i integrum quemvis) $\mp$, et

pro $\mu = 8i+5$ aut $\mu = 8i+7$ minus est. Nam si $z =$

$$(8i+1)\frac{q}{m}, \text{ erit } \sin mz = \sin(8iq+q) = \sin q =$$

$\sqrt{\frac{1}{2}}$; nempe sinus dimidii quadrantis (pro radio 1) $= \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, et quidem valore

plus; ita pro $z = (8i+3)\frac{q}{m}$ est $\sin mz = \sin 3q$

$= +\sqrt{\frac{1}{2}}$; si vero $z = (8i+5)\frac{q}{m}$, erit $\sin mz =$

$\sin 5q = \sin(-3q) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$; ita pro $z =$

$(8i+7)\frac{q}{m}$, est $\sin mz = \sin 7q = -\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Unde substituendo in valore proximo $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ ipsi $\sin \mu q$: erit manifesto pro signo + valor plus, pro signo minus vero minus; nam etsi termini intra parentheses post primum (nempe $\pm R\sqrt{\frac{1}{2}}$) se-

quentes, pro signo + omnes minus, pro signo minus vero omnes plus essent, quum in nullo termino sinus unitate major per coefficientem multiplicetur, summa eorum $> S$ esse nequit; est vero $S <$

$R\sqrt{\frac{1}{2}}$, quia $R > S\sqrt{2}$; consequ. $R\sqrt{\frac{1}{2}}$ sive

plus sive minus fuerit, per summam sequentium non nisi ex parte destrui poterit.

Sed etiam pro quovis valore ipsius z inter

$(8i+1)\frac{q}{m}$ et $(8i+3)\frac{q}{m}$ cadente, valorem ipsius T

plus, et pro quovis valore ipsius z inter $(8i+5)\frac{q}{m}$

et $(8i+7)\frac{q}{m}$ cadente, $\vdash$ vum esse patet; nam si z majus accipiatur ipso $(8i+1)\frac{q}{m}$ et $\angle (8i+3)\frac{q}{m}$; erit $\sin mz = \sin$ ui arcus ipso q majoris et ipso $3q$ minoris; adeoque $> \sqrt{\frac{1}{2}}$, eritque $\ddagger$; ita si $z > (8i+5)\frac{q}{m}$ et $\angle (8i+7)\frac{q}{m}$, erit $\sin mz = \sin$ ui arcus $\vdash$ vi ipso $\vdash q$ majoris et ipso $\vdash 3q$ minoris; adeoque $\sin mz$ erit $\vdash$ et $> \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Pariter patet, valorem ipsius U esse $\vdash$ vum ubique pro valore ipsius z a $(8i+3)\frac{q}{m}$ usque ad $(8i+5)\frac{q}{m}$ (inclusive), et $\ddagger$ vum ubique pro z a $(8i+7)$ usque ad $(8i+9)$ terminato (inclusive). Nempe pariter est

$$U = R^{m-1} \left[R \cos \mu q + a \cos (m-1) \frac{\mu q}{m} + \frac{b}{R} (m-2) \frac{\mu q}{m} \dots + \frac{k}{R^{m-2}} \cos \frac{\mu q}{m} + \frac{l}{R^{m-1}} \right],$$

atque pro $z = (8i+3)\frac{q}{m}$, id est pro $\mu = 8i+3$, fit $\cos mz = \cos 3q = \vdash \sqrt{\frac{1}{2}}$, et pro $\mu = 8i+5$ fit $\cos mz = \cos 5q = \vdash \sqrt{\frac{1}{2}}$, estque cosinus ubique pro mz crescente a $3q$ usque ad $5q$, $\vdash$ et $> \sqrt{\frac{1}{2}}$. Ita $\cos (8i+7)q = \cos 7q = \cos (-q) = \ddagger \sqrt{\frac{1}{2}}$, et $\cos (8i+9)q = \cos q = \ddagger \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Unde in peripheria circuli cujusvis, cujus radius R est, inter quodvis punctum arcum $z =$

$(8i+1)\frac{q}{m}$ terminans, (id est punctum superius

per $(8i+1)$ designatum), et punctum $(8i+3)$, dari aliquod punctum debet, ubi $U=0$ est; ita inter quodvis punctum $(8i+5)$ et punctum $(8i+7)$. Nempe concipiatur z tanquam abscissa ab a $\mp$ ve crescens in peripheria dicta; erunt ordinatae U semper usquequo $z = \frac{q}{m}$ (imo etiam ulterius aliquam-

diu) $\mp$ vae, pro $z = \frac{3q}{m}$ erit jam $U = \text{vum}$; itaque

pro certo z inter $\frac{q}{m}$ et $\frac{3q}{m}$ terminato valor ipsius

$U=0$ esse debet. Pariter pro $z = (8i+5)\frac{q}{m}$ est

$U =$, et pro $z = (8i+7)\frac{q}{m}$ fit $U \mp$, adeoque et

inter haec puncta terminari tale z debet, e cujus fine erectum perpendiculum U fiat $=0$.

Ita inter quaevis puncta $(8i+3)$ et $(8i+5)$, atque inter puncta $(8i+7)$ et $(8i+9)$ alicubi $T=0$ esse debet. Itaque

$U=0$ fit inter (1) et (3) , (5) et (7) , (9) et (11) &c

$T=0$ inter $(8m-1)$ et (1) , (3) et (5) , (7) et (9) , &c

Danturque in peripheria quavis, cujus radius R est, $2m$ puncta, ubi $T=0$, totidemque ubi $U=0$.

Nempe peripheria $= \frac{8mq}{m}$, atque pro $i = m-1$, fit

$8i+7 = 8m-8+7 = 8m-1$, qui numerus impar $4mtus$ est, quem excipit $8m+1 = 8i+9$ (pro dicto $i = m-1$);

inter puncta $(8m-1)$ et $(8m+1)$, autem id est in-

ter finem arcus $z = (8m-1)\frac{q}{m}$ et finem arcus z

$= (8m+1)\frac{q}{m}$, pariter datur punctum, ubi $T=0$,

(nempe ubi $z = \frac{8m}{m} q$, et sinus $= 0$ est). Itaque

in tota peripheria $4m$ puncta erunt numeris imparibus parenthesi clausis signata, atque simul cum intervallo quod a $4m$ to impari usque ad $(4m+1)$ tum cum puncto (1) coincidens est, fiunt intervalla numero $4m$; cujus dimidium est numerus punctorum ubi $T=0$, et alterum dimidium est numerus punctorum ubi $U=0$.

Sed neque plura quam $2m$ puncta sunt in peripheria eadem, ubi $T=0$ fit, nec plura ubi $U=0$ est.

Denotentur enim puncta ubi T aut U fiunt $= 0$, per numeros absque parenthesi; nempe punctum ubi $T=0$ fit inter $(8m-1)$ et (1) , dicatur punctum 0; ubi $U=0$ fit inter (1) et (3), dicatur punctum 1; ubi $T=0$ fit inter (3) et (5), dicatur punctum 2; porro ubi $U=0$ fit inter (5) et (7), dicatur punctum 3, et ita porro: patet punctum quodvis numero pari signatum esse lineae primae, impari signatum lineae secundae; dicatur illud brevitate gratia *punctum par*, hoc verò *punctum impar*, et dicantur *puncta similia* quae in diversis circulis eodem numero parenthesi clauso gaudent, ita quae numero parenthesi destituito denotantur.

Si jam in eadem peripheria plura quam $2m$ puncta darentur, ubi $T=0$; tum alicubi, ubi punctum par est, in arcu inter praecedentem et sequentem numerum imparem parenthesi clausum comprehenso, ad minimum duo puncta esse deberent, ubi $T=0$; quod fieri nequit: concipiantur enim ordinatae T ab extremitate crescentis arcus z ex gr. a puncto (3) usque ad (5); fiatque prima vice $T=0$, pro z in puncto δ terminato; erit, si ante (5) detur adhuc punctum ubi $T=0$ est; aut post δ aliquamdiu $T=0$; aut in aliquo puncto ϵ erit post δ prima vice $T=0$; neutrum vero esse potest; nam statim patebit post δ non esse conti-

nno aliquamdiu $T=0$; crescet igitur aliquamdiu T a 0 , et demum decrescet dum ad e item $T=0$ fiet; cogitetur nempe punctum in arcu de porro motum, secum ferre perpendiculum, in quo punctum ex d incipiendo semper in extremitatem ordinatae T veniat, usquequo in e desinat; punctum hoc in perpendiculo moto prius ex d porro, tum eundo ad e retrorsum movebitur; in puncto perpendiculi eodem manere nuspiam potest (ut statim patebit); itaque si ubi prima vice incipiet retrorsum moveri, abinde usque ad e semper retrorsum eat, ibi T maximum habet ubi punctum retrorsum moveri coepit; si vero revertatur priusquam in e pervenit, ubi prima vice revertitur, ibi T minimo gaudet. Ut vero hoc fieri possit, aut ut T aliquamdiu idem maneat; deberet esse $\int T=0$ (p 315); quod pro x inter puncta dicta terminato fieri nequit. Nam pro quovis v est $d \sin vx = v \sqrt{2} \cos vx$, et $\int \sin vx$ (quoad vx) est $\cos vx$, at $\int \sin vx$ (quoad x) est $v \cos vx$; itaque $\int T$ (quoad x) pro quovis R constante, erit si in expressione ipsius T superiore pro termino primo intra parentheses ponatur $mR \cos mx$, pro 2do autem $(m-1) \cos (m-1)x = \frac{m(m-1)}{m} \cos (m-1)x$ &c; itaque m tanquam factor communis extra parentheses poni poterit, eruntque $\frac{m-1}{m}$, $\frac{m-2}{m}$ &c fractiones verae; adeoque valor ubique inter $(8i+3)$ et $(8i+5)$ valor $-v$ us erit, nam ibi $\cos mx$ est $-$ et $> \sqrt{\frac{1}{2}}$, ita inter puncta $(8i+7)$ et $(8i+9)$ valor $+$ vus est, (ut supra), quum $\cos mx$ ibi $+$ et $> \sqrt{\frac{1}{2}}$ sit. Itaque $\int T$ in his intervallis nequit $=0$ esse, adeoque in quovis intervallorum eorundem unum etquidem solum punctum datur, ubi $T=0$.

Idem de U eodem modo patet : nempe $\int U$ pro x inter $(8i+1)$ et $(8i+3)$ terminato ubique $\times$ et inter $(8i+5)$ et $(8i+7)$ ubique $-$ est; quum $\int \cos mx$ (quoad x) sit $= m \sin mx$, quod in priori intervallo $\times$, in posteriori vero $-$, et in utroque est $> \sqrt{\frac{1}{2}}$.

5. Patet in peripheriis omnium R puncta (1) in recta centrum petente esse, uti puncta quaevis eodem numero impari parenthesi clauso signata; ita rectam ab utrinque ∞ tam ramum unum lineae primae pro quovis m esse manifestum est; nam pro $x=0$ aut $x=\frac{4mq}{m}$ fit $\sin x=0=\sin 2x=\sin(m-1)x=\sin mx$ &c; adeoque pro quovis valore ipsius x (a 0 in ∞) ad puncta (0) et $(4m)$ fit $T=0$; estque punctum 0 cum (0) coincidens inter impares $(8i+7)$ et $(8i+9)$, punctum $(4m)$ vero cum puncto $2m$ coincidit, caditque inter impares $(8i+3)$ et $(8i+5)$ pro m impari $=2n-1$ et $i=n-1$, pro m pari $=2v$ autem et $i=v-1$ cadit inter impares $(8i+7)$ et $(8i+9)$; nempe $4m-1$ est impar $2mtus$, et pro $m=2n-1$, ex $4m-1=8i+3$ fit $8n-4-4=8i$, adeoque $i=n-1$; ita pro $m=2v$, ex $4m-1=8i+7$ fit $8v-8=8i$, adeoque $i=v-1$: estque post 2dum numerum imparem nempe inter (3) et (5) punctum lineae primae numero 2 (absque parenthesi) signatum; ita post 2mtum imparem sequitur punctum $2m$ lineae primae.

6. Sed etiam quivis circulus A sit radio $R >$ tam ipso $\sqrt{2}$ quam ipso 1, centro c descriptus; si complexus omnis puncti numero parenthesi clauso eodem signati, numero eodem romano denotetur: repraesentent (3) et (5) quosvis numeros impares proximos, inter quos $T=0$ fit; inter rectas III et V rarus unus lineae primae ex ∞ to veniens, circulum A ingrediatur, atque ex eo via continua alibi (adeoque in puncto pari, quum T non

alibi $=0$ esse queat) egrediens abit Item in ∞ . Nam in quovis arcu centri c inter III et V comprehenso datur punctum lineae primae; dicatur γ complexus omnis ejusmodi puncti; manifesto etiam intra peripheriam A manebit aliquamdiu $R > \sqrt{2}$ et simul >1 , adeoque inter III et V etiam γ intra peripheriam A protendetur.

Sed consideretur in cujusvis A peripheria, T puncti (3) (quod dicatur i) et T puncti (5); (quod dicatur f) erit illud T $\times$ vum, hoc vero $-$ vum; itaque i et f in plagas diversas superficiei primae cadunt; consequ. ex i nulla via puncti usque ad f datur, nisi quae per superficiem primam transeat. Atque hinc non γ solum interruptum esse nequit; sed etiam f , plano P et superficiei primae, communi continuo, circulum A post (3) ingrediente, atque post (5) alicubi exeunte, seclusum ab i esse necesse est; namque secus punctum in plano P ex i in f , ex una plaga superficiei primae quaquaversum ∞ tae in alteram venire posset, absque eo, ut per eam transeat. Exire autem continuum dictum ex A nonnisi per punctum par peripheriae A potest, quia T nonnisi ibi $=0$ fit; atque si punctum illud par $2v$ dicatur, de γ dictum et ad complexum omnis puncti $2v$ applicari poterit: at sufficit ad scopum; quodvis punctum par cum aliquo puncto pari peripheriae ejusdem junctum esse; atque etiam demonstratione eadem ad U applicata, quodvis punctum impar cum numero aliquo impari peripheriae ejusdem junctum esse.

Nimirum tum lineae primae cum secunda intersectionem aliquam dari pluribus modis evincitur. Ex gr. suppositio nullam intersectionem dari, necessario dari aliquam ponit; quod simul constare nequit: consequ. nullam dari falsum est, id est dari aliquam constat. Si nimirum supponatur nullam dari, punctum I cum nullo puncto ultra axem ab sito junctum est; nam I est punctum lineae 2dae, recta ab autem est pars lineae primae, ita-

que si 1 (in peripheria radii ac, pro ac $> \sqrt{2}$ posito) cum puncto n' junctum sit, (nempe cum aliquo puncto impari junctum esse debet); erit numerus $n' < 2m$, nempe ad 6 est numerus par $2m$, et n' impar ante $2m$ inter 2 et $2m$ cadere debet; inter 0 et 1 ac 1 et 2 enim numerus nec par nec impar datur, 2 vero est par, atque si n' ultra $2m$ esset, ab per $1 * n'$ (id est ramum qui ab 1 usque ad n' est) secaretur. Dicatur porro n'' punctum par cum quo punctum 2 junctum est; erit pariter $n'' < n'$, nempe punctum par n'' cadet post 3 et ante n' ; quia si retrorsum in 0 caderet, $0 * 2$ et $1 * n'$ se mutuo secarent, ita si post n' caderet, $1 * n'$ et $2 * n''$ se invicem secarent. Sit porro n''' punctum impar cum quo 3 junctum est; cadet n''' ultra 4 et ante n'' ; nam cum impari quod antea fuit (modo cum 1) jungi 3 nequit, quia tum $2 * n''$ et $3 * 1$ secarent se invicem, ita si n''' ultra n'' caderet, $2 * n''$ et $3 * n'''$ secarent se invicem. Sit porro n^{1v} punctum par cum 4 junctum, cadet n^{1v} ultra 5 et ante n''' ob eandem rationem. Sit item n^v punctum impar cum 5 junctum; cadet n^v ultra 6 et ante n^{1v} ; quia si retrorsum jungeretur cum aliquo impari (sive 1 sive 3), $5 * 1$ vel $5 * 3$ et $4 * n^{1v}$ secarent se invicem &c. Continuandoque hoc, usquequo tres numeri $h, h+1, h+2$ supersint ante proximum n (versus a) quod cum accentorum numero certo prodiit; punctum illud p cum quo h junctum erit, ultra dictum n cadere non poterit; nam tum $h * p$ et ramus qui ab n usque ad punctum anterius est cum quo jungitur, secarent se invicem; itaque h necessario cum $h+2$ jungetur; atque $h * h+2$ et ramus qui a $h+1$ usque ad punctum cum quo jungitur est, sive antrorsum sive retrorsum esset hoc, se invicem secare debent. Q. E. D. In (Fig 58) quam Auctor pro $X = x^4 - 2x^2 + 3x + 10$ construxit, ramis lineae 2dae per puncta denotatis, res oculis subjecta est.

§. 44. Pauca adhuc arboris ramos (179) illustrantia, praevis addenda sunt; ceteris in quantum instituti ratio permittit, tomo 2do reservatis; quum in hoc adhuc *generalis conspectus Geometriae* exponendus veniat, ut arbor utraque corradicata (p. 22) delineetur.

1. Dictum (184) erat e quavis functione $(F)x$ seriem deduci, cujus terminus generalis est $(F)m\dot{x} - (F)(m-1)\dot{x}$, terminorum summa vero est $=(F)x - (F)o$. Facile cogitatur, ipsi $\dot{x}$ constantem aliquam ex gr. 1 aut generalius $\frac{1}{\mu}$ substituere,

ut x sit $= n\dot{x} = \frac{n}{\mu}$, et terminus generalis sit $(F)m \cdot \frac{1}{\mu} - (F)(m-1) \frac{1}{\mu}$, atque summa sit $(F) \frac{n}{\mu} - (F)o$; nempe in $(F)x$, ponatur prius $n\dot{x}$ pro x , et tum $\frac{1}{\mu}$ pro $\dot{x}$. Ita deinde licebit n sive ut numerum constantem, sive ut in ∞ crescentem considerare.

Ex gr. Sit $(F)x = \frac{x}{1+x}$; erit $(F)m\dot{x} - (F)(m-1)\dot{x}$ terminus generalis seriei ex $(F)x$ deductae, qui pro $\dot{x} = 1$, fit $\frac{m}{1+m} - \frac{m-1}{1+m-1} = \frac{1}{m(m+1)}$; summa vero est $(F)x - (F)o = (F)n - (F)o$ pro $\dot{x} = 1$ adeoque $n\dot{x} = n$. Substituendo igitur in $\frac{1}{m(m+1)}$ ipsi m numeros ab 1 usque ad n inclusive, fiet series $\frac{1}{2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots$, et summa est $\frac{n}{1+n} - \frac{o}{1+o} = \frac{n}{n+1}$, quod ~ 1 si $n \sim \infty$:

Si $(F)x = \frac{ae^{\dot{x}}}{e-1}$; erit seriei deductae terminus generalis $(F)n\dot{x} - (F)(m-1)\dot{x} =$
 $\frac{ae^{n\dot{x}} - ae^{(m-1)\dot{x}}}{e-1} = \frac{ae^{(m-1)\dot{x}}(e^{\dot{x}} - 1)}{e-1}$, et summa est

$(F)x - (F)o = \frac{ae^{n\dot{x}} - ae^0}{e-1}$. Si $\dot{x}$ ponatur $= 1$; est

$\frac{ae^{m-1}(e^1 - 1)}{e-1} = ae^{m-1}$, et summa $= \frac{ae^n - a}{e-1}$, uti

(131) pro serie geometrica erat.

Si vero $\dot{x}$ ponatur $= \frac{1}{\mu}$; erit terminus generalis

$\frac{ae^{\frac{(m-1)}{\mu}}(e^{\frac{1}{\mu}} - 1)}{e-1}$, et summa erit $\frac{ae^{\frac{n}{\mu}} - a}{e-1}$

Prodit autem sic series geometrica, cujus (substituendo, numeros 1, 2... ipsi m) terminus 1mus est

$\frac{ae^{\frac{1-1}{\mu}}(e^{\frac{1}{\mu}} - 1)}{e-1}$, et 2dus $= \frac{ae^{\frac{2-1}{\mu}}(e^{\frac{1}{\mu}} - 1)}{e-1}$, et qui-

vis per $e^{\frac{1}{\mu}}$ multiplicatus dat sequentem. Unde etiam pro $n = \mu$, summa priorum μ terminorum erit
 $\frac{ae - a}{e-1} = \frac{a(e-1)}{e-1} = a$; et pro $n = 2\mu$ erit summa

$\frac{ae^2 - a}{e-1} = \frac{a(e^2 - 1)}{e-1} = \frac{a(e+1)(e-1)}{e-1} = a + ae$; atque

in genere si $n = k\mu$ (denotante k integrum quemvis $\neq$ vum); erit summa $= \frac{ae^k - a}{e-1} = \frac{a(e^k - 1)}{e-1} =$

$\frac{a(e-1)(1+e+e^2+\dots+e^{k-1})}{e-1} = a + ae + ae^2 + \dots +$

$+ ae^{k-1}$, quae est summa k terminorum seriei geometricae prioris. Quod vero $e^k - 1$ sit $=$

$(e-1)(1+e+e^2+\dots+e^{k-1})$, patet dividendo e^k-1 per $e-1$ (130). Solet autem m tus seriei hujus terminus, $\frac{m}{\mu}$ tus prioris appellari.

Ita si $(F)x = ax + \frac{x^2 d - x d}{2}$; erit terminus generalis $(F)m\dot{x} - (F)(m-1)\dot{x} = am\dot{x} + \frac{(m\dot{x})^2 d - m\dot{x} d}{2} - [a(m-1)\dot{x} + \frac{(m-1)^2 \dot{x}^2 d - (m-1)\dot{x} d}{2}]$; quod ponendo $\frac{1}{\mu}$ pro $\dot{x}$, fit $= \frac{a}{\mu} - \frac{d}{2\mu} - \frac{d}{2\mu^2} + \frac{md}{\mu^2}$, patetque seriem esse arithmeticam primi ordinis; prodeunte e termino quovis sequentem, addendo $\frac{d}{\mu^2}$. Summa vero erit $(F)x - (F)o = \frac{an}{\mu} + \frac{n^2 d}{2\mu^2} - \frac{nd}{2\mu}$, quum $(F)o = o$ sit; adeoque pro $\mu=1$ fit terminus generalis $a+(m-1)d$, et summa est $na + \frac{(n^2-n)d}{2} = \frac{(a+n)n}{2}$, uti (132) pro seriei arithmetica. Si vero $\mu k = n$ (pro quovis integro $\pm$ vo k) fiet summa $= ak + \frac{k^2 d - kd}{2}$, quae est summa priorum k terminorum seriei arithmeticae prioris; soletque et terminus m tus seriei hujus $\frac{m}{\mu}$ tus prioris dici.

Ita ex innumeris functionibus totidem series deduci possunt, quarum tam termini generales quam summae datae erunt: at quaestio suboritur: num e termino generali seriei alicujus ad functionem e qua deducitur perveniri queat? quo pacto etiam summa data esset. Expressio summae talis, in qua ipsi m quivis numerus substituatur, totidem terminorum summa exhibetur, vocatur *terminus summae*.

torius; qui si $= (f)m$ sit, pro termino generati prodibit omnino $(f)m - (f)(m-1)$.

2. Ad 3tium pag 179 pertinet: quod si $Ax^a + Bx^b + Cx^c \dots$ pro quovis valore ipsius x sit $= 0$; erit $A = 0 = B = C \text{ \&c}$, nempe quilibet soefficientium erit $= 0$. Nam tum etiam per x^a utrinque dividendo, et $A + Bx^{b-a} + Cx^{c-a} \dots$, y dicto; erit $y = 0$; pro quovis valore ipsius x , etiam pro $x = 0$; namque verum de x utvis parvo est, si non sit $= 0$; si vero $x \sim 0$, tum $Bx^{b-a} =$ aut ~ 0 , ita $Cx^{c-a} =$ aut $\sim 0 \text{ \&c}$; adeoque quotvis termini numero certo accipiantur, pro dato quovis ω fieri $A + Bx^{b-a} + Cx^{c-a} \dots - [A + B0^{b-a} + C0^{c-a} \dots = A] < \omega$ potest (nisi $= 0$ sit); sed $A + Bx^{b-a} + \dots = y = 0$ (pro x non $= 0$). Consequ. quum $y = 0$, et $y - A =$ vel ~ 0 , est $A = 0$ (p. 69). Idem etiam porro continuatur; ut nempe utrinque dividendo per x^{b-a} , prodeat $B + Cx^{c-a-(b-a)} \dots = B + Cx^{c-b} \dots = 0$, atque inde $B = 0$ et ita porro.

Ex gr. Si $\frac{1+x^2}{1-x-x^2} = 1 + ax + bx^2 + cx^3 \dots$; mul-

tiplicando utrinque per denominatorem, et subtrahendo numeratorem functio ad 0 reducetur, et collectis ubique coefficientibus ejusdem potentiae ipsius x ; erit

$0 = (a-1)x + (b-a-1)x^2 + (c-b-1)x^3 + (d-c-a)x^4$ atque hinc $a-1=0$, $b-a-1=0$, $(c-b-1)=0$, $d-c-a=0 \text{ \&c}$; adeoque $a=1$, $b=a+1=2$, $c=3$, $d=4$, $e=6$, $f=9$, $g=13 \text{ \&c}$, quibus valoribus substitutis, prodibit series functioni fractae aequivalens, si nimirum convergat, aut terminata sit.

Facile autem perspicitur, in isto casu quemvis terminum a 4to incipiendo, esse summam primi et 3ti ad sinistram, ex gr. $9=6+3$; dicitur series ejusmodi *recurrens*, cujus terminus quilibet certorum numero μ ad laevam praecedentium, (utpote

$\mu' \mu''$ - -), per certos factores multiplicatorum summa est, ita ut pro quovis termino, utus ad laevam per eundem factorem multiplicetur. Dicitur quoque series recurrens ejusmodi ordinis μ ti, et factorum dictorum series *scala seriei recurrentis* audit.

Ex gr. Pro termino 1mo $= 0$, et 2do $= 1$, atque scala 1, 3, fit series 0, 1, $1.1 + 0.3 = 1$, $1.1 + 3.1 = 4$, $4.1 + 3.1 = 7$, $7.1 + 3.4 = 19$ - -

Sed methodus antea dicta applicatur etiam, si (ut saepius requiritur, uti pag 227) functio fracta $\frac{(f)x}{(F)x}$, ut summa simpliciorum exhibenda sit; si-

quidem denominator in requisitos factores simplices resolvi possit; quod efficitur saepius, quaerendo radices aequationis $(F)x = 0$; quae si fuerint a, b, c , erit $(F)x = (x-a)(x-b)(x-c)$; sed ut-
cunque deventum ad hos factores fuerit; ponendo $\frac{(f)x}{(F)x} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$; determinantur A, B, C modo sequente.

Ex gr. $\frac{1}{a^2 x - x^3} = \frac{1}{x(a+x)(a-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a+x} + \frac{C}{a-x}$;
et reducendo ad denominatorem eundem, atque per eum utrinque multiplicando, et numeratorem qui ad laevam est, subtrahendo, fiet $0 = (a^2 A - 1) + (aB + aC)x + (C - B - A)x^2$; unde $a^2 A - 1 = 0 = aB + aC$
 $= C - B - A = 0$ adeoque $A = \frac{1}{a^2}$, $B = -C$, atque
 $C = B + A = \frac{1}{a^2} - C$; unde $2C = \frac{1}{a^2}$, et $C = \frac{1}{2a^2}$, atque
 $B = -\frac{1}{2a^2}$.

At ceteris, quae dicenda adhuc essent, tomo 2do reservatis; transeundum ad alteram arborem est.

GENERALIS CONSPECTUS GEOMETRIAE.

E mundo externo, abstrahendo pervenitur ad conceptum *spatii puri*: nempe corpus experientia externa omnino simul cum loco ejus datum, cogitatione tollendo, manet locus, quem occupasse videtur, finisque intra quos erat; atque tum quaerendo quid ultra fines illos sit, tollendo totum mundum experientia datum, et semper porro quaerendo, pervenitur ad noctem sanctam, quae myriadibus lucernarum accensis, Majestatis Summae praesentiam annunciat. In hac volvuntur innumeri orbes, expansis erga se invicem fraternis brachiis, et suspiriis undique tam gratorum, quam afflictorum pectorum, Patrem communem quaerentibus — in hac fert mater tellus sub florido sinu dormientes gnatos ad auroram aeternitatis — et in hac servatur omnis materia, nascunturque e germinibus mundi, vi mirifica vitali producti, crescunt, vivuntque, motum avitum (nisi alio pellantur) sequentes; atque intercunt, ut meteora fragoribus tempestatum in oceanum recidentes, novis initium daturi. At interno Geometrae oculo intuen- te, omnis quae apparet mundi discordia, cujus magnum problema in concordiam resolvere mortis *aequatio* est; bellumque omnium quod videtur in omnes, cum stridore omni clamoreque orbium disparet — ac jactatum e minacibus procellarum fluctibus, pacatus excipit noctis tranquillae portus, luce Veritatis alma collustratus.

§. 1. Primus intuitus ostendit sequentia: spatium est *quantitas*, est *continuum*, *infinitum* quaquaversum, aeternum, praesentibus semper partibus omnibus, praeterea *unum solum* est, et *immutabi-*

le, tam in se quam quoad quāvis partem, nisi quod alia in eo permutare partes ejus nempe loca possint. Tempus quoque quantitas, continuum, et unum solum, atque infinitum sed nonnisi utrinque, e quavis parte, quae nonnisi expers adest, atque semper alia atque alia venit.

§. 2. Intuitus ostendit porro sequentia: spatii portionis cujusvis finis, tale continuum est; cujus dantur ejusmodi 2 portiones, ut id quod utriusque finibus commune est, continuum sit, et quidem tale, ut hujus item dentur ejusmodi 2 portiones, quarum finibus commune expers est. Hinc

1. Pars ejusmodi expers spatii vocatur *punctum spatiale*, distinctum omnino a *puncto temporis*.

In quavis spatii parte dari punctum, et omnia spatii puncta aequalia esse item intuitu patet.

2. E continui prius orti portione, et tum e continui posterius orti portione, construuntur conceptus sequentes, (combinatis ejusmodi portionibus).

I. Si continuum ex $A, B \dots F$ constet, et quodvis horum, portio finis, alicujus portionis spatii, sit: dicitur *superficies*.

II. Si vero continuum ex $a, b \dots k$ constet, et quodvis horum, portio finis, alicujus superficiei, sit: dicitur *linea*.

III. Atque si continuum ex $\alpha, \beta \dots \lambda$ constet, et horum quodvis aut superficies aut linea sit: dicitur *forma* (sensu proprio).

IV. Si vero continua qualiavis P et Q fuerint e spatio, atque aliquid commune habuerint: tum si I complexus omnis ejus quod utrique commune est, pars utriusque indivellibilis sit (p.17); dicitur *I sectio ipsorum P et Q se mutuo secantium*.

3. Interim superficies, etiam ejusmodi continua pars indivellibilis spatii dici potest, cujus nulla portio linea est. Imo statim definito stabilitoque motu geometrico, linea etiam via puncti dici po-

test ; et lineae via quoque superficies est , sed non quavis superficies via lineae est.

§. 3. Redeundo e spatio in mundum externum , unde segregatum erat ; corpus idem in alio quoque loco videnti , quaestio succurrit : *num loca ejusdem diversa aequalia sint* ? Intuitus ostendit , aequalia esse.

I. Hinc quum in quavis spatii portione cogitari corpus queat ; constructur (sine ulla virium consideratione) pro quavis portione spatii mobile tale , quod cum ea coincidens ab ea diversum , cogitatione quaquaversum libuerit in spatio ferri queat , nihil aliud e corporis externi qualitate retinens , nisi quod idem sub eodem tempore diversa loca occupare nequeat.

II. Cum ita constructo mobili iterum reditur in spatium ; formaturque *axioma congruentiae*. Nempe si posito mobili tali , idem diversis temporibus posset cum A et B coincidere ; tum $A \doteq B$ esse intuitus ostendit.

At non cum quibusvis A et B *geometricè aequalibus* (de quo inferius) mobile idem coincidere potest. Ex gr si A et B cochleae , una ad dextram altera ad laevam (etsi alioquin aequales) sint ; et innumeros casus tales dari patebit. At (per p. 7 Ax V. certa cum determinatione) talia A et a generabuntur , ut mobile idem diversis temporibus cum a et B coincidere queat.

Quando quidvis P moveri dicetur : semper tale mobile continuum intelligi debet , in quod incidit totum P (etiamsi complexus punctorum sit).

Si vero scribatur $A * B * C \doteq a * b * c \dots$; intelligatur mobile in quod cadunt A, B, C --- ita poni posse , ut A cum a , B cum b , C cum c simul coincident.

Vivit magis , facilius evidentiorque fit Geometria motu dicto admissa : usique eo sunt *Archimedes Graecus* et *Britannus* ; atque simulac Δ unum superimponitur alteri ; (uti in Euclide) idem

ubique admittendum sensu dicto est; reipsa enim spatii pars nulla locum, sed rem eam tantum quam sub certo temporis puncto capit, mutare potest. Prolixius tamen, eadem sine motu quoque tradi possunt.

§. 4. Interim post dicta ultro subvenit, in determinationem conceptuum motum respicientium inquirere.

1. *Locus* ipsius A dicitur in spatio, complexus omnis ejus, cum quo aliquid ex A sub eodem puncto temporis coincidit.

2. Quod sub quovis puncto temporis T est, dicitur *semper esse sub T*.

3. Prodeunte quasi formula, quod M *habeat locum* L *sub T*, aut *sub T locus L est ipsius M*; succurrit quaerere; quidnam sit, si per omnes combinationes transeundo, substituatur ipsi M, *aliquid ex M*, *omne ex M*, *non omne ex M*, *nullum ex M*, aut *aliquid exclusive*; ipsi T vero substituatur, *aliqua puncta temporis*, *omnia*, *nulla*, vel *aliqua exclusive*; atque ipsi L substituatur *idem*, *non idem*; item quaevis horum variis determinationibus afficiantur; atque casus constructi vario modo combinentur: at brevitatis gratia, quaedam tantum magis necessaria referenda sunt; notando, ad sensum combinationum attendendum esse; ex gr. *omni locus non idem*, et *non omni locus idem*, haud aequivalent; nempe prius denotare potest, quod *omni sit non idem locus*, id est *nulli sit locus idem*.

4. *Omni ex M* (id est *omni quod ex M est*) *locus idem* in spatio semper sub tempore continuo T, *quies ipsius M sub T* dicitur.

5. *Alicujus ex M locus non idem sub aliquibus punctis ipsius M est motus ipsius M*.

6. *Motus sub quavis portione ipsius T eveniens, est motus sub T*.

7. Alicujus autem (exclusive) locus idem semper, est vel motus in loco (ex gr. sphaerae), si aliquod illud ipsum M sit; vel compositio quietis et motus; nempe si aliquid quiescat moto M ; imo sphaera in loco fui moveri potest, quiescente centro tantum, (vel etiam diametro).

8. Si quid Q ex M , moto hoc quiescat: dicitur M circa Q moveri.

9. Porro aliqua puncta ipsius T , possunt certo modo determinata 2 puncta quoque denotare.

Imo. Omni ex M locus idem duntaxat sub primo et ultimo puncto temporis alicujus; est *reditus perfectus*.

2do. Ipsi M locus non idem sub certis punctis a et b ipsius T , parit conceptum sequentem: si locus non idem sit; aut habet prior cum posteriore commune aut non; si nec quidquam, aut utriusque indivellibile, sit commune, dicitur M *totaliter emotum*.

3tio. Si pro quovis puncto a ipsius T , sit talis pars continua ejus ipsum a complectens, ut sub nullis 2 punctis hujus sit locus idem ipsius M , aut portionis ullius ejus; tum M *porro moveri* dicitur.

§. 5. Variarum hinc exoriuntur quaestiones.

I. Potestne punctum p undevis moveri, usquequo in quodvis datum spatii punctum M perveniat? et quidem ita, ut quidvis in quod cadit secum ferat? et p qualem viam describit?

Intuitus ostendit p , quidvis in quod cadit, secum ferendo, via quacunque, p cum M connectente, (imo innumerabilibus viis) moveri posse usque in M ; et viam quamvis ejus esse lineam.

Et haec est *Ima operatio motus intuitiva*.

Linea si e nullo ejus puncto duabus plures puncti viae in ea dentur, dicitur *simplex*; et *superficies*, cujus nullarum trium portionum sectio linea simplex datur, dicitur *simplex*.

Linea simplex dicitur in se rediens : si punctum in ea motum in locum primum ita redire queat, ut antea in nullo loco jam habito fuerit.

II. Quaestio fit: num moto mobili, aliquid ex eo quiescere possit? Num possit unum punctum quiescere? et duntaxat unum? num duo aut plura? et tum complexus omnis sub motu quiescentis, qualisnam sit? qualis esse nequeat? Quoad Ium intuitus ostendit, quodvis M in quod p cadit, innumera- bilibus viis posse circa p moveri, ita etiam, ut quodvis punctum a in M cadens (a p diversum) redeat.

Operatio 2da motus intuitiva.

Hinc passus ad omne, parit superficiem sphae- rae; nempe complexum omnis ejusmodi puncti b , ut $p * a \doteq p * b$. Intuitus ostendit: Imo complexum hunc, esse superficiem, per quam spatium in duas por- tiones dispescitur, unam cum puncto p interno undique clausam, et alteram circumcirca in ∞ tum exclusam, ipsam vero esse finem utriusque com- munem. 2do nullum punctum posse ex una portio- ne in aliam venire, nisi per finem communem transeat: quod deinde extenditur ad quasvis duas portiones continui alicujus finem communem ha- bentibus, si punctum in eodem continuo moveri o- porteant.

Potest sphaera dicta, dici *sphaera puncti a* , cen- tro p ; atque puncta superficiei a centro aequaliter distantia dici possunt, distantia puncti p ab a per $a * p$ expressa (sensu 444).

Complexum punctorum omnium a centro ae- qualiter distantium, superficiem esse, si non ipsum pro axioma adsumatur, probari quoque potest: nempe si quid portionis spatii complectatur; id circumcirca adesse debet, et quidem sine ulla pro- minentia, quum id item ubique circumcirca fieri deberet; itaque duae superficies essent exterior inté- riorque, centrum undique punctis omnibus acquidi- stantibus claudentes; quas diversas esse non posse lem intuitu patet.

III. Sed sphaeram consideranti, ostendit porro intuitus: quod si puncta a , b , p in M cadant, atque ipsius b via detur circumcirca quoad $a * p$ aequaliter determinata: tum M ita moveri circa $a * p$ potest, ut viam dictam describat.

3tia. *Operatio motus intuitiva.*

IV. At vero quaestio oritur: Imo quomodo punctum ejusmodi b ostendi possit, cujus circumcirca $a * p$ via detur? 2do num id quoque fieri possit, ut pro b nonnisi unum tale d detur, ut $a * p * b \doteq a * p * d$? et 3tio quidsi id quoque fieri possit, ut nullum tale d detur; ut $a * p * b \doteq a * p * d$?

Atque hinc ipsi $a * p$ quidvis A substituendo, conceptus sequens oritur.

Si non detur tale C diversum a B , ut $A * B \doteq A * C$, et quidem ut quovis puncto ipsius A in loco primo manente, C in locum non eundem cum B cadat: dicitur B *unicum ipsius* A . Si vero nec ullum punctum ipsius B aliorum cadere queat; dicitur B ipsius A *prorsus unicum*.

Facile animadvertitur, A secum coincidere posse, etsi puncta non omnia loco priori maneant; ex gr. si pro p centro sphaerae, et a puncto superficiei, denotetur $a * p$ per A , erit etiamsi p in a et a in p cadat, sphaera unica ipsius A ; et nomen speciale huic casui quoque dari potest.

Interim quaestio etiam oritur; num $a * p \doteq p * a$? Intuitu ita esse patet.

Exempla. Si a, b, c vertices $\triangle$ li sint; quidvis e spatio, ipsius $a * b * c$, prorsus unicnm est; superficies revolutione quae lineae cujusdam circa duo puncta fit, horum unica, sed non prorsus unica est.

Si vero $ab = ac$; tum poterit $a * b * c$ secum etiam ita coincidere, ut a in se, b in c et c in b cadant, et si plani in quo $\triangle$ est, una plaga α altera β dicatur, facies $\triangle$ li quae ipsi α obversa erat,

ipsi β obvertetur, et ipsi α quae ipsi β obvertebatur; atque si punctum p in plagam α cadat, et Δ circa L_{rem} ex a ad bc , simul cum α verti concipiatur; dum α in β cadet, p quoque in β erit, et si in p' cadat, erit $a * b * c * p \doteq a * c * b * p'$. Idem patet etsi p in planum idem extra L_{rem} dictam cadat: atque in omni casu unum adhuc dabitur punctum p' tale ut dictum est, nisi p in L_{rem} dictam cadat; tum vero erit etiam $a * b * c * p \doteq a * c * b * p$.

§. 6. Hinc passus ad omne fit; nempe complexum omnis puncti quod unicum punctorum a, b est; (nempe rectam); quod item latius extensum, parit conceptum sequentem.

Illud e spatium quod, quorumvis duorum punctorum sui, quodvis unicum punctum spatii complectitur; dicitur *recta* si *linea* sit, *planum* si *superficies* sit; patebitque esse *spatium* quaquaversum ∞ tum si *portionem spatii* complectatur; imo et *recta* planumque per hanc definitionem ∞ ta exhibentur; at vero num dentur talia? quaestio fit: inferius ostendetur, rectam per quaevis 2 puncta, planum per quaevis 3 puncta dari.

Cum definitio ista simul affinitatem plani cum recta exprimat, plures exactas quidem suppressere licet; aliqua tamen hujus generis adferre fas est.

Forma certorum 2 punctorum unica, cujus pro omnibus punctis datur tale idem punctum p ; ut pro quibusvis 2 punctis a et b formae dictae, sit $p * a \doteq p * b$; est si *linea* sit, *circulus*, si *superficies* sit *sphaera*.

Linea simplex certorum duorum punctorum unica; est si *rediens* sit, *circulus*, si non, *recta*.

Forma alicujus puncti unica, est *sphaera*.

Elegans est plani definitio, quam I. B. Auctor Appendicis dedit: complexum omnis ejusmodi puncti p , ut pro certis 2 punctis a et b (iisdem pro

II;

omnibus p), sit $p * a \doteq p * b$; dicendo *planum*, sectionem duorum planorum vero *rectam*.

§. 7. Prodeunte plano, in quod cadit a quovis puncto ad quodvis ejusdem ducta recta; campus simplicior clariorque aperitur, circumcirca expansus in ∞ tum, spatium in duo dimidia aequalia dividens, quamvis (ut inferius ostendetur) congruere manentibus omnibus dividendis punctis in suis locis, nequeant. Huc idcirco mens e spatio quaquaversum ∞ to descensura, antea tamen in rectae planique combinationes generaliter disquirat.

Quaevs A et B, quorum quodvis aut rectam aut planum denotet, aut secant se, aut non: quaeritur, num possint secare, et possint non secare? et si possint, quando id fiat? et sectio qualis sit?

Demonstrabitur, pro dato quovis plano P et puncto p , dari tam planum quam rectam, ipsum p complectentia, ipsum P non secantia, etsi singula simul ∞ ta accipiantur; ita pro data recta A et quovis puncto p dari rectam B patebit, ipsum p complectentem, quae ipsam A non secet, etsi utraque ∞ ta concipiatur; et quidem tam in illo plano, in quo A et p sunt, quam extra illud. Patebit porro per idem punctum innumera plana dari, et quorumvis planorum P et Q, ∞ tornum punctum commune habentium, sectionem rectam utrinque ∞ tam esse; ita per quodvis punctum rectas innumeras dari, et quarumvis duarum rectarum aliquid commune habentium, sectionem unum punctum esse.

At quaestio subvenit, num per p unum solum, aut plura quoque plana diversa dentur planum P non secantia? si nonnisi unum sit, tum et sectio plani illius solius P', atque plani P, per planum tertium Q (per rectam ex aliquo puncto ipsius P ad aliquod ipsius P' ductam positum) facta, ejusmodi par rectarum producet, quae in planum Q cadentes se invicem non secant, sed quaevs alia per pun-

cum p in eodem plano Q posita, secat rectam ipsam P et Q communem; nam si non secaret, facile demonstratur, et planum per rectam illam ex p positum dari, quod planum P non secaret. Atque tum Axioma XI Euclidis constaret: sed de hoc plura inferius.

Hic prius plures rectas ex eodem puncto euntes combinando, oritur conceptus sequens.

I. Si rectae e puncto eodem p exeuntes in forma quadam (sive pars plani sit sive non) desinant: complexus rectarum omnium, quae a p ad puncta formae alicujus sunt, dicitur *pyramis* (sensu lato) *basi f insistens*; quo etiam Δ pertinet, si forma f recta sit. Hinc porro

1. Rectarum istarum quidem cujusvis sua magnitudo determinata est: at rectis his quasi ex p acceptis, et complexu extremitatum earum pro objecto considerationis posito; facile succurrit, quae-rere: quidsi omnes ex gr. bis vel ter &c longiores brevioresve essent? verbo ut quaevis fiat $\frac{n}{m}$ ta-prioris? Atque hinc oritur conceptus sequens; notando quod per *plagam k* ipsius A intelligatur illa portio α continui A e portionibus α et β constantis, in qua k est; posset si de α , excluso c quod ipsis α , β commune est, sermo sit, *regio k ex c dici*. Per *internum* continui vero intelligitur id quod ex eo est, nihil cum fine illius commune habens.

Imo. Si quidvis Q fuerit e spatio, cujus punctum quodvis generaliter Ω dicatur, et sit pro omnibus Ω idem punctum p et eadem quantitas β : atque accipiatur in omni quavis recta, a p per aliquod Ω eunte, recta $pq = \beta \cdot p\Omega$, (omni quovis q in ea rectae $p\Omega$ plaga in qua Ω est accepto); tum complexus P omnis q dicitur *simile* ipsi Q ; atque complexus quorumvis q complexui ipsorum Ω illis q respondentium *homologum* audit. Hoc sensu igitur dari quoque similia patet.

Possunt etiam P et Q *similia* dici: si cuius puncto cuiusvis ipsorum P et Q respondeat certum alterius punctum, et cuiusvis alii aliud: atque detur quantitas β eadem pro omnibus talis, ut quaevis puncta A, B fuerint ipsius P , iisque respondeant a, b ex Q ; sit $AB = \beta \cdot ab$. Dari talia (si Ax. XI Eucl. constiterit), per ΔIa ad p verticalia patet.

Aut: si quaevis 3 puncta A, B, C accipiantur in P , iisque (ut dictum est) respondeant a, b, c ex Q ; atque anguli (de quibus inferius) $ABE = abc$, $BAC = bac$, et $BCA = bca$; tum pariter P et Q *similia* dici possunt (posito Ax. XI. Eucl.).

Elegans est conceptus *similium*, quem I. B. Appendicis Auctor dedit: si e puncto eodem quocunque p concipiantur rectae ad omne punctum ipsius Q ; complexum extimarum omnium ex omnibus illis rectis, quae a p ad punctum aliquod ipsius Q sunt, in ∞ productarum, *formam relativam* ipsius Q apellando; *similia* dixit P et Q , si cuiusvis formae relativae ipsius P detur forma aliqua relativa ipsius Q aequalis.

Quodvis autem horum per quodvis eorundem poni demonstrari potest, si Axioma XI Euclidis constiterit.

2do. Sed e prima definitione facile quaestio oritur; quidsi omnia q in altera plaga (non ubi respondens Q est), accipiantur? Hoc pacto quoque formas certo respectu similes prodire patet, (si conceptum ita extendere libuerit): at etiam pro $\beta = 1$ formae tales verticales prodeunt, quae alioquin certo respectu (statim dicendo) aequales; nunquam tamen congruere queunt, atque etiam compresentes discerni praeter locum quoque possunt. Ex gr. Sit Q manus dextra; generabitur in plaga altera post p , forma manui sinistrae congrua: si enim eadem forma generata ita invertatur, ut quod superius erat inferius, et quod infra erat sursum verius, prodibit imago quasi in speculo S per p posita reflecta, versione dicta circa L rem ex p ad speculum S usque ad 2 rectos facta. Intelligitur autem hic

per imaginem ipsius Q complexus punctorum omnium, quae L_{res} ex omnibus punctis ipsius Q ad planum S missas, in altera spatii plaga aequaliter continuatas terminant. Facile patet, versione dicta L_{res} e punctis respondentibus quibusvis A et a ad S missas antea aequales, nunc in puncto eodem ipsius S terminari, sit nempe (Fig 59) in plano speculi recta ad planum tabulae L_{ris} ex p : sitque ipsius $DABE$ punctum D supra tabulam, ABE in plano tabulae: fiantque $ap = Ap$, $bp = Bp$, $cp = Cp$, et $dp = Dp$; erit manifesto d infra tabulam, et (propter $\triangle la$ verticalia aequalia) erunt L_{res} e literis nominis ejusdem ad planum speculi missae aequales: atque si schema literarum minorum circa Pp L_{rem} ad pf per 2 rectorum intervallum vertatur, cadet m in M &c, et d quoque supra tabulam e regione ipsi D erit.

Rem adhuc illustrat, si duarum cochlearum alioquin aequalium, una dextrorsum altera sinistrorsum torta sit, atque illa ad latus speculi, haec coram teneatur; sinistrae imago erit cochlea dextra, quae illi quae ad latus tenetur, congruere poterit; ita imago manus dextrae manui sinistrae congruere poterit; sed manicae manui dextrae congruentis superficies interior extrorsum vertenda est, ut sinistrae congruat.

3tio. Unde etiam conceptus sequens oritur. Si A non omnia puncta in eodem plano habeat, neque complexus sit ejusmodi partium a et b , ut a et imago ipsius b , compraesentes nonnisi per locum discerni queant: tum A et quodvis tale B , ut B et imago ipsius A compraesentes nonnisi per locum discerni queant, dicuntur *formae contrarie aequales*. Nempe hae sunt, quae congruere nequeunt; quamvis per L_{res} ex ejusdem plani fisdem punctis in utraque plaga aequales, resultata (per Ax. V. pag. 7) operationum aequalium sint, praeterquam quod unum in una, alterum in altera plaga generetur.

4to. Unde item novus conceptus nascitur: nempe *geometrice aequalia* dici possunt A et B; si aliquod C possit cuivis, aut ipsi aut imagini ejus, congruere.

5to. Notandum autem est, et ad facies, quibus congruabilia congruere queunt, attendendum esse. Ex gr. Δli non aequicruri imago cum ipso nonnisi faciebus e regione stantibus, aut faciebus aversis tegentibus se invicem congruere possunt. Dicantur ob conceptum faciliorem, facies obversae ejusdem coloris (ex gr. albi), aversae nigri; facies alba albam, aut nigra nigram tegat necesse est, ut congruant: si vero parallelogrammi una facies alba altera nigra sit, tum Δla per diagonalem facta, nonnisi ita congruunt, ut facies alba Δri unius nigram alterius tegat. Circuli vero aut Δli aequicruri imago, circa rectam bifariam dividentem ad 2 rectorum intervallum mota, nigram faciem albae obvertens quoque congruere poterit.

Sed prius dicta illustrantur adhuc per sequentia: si e Δli puncto quovis fiant ad planum Δli tres in utraque plaga aequales: tum formae ipsius F dantur partes tales ut supra dictum est, nempe forma e Δlo et $L ri$ quae in una plaga est constans, item forma ex eodem Δlo et $L ri$ altera constans tales sunt, ut complexus earum F sit, et una, imagini alterius absolute aequalis sit; atque F cum imagine sua congruere quoque potest.

At si in una tantum plaga sit $L ris$; nisi e $L ri$ Δlum aequicrurum bifariam dividente erecta sit, haec forma talibus 2 partibus ut dictum est, non gaudet; neque potest cum imagine sua congruere.

Sit item (Fig 60) janua ABCD; ad u, v sint cardines, EFGH sit sera prominens, quae cum prominentia ipsius E januam claudit; sit imago hujus abcd, et facies e regione stantes sint albae: manifesto sera et imago ejus prominens erga se invicem porrecta sunt; atque faciebus albis et AB ac ab congruentibus, sera et imago ejus in plagas contrarias cadent: sed si ad FE et GH (supra et infra) omnia

aequalia essent, adeoque darentur duae partes ut dictum est; tum verso ipso $abcd$ circa if usque ad 2 rectos, ut facies nigra imaginis faciei albae obiecti obvertatur; prodibit $dcba$, cujus (simul cum se ra, juxta schemata) facies nigra congruit albae faciei ipsius $ABCD$. At si ad E sit aliquid ut supra, quod ad H non est, congruentia impossibilis est.

Cujusvis animalis forma externa, (in qua monstrositas nulla est) ita a natura comparata est, ut gaudeat duabus ejusmodi partibus, ut supra dictum est; imo talibus ut una, imago alterius esse possit, quasi ex uno plano in utraque plaga modo supra dicto aequaliter generata, geometricè (sensu dicto) aequalia essent.

II. Rectis porro pluribus (imo innumerabilibus) punctum p commune habentibus, in sectione praecedente ob oculos habitis; facile cogitatur, rectam pP circa p moveri, et formam viae ejus considerare: inter vias ejus possibles occurrit etiam via rectae pP circa p porro ita motae ut redeat. Via talis aut erit in plano eodem tota, aut non.

I. Si prius; tum via cujusvis puncti (praeter p) vocatur *circulus*, et pars quaevis continua ejus (perimetrum intelligendo) dicitur *arcus*, recta vero quae a p usque ad punctum est, de cujus via sermo est, *radius*, p *centrum*, et recta ab uno perimetri puncto ad aliud *corda*, et si haec per centrum eat *diameter*, pars plani inter arcum et cordam ejus comprehensa *segmentum*, illa vero quae inter arcum et radios per extremitates arcus ductos est *sector* dicuntur.

Si vero (Fig 61) punctum ab a incipiendo in peripheria semper porro moveatur usque ad quodvis punctum f , et via v ejus accipiatur $\pm va$, si via supra *diameterum* ab (quae *primaria* dicatur) incipiat, et $-va$ si via infra ab incipiat; atque partes diametri dictae e centro versus a $\pm ve$ versus b $-ve$, et $\perp$ res ad ab supra ab $\pm ve$ infra ab $-ve$ accipiantur: dicitur distantia puncti f ab ab (id est

[*his ex f ad diametrum primariam*] *sinus* *et* *di-*
et *ae* *v* ab *a* usque ad *f*, sive $\pm v$ sive $-v$ facta
 fuerit via, imo etsi punctum dictum semper porro
 motum quotiesvis iterum in *a* pervenerit, dummo-
 do demum in *f* subsistat. Distantia centri vero *a*
 sinu vocatur *cosinus* ipsius *v*, distantia initii *a* au-
 tem ab eodem sinu, *sinus versus* ipsius *v* audit;
 $\frac{\sin v}{\cos v}$ autem (pro radio $=1$) dicitur *tangens* ipsi-

us *v*, et $\frac{1}{\cos v}$ *secans* audit. *Complementum* ipsius

v dicitur talis arcus α , ut $\alpha + v =$ quadranti q , si
 ex gr. $v = 3q$, erit $\alpha = -2q$. Insignitur autem $\sin$
 α , $\tan \alpha$, $\sin \text{vers } \alpha$, $\sec \alpha$ nomine eodem relate
 ad *v*, nonnisi syllaba *co* praeposita, nempe dici-
 tur *cosinus* *v*, *cotangens* *v*, *cosinus versus* *v* &c;
 quasi diceretur *complementi sinus* &c. . . ut faci-
 le patebit et *cosinus* definitionem priorem cum hac
 convenire, uti et *sinum* versum dici potuisse $1 -$
 $\cos$; atque suo loco omnes has *functiones trigo-*
metricas dictas geometricè exhiberi. Nomen *si-*
nus inde exortum est, quod semissis cordae arcus
 dupli, per *s.* ins. (idest *semissis inscriptae* scri-
 bebatur.

2. Si non sit via rectae prius dicta in eodem
 plano; tum facile cogitatur; rectam motam saltem
 in plaga a plano certo per *p* posito eadem semper ma-
 nere; donec porro mota redeat: dicatur via ejus-
 modi *V forma ad p apicata*, quum forma ejusmo-
 di manifesto singularitate aliqua ad *p* gaudeat, quod
 vulgo sub nomine *apicis* venit.

3. Tum facile succurrit lineam aliquam sim-
 plicem considerare, cujus nonnisi punctum unum
 (et quidem internum) in *V* et plane in *p* cadit; o-
 mnia alia puncta vero in plagam spatii ex *V* ab ea
 in qua planum est diversam cadant; et lineam il-
 lam in superficie aliqua, et demum in plano sitam
 considerare; et hinc conceptum sequentem genera-
 liorem construere.

4. Si k aut punctum internum lineae talis k , quae portio formae F est, aut linea talis sit, cuius punctum quodvis internum p , internum etiam est lineae alicujus L in plano sitae, et simul portioni alicui formae F communis; atque in casu priore, linea k puncto k in p cadente, in posteriore vero linea L , puncto p in p cadente, in plagam respectu formae alicujus ad p apicatae interiores cadat: tum dicitur F *ad k angulum habere*, nempe forma illa, qua F ex k incipit, *angulus* vocatur.

Facile videtur, angulos esse posse in lineis, in superficiebus, necnon in continuo e linea et superficie composito.

5. Quaestio autem fit: num recta A e puncto interno i rectae B ducta angulos faciat? et quot angulos efficiat recta A continuata per i ? num aliqui eorum sint aequales, et qui sint ii? facile patebit verticales dictos esse semper aequales; si vero singuli quatuor qui efficientur, sint inter se aequales, aut recta A per i non continuata, efficiat duos angulos aequales, vocatur quilibet eorum *rectus*. Fit vero *angulus* per duas rectas factus, *rectilineus* dictus, *quantitas respectiva* (p. 20) divisione arcus, ex anguli apice tanquam centro, radio quovis ab una duarum rectarum, usque ad alteram ducti, per peripheriam totam radii ejusdem; si quoti hi sint pro duobus angulis aequales, et formas angulares congruentes incipere demonstrabitur; si vero quotus q sit pro angulo α , et Q pro angulo β , atque $q = p Q$, tum α dicitur *angulus p plus* anguli β (p. 41). Duorum planorum angulus autem fit *quantitas respectiva*, arcu illo per suam peripheriam diviso, qui uno eorum circa sectionem usque in alterum moto, per quodvis punctum describitur; eundem quotum prodire patebit.

Angulus rectae ab cum plano vero fit *quantitas* resp. dividendo arcum illum per suam peripheriam, quo in superficie sphaerae centri a (in quo sectio est) et radii ab , ex b usque ad planum, cum radio ab nullus minor datur. Denotatur angulus per Λ

6. Passus hinc est, cogitare: quid si forma aliqua ad nullum sui punctum angulo gaudeat? dicatur *forma* ejusmodi *fluens*; quae item facile cum quantitate combinatur; oriturque conceptus formae, quae et fluens et quantitas est; et dici *forma* ejusmodi *uniformis* potest. Ex gr. recta, circulus, helix, planum, superficies sphaerae, cylindri.

7. Ita facile conceptus formae fluentis etiam cum exclusione rectae planique componitur: oriturque forma fluens, cujus nulla portio recta aut planum est, et dicitur *forma* ejusmodi *curva*.

8. Porro ad compositionem *curvae* cum recta planove itur, quaerendo num continuum e forma curva, et recta planove forma fluens esse queat? oriturque conceptus *tangentis*. Nempe

Formam curvam F in puncto p tangere dicitur, tam una recta ejusmodi, quam complexus omnium talium rectarum, ut cujusvis earum detur tale punctum internum p in F cadens, ut aliqua portio ex p incipiens cum linea aliqua in F sita ex p incipiente forma fluens sit. Complexus omnium talium rectarum (sive una tantum sive plures sint) dicitur *tangens totalis*.

Ex gr. Sphaeram potest tangere recta sed tangens totalis planum est, uti circuli recta.

Hinc facile in discrimen tangentium totalium in diversis formae ejusdem F punctis quaeritur: atque si tale k detur in F , ut tangentium totalium, quae ad omnia puncta ipsius k sunt, complexus ipsa tangens totalis ad p sit; tum tangens eadem dicitur formam F non in p solum, sed etiam in k tangere. Ex gr, planum idem tangere cylindrum in recta et quovis puncto hujus potest.

Imo hinc extenditur conceptus; dicendo etiam *formas fluentes quasvis F et f tangere se invicem in k*, si in quovis puncto ipsius k tangente totali tam F quam f eadem gaudeant.

Hinc etiam oriuntur conceptus supra (257) dicti.

Q. Porro conceptus tangentis totalis scilicet cum conceptu anguli recti (paulo antea dicti) combinatur; oriturque *conceptus generalis perpendicularitatis*. Nempe

Si T tangens totalis formae F in puncto p sit, atque recta r in p terminata, cum quavis recta in T sita ac in p terminata, angulum rectum faciat: dicitur r (etiam utvis continuata) tam ad T quam ad F in vel ex p perpendicularis; si recta ejusmodi utrinque ∞ ta, in quam talis r cadit, sola tantum sit, etiam pro tali superficie, formam F complectente, cujus tangens totalis ad p , planum est. Denotatur autem perpendicularis A ad B per $A \perp B$.

Extenditur idem generalius quoque ad k (sive punctum sive linea sit): nempe si e quovis puncto ipsius k detur ejusmodi perpendicularis ut dictum est; complexus omnium ejusmodi $\perp$ rium ad F ex omnibus punctis ipsius k , dicitur *perpendicularis ad F in vel ex k* .

III. Demum rectis ex eodem puncto p ad omnia puncta formae cujuspiam f consideratis; facile succurrit, unius earum plagam in qua p est, continuare in ∞ , atque punctum p semper porro movere, apice pyramidis abeunte in ∞ ; atque tum quaerere, num angulus ad apicem rectae alicujus decrescat? et si decrescant omnes, num omnes ~ 0 ? Patebit ita esse; darique pro quavis rectarum dictarum rectam, in qua, recta cujus una extremitas p altera q in f est, circa q per rectam dictam porro mota, hanc prima vice deserat; imo omnes eas rectas punctum p commune habentes eo modo rectam eandem omnes simul (prima vice) deserere posse, fierique omnes simul infinitas.

1. Tum ultro venit omnes finitas magnitudinis ejusdem reddere; et complexui earum nomen dare. Dici potest hoc, *prisma* (sensu generali). Complexu extremitatum, in quibus rectae aequales initium in f habentes terminantur, F dicto; patet

cuius puncto cuiusvis ipsorum F et f , alterius certum punctum (nempe extremitatem rectae alteram) respondere, et cuius alii aliud.

Ex gr. Si forma f recta r sit, oriatur figura in plano sita (ut infra patebit), duabus rectis extimis, recta r , et complexu c punctorum, in quibus terminantur rectae ex omnibus punctis ipsius r rectam dictam eandem prima vice non secantes, clausa: at quaeritur, c qualenam sit? et anguli quos rectae dictae aequales, cum r versus eandem plagam faciunt, sintne aequales?

Unde item passus est cogitare; quid si aequales essent? et patet, quod si recta r moveatur in se rectam extimam in eodem plano secum ferendo, donec initium ipsius r in finem perveniat; extremitatis rectae extimae via gaudebit qualitate, quae de F dicta est (praeterquam quod non constet rectas dictas omnes se invicem modo priore prima vice non secantes esse). Atque hinc conceptus sequens oritur: si formarum F et f cuiusvis, puncto cuius respondeat certum punctum alterius, et cuius alii respondeat aliud; atque rectae inter puncta correspondentia aequales, et quaevis binae in eodem plano sint, neque etsi ∞ tae sint secent se invicem: dicitur complexus rectarum illarum omnium *prisma* (generalius).

2. Interim via extremitatis lineae extimae plane dictae novum conceptum parit: nempe pro angulo quem ea cum r facit; facile rectus ponitur; et manifesto si (Fig 62) $dc \perp ab$, et $ac = cb$; sive ad dextram sive ad laevam moveatur $dcab$ recta ab in se, et dc in eodem plano manente; ob generationes utrinque et undevis aequales (p.7.V., describet d lineam uniformem, angulos utrinque et ubique aequales cum dc facientem; (angulum esse infra patebit). Dicatur via haec ipsius d (sive continuata sit in ∞ , sive pars quaevis continua ejus accipiatur), *aequifluens ipsius ab ad distantiam cd* . Est vero linea haec recta, si Ax Xl

incl. constet, et constat hoc, si illa recta sit (de quo infra).

3. Hinc facile cogitatur, rectam ab alicubi terminari, ibique aliam incipere, sive in eodem plano priori, sive in alio; et ubi haec terminatur, item aliam incipere, atque cuique harum aequifluentem ad distantiam eandem cd dare, continuando idem donec libuerit. Denotentur rectae dictae per literas majores, et earum aequifluentes per minores nominis ejusdem; nempe sit linea $ABED$ --- e rectis AB, BE, ED --- composita, et ab, be sint rectarum AB, BE aequifluentes (in b secantes se invicem) &c.

Quaestio oritur, num B et b in plagam plani $ABab$ respectu rectae Aa eandem cadant? atque si generaliter ponatur, quod si quaecvis litera magna H et parva h fuerit, Hh et hi in plagam plani $Hhhi$ respectu rectae Hh eandem cadant; dicuntur linea $ABED$ --- e rectis composita, et linea $abcb$ ---, *lineae primario aequesitae*.

4. Unde iterum generalior conceptus oritur: nempe quaecunque lineae simplices L et l , dicuntur *generaliter aequesitae*; si pro utvis parva recta k , dentur lineae L' et l' primario aequesitae tales, ut cujusvis ipsarum L et L' , punctum quodvis aut in alteram cadat, aut detur ab illo ad aliquod punctum lineae alterius recta $< k$; ita cujusvis linearum l et l' punctum quodvis aut in alteram cadat, aut detur ab illo ad punctum aliquod lineae alterius recta $< k$.

5. Atque hinc demum oritur generalis conceptus *parallelismi* formarum F et f ; si e cujusvis formarum F et f (ex gr. ipsius F) quovis puncto P ductis in F quibusvis et quotvis lineis simplicibus, nihil praeter P commune habentibus, e certo puncto p ipsius f iis aequesitae reperiantur, (eodem ordine se invicem excipientes), nihil praeter p commune habentes.

Aut brevius : si cuius lineae simplici in quamvis ipsorum F et f cadenti, detur aequiesita in altero : dicuntur F et f *parallela*.

Sensu latissimo dicitur etiam quaevis pars continua ipsius f *parallela* ipsi F , si f et F *parallela* fuerint. Denotatur parallelismus ipsorum F et f per $F \parallel f$.

Num vero recta alteram primo non secans (459) huic *parallela* sit, aut num detur recta rectae *parallela*, a decisione Axiomatis Euclidei XI^{mi} pendet ; de quo inferius.

Notandum autem, etiam alium parallellismum distingvi posse : si nempe in definitione aequiesitorum, pro quavis litera magna H et parva h , recta Hh et ejus aequifluens in diversas plani dicti plagas cadant; quo in casu lineae $ABCD$ -- et $abcd$ -- *inverse aequiesita*, atque inde *parallelae inversae* dici possunt (prioribus *directis* dictis); et tum conceptus *aequiesitorum* quam *parallelorum* extendi generalius potest ; si aequiesita dicantur, dum quaevis Hh et hi aut simul in eandem plagam plani dicti aut quaevis simul in diversas ejusdem plagas cadant.

(Fig 63) exhibet exemplum simplicissimum, unde conceptus nascitur pro linea $ABCD$ -- in plano sita, ita (Fig 64) parallelismi inversi : patet etiam formas *parallelas* tales dari, quae se invicem secant.

§. 9. Post haec, cum disquisitiones istae, quae mentem in planum descendente retinebant, ipsae indigent, plura adhuc subsidia desiderari, ut penitus intelligantur : ea in simplicioribus quaerens descendit in planum. Ubi

Imo. Obviam venit, puncti vias in campo ∞ to innumerabiles dari; occurritque praeter rectam aliaque, etiam linea simplex in se rediens: quae in quacunque superficie simplici fuerit, *figura* dicitur; et in plano quoque curva varii generis, (quo pertinet etiam circulus per operationem motus intuitivam 2dam via ad planum restricta); aut mere

e' rectis composita, aut mixta esse potest. Si e 3 rectis componatur, *triangulum*: si e 4 rectis constet (in plano) *quadrilaterum* audit; ita si ex n rectis composita sit, n latera figura rectilinea plana dicitur; si vero latera aequalia sint, *aequilatera*, si anguli aequales *aequiangula*; si et latera et anguli aequalia sint, *regularis* dicitur, et figura 4 laterum dicitur *quadratum*, si plura fuerint latera, *polygonum regulare* tot laterum dicitur, quot latera habet.

2do. At vero etsi constaret, inter quaevis duo puncta dari rectam, eamque totam in idem planum cadere, atque e quovis puncto plani radio quovis dari circulum in planum idem cadentem totum; quae tamen et ipsa adhuc inferius demonstranda erunt: quaestio ultro suboritur; num dentur (in praec) dicta? et num rectarum circulorumque certo numero, ea adesse demonstrari queat?

Id quod certo rectarum circulorumque numero determinatur; dicitur *geometricè construi posse*.

Per *geometrica constructione perficere aliquid* (quod in ita dicto *problemate* enunciatur), intelligi solet: id numerabilibus ejusmodi operationibus peragere, quarum quaevis est, rectam ducere aut circulum describere; quod omnino tam rectam ducendo, quam circulum describendo, motum sapit, in ipso Euclide quoque; quamvis exemplar constructionis geometricae exhibeat, absque eo, ut eam ullibi definiat, (ut linguam vivam bene loquentes regulas Grammaticae subticent); at tanto magis commentator ejus statim apud 2dam propositionem, (ubi puncto p , et recta r positione datis, recta in eodem plano ex p ipsi r aequalis determinanda est), constructionis geometricae ideam dare debet, ut genius Euclidis percipiatur. Requiritur nempe ad hoc perficiendum numerus 7. Omnibus immotis fit hoc, et quamvis facile possit extremitas ipsius r ipsam r in plano secum ferendo (per operationem motus 1am intuitivam ad planum restrictam) usque in p moveri, aliquid valde pulchri

habet, propter fidelem, ideae constructionis geometricae, quam sibi Euclides proposuit, executionem.

Interim in numerum finitum dictum admitti etiam dicta operatio motus 1ma potest; ut si quid suppositis rectis, (quas inter quaevis 2 puncta adesse demonstrabitur inferius), fiat numero finito operationum, quarum quaevis aut 1ma aut 2da operatio motus intuitiva est, via et generatis ad planum restrictis, nec plures operationes conjungantur, id est in M moto interea aliud quid haud moveatur: id *geometricè construi* dicatur, et quidem *sensu stricto*; si vero non restringatur ad planum, *constructio geometrica sensu lato* dicatur.

3tio. Quamquam autem et veritates aequa dignitate polleant; (ut in natura sol, orbium dies, et noctilucae exigua luminis in vasta noctae sphaera, eadem sapientia ∞ ta radiant): *Geometria quae elementaris* dicitur, *sensu lato* in iis, quae sensu lato geometricè construi possunt, et *sensu stricto* in iis, quae sensu stricto geometricè construi possunt, terminari potest; iis vero quae nonnisi operationibus conjunctis fieri possunt, ditioni quae *Geometria sublimior* dici solet, assignatis; uti inferius pluribus exemplis ostendetur.

§. 10. Post descensum, e spatio quaquaversum ∞ to, in campum circumcirca in plano in ∞ tum apertum: disquiritur ibidem in qualitates formarum, prius quarum omnia puncta, tum earum, quarum non omnia quidem, sed quodvis, geometricè (sensu stricto) construi possunt; et demum illarum, quarum quodvis punctum ope formarum priorum construi potest. Considerantur autem prius omnimodae combinationes rectarum et circulorum, prouti arbor inferius ostendet. Denique applicata Arithmetica e datis quantitates ignotae quaeruntur; quo etiam *Trigonometria plana* pertinet, docens e quibusvis triangulum rectilineum determinantibus, quantitates per idem Δ determinatas, ope calculi computare.

Datur quidem (in §. sequ.) etiam *Trigonometria sphaerica*: nempe triacula quae in superficie sphaerae, per tria plana per centrum posita generantur, sub loco etiam computantur. Estque planum, quasi limes geometricus (cujus idea facile determinatur) superficiei sphaericae, centro remoto in ∞ , posita Axiomatis XI Eucl. veritate; secus autem alia quaedam superficies uniformis circum circa ∞ ta, est limes geometricus dictus; in qua Axioma XI Eucl. (simul cum tota Planimetria Euclideae) demonstratur in Appendice; Trigonometria sphaerica autem a veritate Axiomatis XI Eucl. independenter, absolute vera stabilita ibidem est.

§. 11. Dein reditur in abyssum spatii, unde in planum descensum erat: atque ibi formarum omnium quae in plano prodierunt, combinationes (juxta arborem exponendam) omnimodae considerantur; construunturque ea, quae sensu lato geometricae construi possunt; atque applicata Arithmetica computantur.

§. 12. Denique conjunctio operationum, (cujus superius mentio facta est) sequitur, coronam arboris constituens; omniaque spatii puncta, et quorumvis complexus hoc pacto, ad unum aliquod certum spatii punctum fixum revocantur.

Ex gr. 1. Moveatur recta A circa punctum suum aliquod a, in plano P semper porro, ita ut punctum b ipsius A percurrat peripheriam radii ab toties quoties fibuerit; dicaturque nomine generali u longitudo viae puncti b: interea autem moveatur punctum aliquod c e certo puncto ipsius A, in ipsa eadem recta mota A, certa lege, ut nempe y dicta via puncti c in A, sit $y = (f)u$; quaeritur dato $(f)u$ via ipsius c in plano?

2: Ita si recta pa moveatur in recta eadem continuata, circulum centri p radii pa secum ferendo in eodem plano, ita ut interea punctum certum peripheriae in ipsa peripheria certa lege moveatur, ut sit nimirum via ejus $= (F)x$, pro x de,
L L /

notante viam puncti p in recta dicta; (ex gr. si $(F)x = x_1$, describi cyclois (ut pag. 326) poterit.

3. Ita potest p (centrum circuli C) in peripheria circuli alicujus moveri, circulum C circa centrum interea certa lege motum in eodem plano, secum ferendo; et via puncti certi peripheriae ipsius C quaeri. Imo etiam circulus in cujus peripheria p est, interea lege certa moveri potest.

4. Aut si planum P circa rectam certam A in P cadentem moveatur semper porro; viae, quam certum aliquod punctum p ipsius P describit, longitudine generaliter u dicta; et moveatur interea certa lege punctum b ipsius A in A , $\perp_{rem} B$ ad A in P secum ferens, distantia ipsius b a certo puncto determinato a in A (eodem pro omnibus b) generaliter x dicta; atque moveatur interea punctum c ipsius B certa lege in B , recta cb (quocunque perveniat c) generaliter y dicta; nempe ut sit $x = (a)u$ et $y = (b)x$: quaeritur via puncti c in spatio?

Manifesto per u, x, y quodvis spatii punctum p determinari potest: demissa enim ex p ad A $\perp_{ri}$; haec erit z , aut in a aut in plagam inde aliquam cadens, et verso circa A plano P donec ad p perveniat, eousque p certam viam u describere potest.

5. Ita si certum punctum a rectae A in P immobile cadentis fixum sit; atque e certo puncto b ipsius A sit B $\perp$ ad A in eodem plano P , et e certo puncto c ipsius B sit C $\perp$ ad planum P ; atque dum punctum b movetur porro in A , $\perp_{rem} B$ ad A in plano P secum ferens; interea moveatur certa lege punctum c in B , rectam C ad planum P semper $\perp_{rem}$ secum ferens; atque interea in hac ipsa C quoque moveatur punctum b lege certa: quaeritur pro datis hujus compositionis motus (non virium) legibus, via puncti b in spatio? Si ex gr. ab generaliter x , bc generaliter y , et cb generaliter z dicantur, atque $(x, y, z$ semper ut coordinatas simultaneas intelligendo) y sit $= (a)x$, et $z = (\beta)y$;

manifesto, quodvis spatii punctum p per x, y, z determinatur; nempe ex p ad P missa $\perp$ ris z dici potest, et e puncto illo ipsius P , in quod $\perp$ ris dicta cadit, ad A missa $\perp$ ris y , et recta inde usque ad a dici x potest. Possuntque praeterea tam x quam y et z et $\perp$ ve et --- ve accipi; nempe x ab a incipiendo in una plaga rectae A $\perp$ ve, in altera --- ve; ita ordinatae y ex A incipiendo in una plagi P plaga $\perp$ ve et --- ve in altera, atque ordinatae z ad planum P $\perp$ res e P incipiendo in una spatii plaga $\perp$ ve et --- ve in altera accipi possunt. Nimirum ex (pag. 23) determinationes, quibus rectae in recta aliqua (pro certo puncto ejus fixo, atque certa conditione C accipiendi resultati) $\perp$ vae a --- vis distinguuntur, patent: ita $\perp$ res ad rectam A fiunt $\perp$ vae aliae, aliae --- vae, si pro extremo ibidem dicto rectae cujusvis ad A $\perp$ ris, accipiatur parallela per id ad A in P ducta, atque in hanc ponatur initium priorem excipientis; et pro resultato accipiatur distantia ab A extremi rectae ad A $\perp$ ris postremo positae. Ita $\perp$ res ad P aliae $\perp$ vae aliae --- vae fiunt, si per cujusvis extremum ad P superficies parallela (461) ducatur, in qua recta priorem excipiens incipiat, et pro resultato distantia a P extremi rectae ad P $\perp$ ris postremo positae accipiatur.

6. Potest etiam punctum b in recta A motum, planum aliquod Q ad A $\perp$ re secum ferre, ita ut interea in Q motus sequens concipiatur; sit s sectio plani Q cum certo plano fixo P , in quod recta A cadit, et moveantur certa puncta in certis $\perp$ ribus ad s in Q cadentibus, prout omnia per x (nempe distantiam a puncto fixo a ipsius A , puncti b in recta A moti) lege certa determinantur: atque data hac lege, complexus locorum in quibus puncta in $\perp$ ribus dictis mota, ab initio motus sub punctis temporis expertibus omnibus sunt, qualisnam sit, quaeri potest. Patet hoc pacto non lineam tantum, sed superficiem quoque prodire, quum haec complexus sectionum plani moti Q cum ea esse queat.

Imo possunt motus plures quoque vario modo componi; atque campus disquisitionum protendi.

§. 13. Notandum autem est, formas omnes, qualesvis prodierint lineae aut superficies, dum arithmetice considerantur, in quantitates respectivas quidem ad formam temporis reductas (p.21) mutandas esse modo sequente.

Pro quavis linea simplici L , cujus nulla pars recta est, intelligatur recta r ; si (quavis linea simplici e rectis composita, cujus extrema in extrema prius L , et puncta quaevis ad quae angulum habet, in L cadunt, l dicta), quaevis l sit $< r$, sed pro quovis ω detur tale l , ut $r-l < \omega$ sit.

Ita pro quavis superficie simplici S , cujus nulla pars planum est, intelligatur illud rectangulum (255), quod limes talis superficiei simplicis e planis rectilineis (ex gr. Δ lis) compositae est, apicem cujusvis anguli in S habentis; ut superficiei ejusmodi ut dictum est, limes alius eo major non detur.

Hoc pacto omnes lineae ad formam rectae, ita omnes superficies ad formam rectanguli altitudinis ejusdem reductae (p.22) comparari arithmetice poterunt.

§. 14. Recta (cum omnibus ejus proprietatibus primariis) simul, cum plano axiomatice supponi solent: at quaeritur, num ea pro axiomatibus adsumi possint? Conceptus temporis quidem ad spatium translatus rectam peperisse videri potest; at tamen tropicam istam rei tam diversae translationem, externam adjuvisse experientiam indignant, tam definitiones, qualis Platonis est a lumine petita, *rectam* dicentis lineam, cujus punctum primum reliqua obumbrat; quam quae a puncto e certo loco alium petente est, observato tempore sangioque minimo; nihil tamen magis ad rectam perduxit, quam reflexio ad omne id, quod e corpore quiescentibus duobus punctis ejusdem moto, quiescit. Si quid pro axioma adsumi nequeat; illud e quo

ad deduci potest, id implicite continere debet. Adsumere itaque ea (ut fieri solet), aut sequenti modo deducere, jus fasque cuique est. Spatii quaquaversum infiniti filia primogenita est *punctum*, dein *sphaera*; media quasi inter duo extrema. Sphaerae autem linea primogenita *circulus* est, dein *recta*; atque demum *circulus* cum *recta* parit *planum*.

1. Pro fundamento lineae uniformis simplicis in se redeuntis (quam circulum esse patebit) positum est (448); pro rectae construendae fundamento ponitur sequens. Si M portio spatii circa duo sui puncta revolvatur (448); idem M circa eadem duo puncta, undevis aequaliter moveri, atque uno solo quoad viam cuiusvis sui puncti modo revolvi potest.

2. Hinc quiescentibus punctis a, b ; omnia talia puncta ipsius M , quorum quodvis circa $a * b$ moveri (juxta 448) potest; movebuntur etiam simul circa $a * b$, si quod eorum moveatur: et quidem omnia viis iisdem movebuntur porro usque ad reditum, quas singula percurrerent.

Atque hinc etiam nullum punctum ipsius M ex ullo loco p , duabus viis (una qua ex p moveri incipit, altera qua redit) plures habet, quibus motum circa $a * b$ incipere potest. Nam sint ex eodem puncto tres rami α, β, γ , in quorum quovis punctum ex p moveri, quiescente $a * b$ possit; moveaturque in uno casu, punctum ex p in ramo α incipiendo et per β redeundo; ramus γ tum haud potuit percurri, nam incipiendo per α aut redeundo per β , punctum idem simul lineam qua ramus γ ex p incipit describere nequit; nec antea percurri γ potuit, nam tum punctum porro motum jam antea rediisset. Cogitetur jam schema totum ita poni, ut punctum quod antea in p erat, extra lineam simplicem redeuntem priorem in γ cadat, simul a in a et b in b cadentibus; manifesto motus idem circa $a * b$ locum haberet (per 1), sed idem punctum annulum a priore diversum describeret (contra 1).

3. Sit jam (Fig 65) sphaera S centro C cum puncto c , dicaturque superficies ejus S' ; et fiat sphaera s e centro c cum puncto C , hujus superficie s' dicta: facile patet, nec totam sphaeram s in S , nec totam S in s cadere; nam si ex gr. tota S in s caderet, centrum C in superficie s' nudum haud inclusum maneret. Habet igitur tam s' aliquid extra S , quam S' aliquid extra s . Hinc autem necessario ipsis S' et s' aliquid commune est; nam punctum e quovis puncto ejus quod ex s extra S cadit, usque in C veniens per S' transire debet (447). Ita si punctum e quovis puncto ipsius S' extra s cadente in ipso S' usque in c veniat; nisi c circumcirca in S' in interrupte cingatur, punctum dictum e loco extra sphaeram s ad centrum ejus absque transitu per s' venire posset.

Exit igitur s' ex S' circumcirca c , idque manifesto generatione circumcirca aequali: adeo ut (448) quodvis exitas punctum p , sphaera S circa c * C mota, viam simplicem in se redeuntem uniformem describere possit.

Idem de quavis sphaera centri ejusdem c tali, quae priori interior est, patet; etsi cogitentur sphaerae omnes interiores usque ad centrum commune c , et annuli in S' se invicem semper interius usque ad c eundo excipiant. Dicantur ejusmodi lineae uniformes simplices in se redeuntes (quos circulos esse nondum constat), annuli, et nomen eorum generale sit A .

Imo idem de quavis sphaera centri ejusdem c cum puncto quovis i intra superficiem S' cadente facta patet; nam tum superficies S' tota in sphaeram novam cadere nequit; namque i intra S' cadens in superficie sphaerae novae esse non posset. Unde reliqua fluunt.

4. Atque hinc manifesto punctum e cujusvis A puncto quovis b , intra annulum eundem A usque in c in superficie S' ita moveri, cogitari potest, ut semper in superficiem sphaericam centri c interioriorem veniat, et in nulla uno plura puncta ha-

beat, atque mota sphaera circa $c_* \mathcal{C}$, annulis descriptis linea dicta l circa c in S' porro moveatur, donec redeat. Nempe punctum dictum in quovis loco ubi sphaera centri c (sive ipsa s sive interior) ex S' exit, annulo circa $c_* \mathcal{C}$ gaudet (per præc); adeoque omnia quoque simul moveri quiescente $c_* \mathcal{C}$ possunt.

5. Atque hinc, propter generationem superficiei sphaericae circumcirca aequalem, e quovis puncto k ipsius S' datur linea l' priori l aequalis: atque l' circa k in S' moveri potest donec redeat, annulos concentricos prioribus aequales describendo.

Imo quum de sphaeris S et s demonstrata, de quavis alia quoque valeant: pro cujusvis sphaerae superficie datur linea, quae circa quodvis punctum superficiei dictae, in ea moveri potest, donec redeat, annulos concentricos (undevis aequaliter) describendo.

6. Dari dimidia annuli ejusmodi ut dictum est (lineae simplicis in se redeuntis) duo puncta communia habentia, uti cujusvis partis continuæ ejus duo dimidia punctum commune habentia dari patet sic. Concipiantur ex annuli puncto quovis duo puncta moveri in eo porro usque ad reditum, temporibus quibusvis aequalibus vias aequales describendo, easque ex eodem puncto diversas sed simul incipiendo: utrumque per alterum transire debet; atque ubi hoc fit, viae utriusque aequales erunt; ita ex arcus cujusvis extremitatibus, aequaliter motis punctis, priusquam quodvis in alteram extremitatem perveniat, occurret puncto alteri, et ibi dimidium arcus erit (p. 7. V et 447).

7. Accipiatur jam ex 4 (Fig 65) punctum quodvis k in primo annulo A (Fig 66) punctum c cingente pro centro; et linea prior $l = kc$ (cujus una extremitas in c altera in k sit) moveatur circa k in S' donec redeat: manifesto pars viae cujusvis puncti ipsius l cadet ab annulo in unam ipsius S' plagam; altera in alteram; nam ut centrum k clau-

datur ab annulo per punctum quodvis descripto, necesse est punctum ejus aliquod p , extra segmentum ipsius S' illud in quo c est, cadere: atque hinc via usque in c , per A transire debet, et quidem in duobus saltem punctis a & k ad extremates arcuum utrinque aequalium; nam annulus dictus cum annulo A unum solum punctum commune habere nequit; nam tum ex hoc puncto usque ad k aut linea simplex esset, aut non; et in neutro casu esset annulus dictus linea simplex rediens. Erunt igitur annuli hujus transitus per annulum A ipsi k proximi duo supra dicti.

Accipiantur porro quorumvis arcuum ab A in plagam non c (id est illam in quam non cadit c), meditullia (per 6); atque tum fiat idem centro in meditullium arcus illius posito, qui ab annulo (centro k per extremitatem lineae $k c$ in S' descripto), e duobus punctis ipsius A ipsi k proximis, in plagam non c ipsius S' cadit; atque idem continuetur in ∞ ; nempe casus idem redit semper, nisi quod centrum in primo A ubivis eligere liceat, postea vero in quovis novissimo A arcus extimi meditullium pro centro accipiat, et idem repetatur in infinitum.

Complexus omnium ejusmodi meditulliorum, continuum, imo linea simplex est, ut statim patebit. Insistit autem linea haec primo annulo utrinque aequaliter; atque e quovis puncto annuli ejusdem, lineae ejusmodi per generationes aequales circumcirca et utrinque aequaliter determinatae promanant. Unde etiam patet, quod si e quibusvis duobus punctis annuli primi, promanantes ejusmodi lineae secent se invicem, crura semet secantia (ob generationes utrinque aequales) aequalia erunt. Patet etiam partem quovis novo A generatam, parti sequente A generatae (item ob generationes aequales) aequalem esse.

Complexum punctorum dictum, continuum esse vel ita patet. Accipiat, complexus α punctorum innumerabilium, quae per quodvis aliquod A

(centro in eo posito) generantur usque ad arcum aliquem k (inclusive), et inde complexus β punctorum item innumerabilium usque ad arcum extremum generatorum: puncta ipsius β in arcus post k se invicem continuo excipientes cadunt, qui simul sine k cogitari nequeunt, uti complexus priorum ipsum α constituentium; itaque et β gaudet puncto in arcu k , quod quum solum sit, tam ipsi α quam ipsi β commune est.

Sed praeterea quoque e cujusvis A arcus superioris meditullio, punctum per omnes arcus concentricos superiores (id est supra praecedens A cadentes) usque in centrum moveri potest; et quidem ita ut per cujusvis arcuum illorum punctum quodvis datum transeat: intuitu patet, idem simplicissime per meditullia arcuum fieri posse.

Est etiam linea simplex: nam e nullius arcus meditullio 3tius ramus dari potest; quia is per arcus praecedentes aut sequentes ire deberet, in quorum quovis nonnisi unum punctum ramis duobus commune datur.

8. Dicantur L lineae ejusmodi, quae ex omnibus punctis annuli primi, utrinque aequaliter insistentes, et semper porro utrinque aequaliter, atque omnes circumcirca quoque, per generationes aequales aequaliter determinatae sunt.

Aut dantur duae tales L , quae punctum commune habeant, aut nullae duae dantur, quae punctum commune habeant. Posterius fieri nequit: nam tum portio illa ipsius S' , quae supra quodvis A usque ad arcum superiorem novi A est, (imo totum A) innumerabilibus vicibus repeteretur in ipso S' ; adeoque S' non esset quantitas finita (p. 28), de quo plura inferius.

Nempe tum (Fig 65) (per 469) sphaera S' circa $c_* \odot$ mota, movetur tota L , omnibus punctis annulos se invicem excipientes describentibus. Quod annulus puncti cujusvis, in linea L ulterius generati, ulterius situs sit, patet inde; quod si ab a-

liquo annulo sequentes aliquamdiu regrederentur; id aut statim post annulum centri alicujus A (juxta generationem dictam) fieret, aut post meditullium arcus alicujus supra A generati; prius fieri nequit, nam tum punctum aliquod ipsius L (ob generationes utrinque aequales) intra, non extra praecedens A caderet; nec posterius fieri quit, tunc enim e centro prius dicto sphaerica superficies exterior cum aliqua interiore aliquid commune haberet.

Atque per hoc adhuc simplicius patet, superficiem sphaericam, si nullae lineae L secarent se invicem, quantitatem finitam non esse. Potest enim e centro cujusvis A , in S' describi talis annulus interior ipso A , qui (juxta Fig 67) nec cum ibidem praecedente nec cum sequente quidquam commune habeat. Quod cum (per generationes aequales) semper porro locum habeat: annulus dictus innumerabilibus vicibus repetetur.

Si igitur superficies sphaerica quantitas finita sit; necesse est duas lineas L se invicem secantes dari. At si duae dentur, omnes se invicem in eodem puncto secabunt. Nam sit (Fig 68) ab arcus is primi annuli, e cujus extremitatibus pomanantes lineae L concurrunt; linea L e meditullio q arcus ab erecta quoque per p transibit: nam sit $bq = br$, adeoque $ab = qr$, et $br = rt$, adeoque $bt = ba$, (posito ab esse dimidio primi annuli minus, quum si ab dimidium annuli sit, res pariter facile pateat); lineae L ex r et q , ita ex b et t erectae concurrent, eruntque singulae aequales (propter generationes aequales). Hinc autem linea L ex t erecta necessario in p cadit; atque ut lineae L ex r et q erectae occurrere possint, aut prior vel posterior transibit per bp , aut prior per pt , vel L ex q erecta per qp transibit: quodvis horum fiet, si punctum transitus p sit; sed inter p et t , aut inter p et q transitus fieri nequit; nam si ex gr. L ex r erecta inter p et t transiret, idem transitus punctum etiam ipsi bp commune esset; si vero L ex r per bp inter b et p transiret, punctum idem et lineae ex q

erectae commune esset; et lineae L ex r et q erectae usque ad punctum concursus, essent ipsa bp minores. Necessario igitur in eodem p concurrent.

Atque hinc colligitur, bisecando arcus in ∞ , atque circumcirca transferendo: ex omnibus annuli primi punctis omni dabili prioribus erectas lineas L omnes in eodem p concurrere.

Unde si sphaera S moveatur circa $c * p$, puncto in annulo primo porro moto, simul cum toto linearum L e punctis bisectionum erectarum schemate: nullum tempus erit, quo punctum p viam describat; nam ab initio motus quodvis temporis punctum cogitetur, jam antea punctum in annulo motum per innumera puncta transiit, pro quibus schema linearum L dictum in p fuit.

Consequenter sphaera S circa $c * \mathcal{C}$ ita moveri potest, ut p quiescat. Atque hinc (per 469), si S circa $c * \mathcal{C}$ moveatur, p quiescere debet.

Omnia dicta autem ad quemvis annulum superficiei cujusvis applicari manifestum est; si puncto quovis ejus pro centro accepto, cum linea quadam interna annuli fiant circuli concentrici tales, quales e quovis sphaerae illius superficiei puncto aequaliter dari dictum est.

9. Atque hinc superius (470) segmentis omnium s' in S cadentibus generaliter s'' dictis; cogitetur in omni s'' punctum illud, in quo lineae L , ex annulo ipsi S' et illi s' communi, in illo s'' generatae concurrunt: complexus omnium ejusmodi punctorum simul cum c et $\mathcal{C}$, lineam simplicem esse ut supra (472) patet. Sed manifesto etiam sphaera S circa $c * \mathcal{C}$ mota, cujusvis s'' punctum quodvis praeter punctum dictum in ea (448) movebitur; atque hinc omnia s'' (469) movebuntur, et tota linea dicta quiescet mota sphaera S circa $c * \mathcal{C}$.

10. At vero in S quoque ex annulo egressus extremo antea generatum p quiescebat mota S circa $c * \mathcal{C}$; atque si pro centro p eadem fiant quae ab altera

parte centro c facta sunt; prodibit linea $c\mathcal{E}p$ quiescens mota sphaera circa $c*\mathcal{E}$.

Imo quaevis alia duo puncta lineae dictae accipiantur; motus dictus sphaerae S quiescentibus iis peragebatur: itaque (469) circa quaevis duo puncta dicta, motus idem est.

Sed nec ullum punctum sphaerae S extra lineam dictam cadens quiescit: nam illud aut intra segmenta extrema ex c et p generata, aut inter illa cadit; atque tale circumcirca aequaliter determinatum gaudet annulo (per 448). Si vero in aliquo motu circa duo puncta annulo gaudeat, circa eadem duo puncta (per 469) semper eundem annulum describet.

11. Patet porro inter quaevis duo spatii puncta dari lineam ejusmodi: nempe accipiat unum pro centro, fiatque sphaera cum puncto altero; atque applicentur de sphaeris S et s dicta. Atque hinc etiam patet, rectam e quavis portione spatii finita egredi e quovis puncto ejus; quum possit generari sphaera ex eo puncto, totam portionem includens.

12. At quaeritur, num e centris sphaerarum quarumvis inaequalium generatae, centris coincidentibus; congruere possint, usque ad superficiem sphaerae minoris? Omnino; nam (Fig 69) feratur minor in alteram centro in centrum $\mathcal{E}$ majoris posito; sitque linea $\mathcal{R}\mathcal{E}\mathcal{R}'$ in sphaera majori hac circa $\mathcal{R}*\mathcal{R}'$ mota quiescens; transeat haec per superficiem minoris in $c*c'$. Motu sphaera majore circa $\mathcal{R}*\mathcal{E}$, omne praeter lineam $\mathcal{R}\mathcal{R}'$ movebitur, perageturque motus quiescentibus $c, \mathcal{E}$; itaque tum et sphaera interior circa $c*\mathcal{E}$ movebitur; adeoque (per 469) idem inter c et $\mathcal{E}$ quiescet quod antea.

13. Hinc etiam linea talis continuari e quavis sphaera in aliam quamvis majorem utrinque potest; neque intra ullius sphaerae superficiem detinetur.

14. Si porro cujusvis lineae ejusmodi unius extrema a, b , et alterius a', b' sint, atque a in a' et b

in b' simul cadere queant; congruentibus extremis, et lineae ipsae coincidunt.

Nam feratur ad $\mathcal{C}$ linea ab simul cum sphaera illa, in qua generata est, (sive in centrum ejus cadat a aut b sive non), atque ponatur a in $\mathcal{C}$; fiatque sphaera centro $\mathcal{C}$ sphaeram allatam includens, et eodem centro a fiat sphaera puncti b . Manifesto linea ejusmodi ut dictum est, (quae dicatur λ), in sphaera reliquas duas includente e centro $\mathcal{C}$ generata, per superficiem sphaerae puncti b e centro eodem $\mathcal{C}$ generatae, transit in aliquo puncto f ; moveatur λ circa $\mathcal{C}$ simul cum sphaera majore, donec f in b cadat; atque tum moveatur sphaera eadem major quiescentibus punctis b , a ; movebitur etiam sphaera allata inclusa, quiescentibus iisdem b , a ; adeoque inter b et a linea eadem quiescet, quae motu solius sphaerae allatae quiescentibus iisdem punctis, quiesceret. Itaque linea allata ab coincidit cum linea sphaerae majoris inter a et b quiescente. Pariter adferri linea $a'b'$ simul cum sphaera illa in qua generata est, potest, a' in $\mathcal{C}$ positó: atque manifesto et $a'b'$ eidem congruet, cui ab congruebat.

15. Hinc etiam patet, lineam ejusmodi redire non posse: nam tum puncto uno, unde duo puncta diversis viis profecta porro moverentur, et altero ubi prima vice sibi mutuo occurrerent, communibus, uterque ramus inter eadem 2 puncta coincideret.

16. Sed linearum priorum (in 14) continuationes quoque, (nempe continuatio e centro sphaerae allatae, et continuatio e centro $\mathcal{C}$) coincidunt. Nam si prioris punctum p extra lineam ex $\mathcal{C}$ prodeuntem utrinque in ∞ continuatam caderet; sphaera puncti p e centro $\mathcal{C}$ habeat punctum p' cum linea posteriori commune: fiatque sphaera tam sphaeram hanc quam allatam includens; mota hac quiescentibus a , b , et p' quiescet, p autem movebitur; quod fieri non posset, si p in continuationem primam caderet; tunc enim quiescentibus a , b , et p quiesceret.

17. Denique linea dicta (per 449) *recta* est. Nam (Fig 70; 71) quaevis duo puncta q et r fuerint illius, (utrinque continuatae in ∞), omnia spatii puncta eorundem unica, complectetur. Etenim quodvis punctum lineae dictae ipsius $q*r$ unicum est nec ullum aliud spatii punctum ejusdem $q*r$ unicum est.

Namque sit quodvis punctum p lineae dictae; nullum punctum f a p diversum tale datur, ut $q*r*p \doteq q*r*f$. Esset enim f aut in linea ipsa aut extra eam: neutrum fieri potest. Nam si f in lineam cadat; aut in aliquod ipsorum q et r caderet, aut inter ea, aut extra ea: atque etiam p pariter cadere potest.

Si p in r (aut q) cadat, patet nullum f a p (aut q) diversum dari: itaque tantum casus alii considerantur. Sit prius p inter q et r ; tum f aut etiam inter q et r in f' aut f'' , aut extus cadet (ex gr. in f'''). Si in f' caderet, tum ut $q*r*p \doteq q*r*f'$ sit, $qf' \doteq qp$ esset (pars toti); pariter si f in f'' caderet, tum $qf'' \doteq qp$ esset. Si vero f in f''' caderet; tum $qf''' \doteq qp$ esset (pariter pars toti). Nempe (per dicta) e quovis puncto linea talis aequaliter incipiens aequaliter quoque continuatur.

Si vero p extra qr (ex gr. in p') cadat (Fig 71): tum f aut in f' , aut in f'' aut in f''' aut in f'''' cadere deberet, (quum manifesto in ipsorum p', q, r nullum cadere queat). In f' cadere nequit, quia tum $qp' \doteq qf'$ esset; neque in f'' , quia tum $qp' \doteq qf''$ esset; nec in f''' cadit; quia $rf''' \doteq rp'$ (pars = toti) esset; neque in f'''' cadit; quia tum esset $rf'''' \doteq rp' = rq + qp'$, et $qp' \doteq qf'''' = qr + rf''''$; et hunc valorem substituendo ipsi qp' in aequatione priore, esset $rf'''' = rq + qr + rf''''$.

Sed neque extra lineam dictam datur tale f , ut $q*r*p \doteq q*r*f$. Nam fiat e centro sphaerae in qua linea dicta generari coepit, sphaera punctum f includens; quiescentibus r, q, p mota sphaera hac, movebitur f (476); si vero q in q , et r in r cadentibus, p in f cadet, p cum f circa $r*q$ moveri poterit, quod antea quievit (contra 469).

Sed nec ullum spatii punctum $\notin$ extra lineam dictam cadens ipsius $q * r$ unicum est; quum sphaera plane dicta circa $q * r$ mota, et illud moveatur, adeoque in alia aequae posita puncta veniat.

Est igitur linea dicta plane complexus omnis puncti, quod quorumvis duorum punctorum ejus unicum est.

Si non recta, e rectis aut aliis lineis constet: facile patet, non quorumvis 2 punctorum adesse quodvis punctum unicum.

18. Recta etiam quantitas est. Nam quacvis partes continuae ejus accipiantur; et ponatur una extremitas unius in unam alterius; fiantque sphaerae centro in eam posito cum extremitatibus alteris: prodibunt duae partes in sphaerae interioris (nisi utraque eadem sit) superficie terminatae, quarum extrema (adeoque et ipsae) congruere possunt.

19. Recta potest in se porro moveri. Nam e quovis puncto p (per dicta) aequaliter continuatur in ∞ .

20. *Planum* quoque hinc facile construitur modo sequente. Patet generatione circumcirca aequali, per quodvis punctum circa 2 puncta usque ad reditum porro motum, describi lineam simplicem in se redeuntem talem; quae et ipsa, ut recta (et superficies sphaerica) erat, quantitas est, atque etiam e quovis puncto sive antrosum sive retrorsum aequaliter determinatur.

Accipiat quaevis talium annulorum; sitque (per 471) (Fig. 72) in punctis a, b bifariam divisus, et dimidietas adb sit in b bifariam divisa; atque sit rectae ab meditullium in c : erit (ob generationes utrinque aequales) forma e rectis cb et ca composita, formae e rectis cb et cb compositae aequalis, adeoque recta bc est $\perp$ is ad ab in c (457); et quodvis rectae cb punctum extra rectam ab utrinque ∞ tam cadit. Fiat sphaera e centro c totum schema includens, et moveatur circa $a * b$ (sive re-

etiam ab utrinque ∞ tam): quodvis punctum rectae cd describet annulum, qui (propter generationes utrinque aequales) utraque facie sibi congruere potest, (quod de antea dictis nondum constat). Cogitetur jam recta cd in quovis loco suae viae continuata per d in ∞ ; erit complexus omnium earum superficies circumcirca ∞ ta et circumcirca et utrinque aequaliter generata, ut circa c in se moveri, facieque utraque sibi congruere queat, atque spatium in duas plagas aequales dividat.

Est autem superficies ista *planum*. Nam quævis duo puncta A et B sint ejus, quodvis punctum C ipsius $A * B$ unicum in rectam AB utrinque in ∞ continuatam cadit. Recta AB vero necessario in superficiem dictam cadit: cogitetur enim in generatione hujus, (469) recta cd versus d ∞ ta, ex A versus B usque in B per annulum plane dictum mota; nisi per AB transeat, aut cadet ab una aut ab altera parte; neutrum vero fieri potest; nam si quod fieret, et alterum fieri deberet; et idem de continuata AB patet: accipiatur nempe sphaera e centro c radii majoris quam recta quævis, quae a c ad AB est; exhibit ex hac sphaera utrinque tam recta AB quam cd versus d ∞ ta; unde reliqua patent. Posset etiam brevius dici, quod si ex uno puncto superficiei ad aliud ducta recta in unam plagam caderet, in altera quoque esset, et inter 2 puncta 2 rectae fierent.

22. Unde etiam patet; rectam AB etiam utrinque ∞ tam in planum cadere, si puncta A, B in eo sint.

23. Sed quaeritur, num per quævis 3 puncta A, B, C etsi non in recta sint, planum detur? Omnino: nam $A * B$ in planum dictum poni potest, A in c posito (Fig 73.), acceptaque ex c versus b recta rectae AB aequali. Si jam C non in eo plano esset; fiat e centro c cum puncto C sphaera; sitque ex gr. recta $cC = cb = ca$; manifesto sphaera radii cC e centro c , per planum in unum dimidium superius alterum inferius dividetur; atque mo-

ta sphaera circa ab , quodvis superficiei sphaericae punctum praeter a et b , dimidium annulum superius, et alterum inferius describet; atque ubi punctum $\mathcal{C}$ transit, habetur petatum.

24. Imo etiam per eadem 3 puncta $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ non in recta sita, nullum aliud planum poni potest. Nam (in praec.) $\mathcal{A}$ in c , et $\mathcal{B}$ in b positus, atque $\mathcal{C}$ in planum ibidem generatum cadente; ponatur quodvis aliud planum (imo ejusdem plani pars alia) per $\mathcal{A}^* \mathcal{B}^* \mathcal{C}$; nullum punctum p (Fig 73.) unius extra aliud cadere poterit. Nam rectae $\mathcal{AB}$, $\mathcal{BC}$, et $\mathcal{AC}$, extremitatibus earum in utrumque cadentibus, et ipsae in utrumque cadent totae. Sit jam p in uno eorum; cadet aut supra lineam compositam ex $\mathcal{AC}$, $\mathcal{CB}$, et continuationibus rectae $\mathcal{AB}$ ex $\mathcal{A}$ ad laevam et ex $\mathcal{B}$ ad dextram; aut infra eam. Si supra eam cadat; tum recta pq transit per lineam compositam dictam; si per continuationem alterutram rectae $\mathcal{AB}$ iret, tum et transitus et q , adeoque et p in $\mathcal{AB} \infty$ tam caderet; si per $\mathcal{AC}$ vel $\mathcal{CB}$ eat, fiat id in f ; tum recta fq utrique plano communis, et continuata punctum p complectens in utramque incidet. Si vero infra cadat in p' vel p'' ; recta e quovis horum usque ad p (jam utrique commune) transit per lineam compositam dictam ex una plaga in alteram; et item duo puncta; adeoque recta per ea, utrique plano communia erunt.

25. Manifesto etiam (in Fig 72) de ex c continuata in planum (480) primo generatum cadit; atque planum (ob generationes utrinque aequales) in duas plagas aequales dividit; atque quum quaevis plani P recta in ab , simul cum plano P ita poni possit, ut P cum plano primo generato coincidat; planum quodvis per quamvis rectam in ea sitam, in duas plagas, inter se omnes prioribus aequales dividi patet. Imo evidens est, quovis plani puncto in idem dictum c posito, et congruentibus planis, circulos quosvis radiorum aequalium aequales esse; atque etiam punctum in plano motum, ipsum planum in eodem plano secum ferre posse.

26. Ita formas duarum rectarum angulares congruere, si arcus e verticibus radiis aequalibus inter crura descripti aequales sint, circulo facto patet; necnon omnes rectorum angulorum formas aequales esse; ita ex nno puncto rectae in plano unam solum $\angle$ rem dari; et summam angulorum in una plaga ad rectam circa punctum c positorem esse $= 2R$; atque conversim duas rectas, c commune habentes, in una recta esse, si summa angulorum in una plaga sit $= 2R$ (per R rectum intelligendo).

27. Patet etiam planum quantitatem esse: nam quaecunque duae portiones ejus accipiantur; ponatur utriusque punctum aliquod internum in dictum c , ita ut portiones ipsae in planum primo generatum incidant: circuli, recta illa qua c usque ad perimetrum nulla minor est, pro radio accepta, congruent; et (p.20.) locum habet.

§. 15; 1. Si recta, cum recta aut plano aliquid commune habeat, id nonnisi punctum est: nam si duo puncta communia sint, recta in alteram (continuatam in ∞), et pariter in planum incidit.

2. Planum vero cum plano (si utraque ∞ ta concipiantur); aut nihil commune, aut rectam ∞ tam communem habent: et tam recta quam planum, sive rectam sive planum secantia, transeunt in plagam alteram. Nam (Fig 74) secet recta ab rectam bq ; nisi transeat in plani per abq determinati plagam alteram, necessario aliquorsum in bf cadet: cum qp enim nullum punctum praeter b commune habet, quia tum tota incideret. Itaque abf recta esset; atque tam β , quam $\alpha + \beta + \gamma$, dimidia peripheria radii bf esset.

Hinc ab per planum etiam transit, si b cum eo (nec quidquam aliud) commune habeat: si enim in eadem plaga maneat, manifesto pro quovis puncto q plani in b secti, casus praecedens erit.

Hinc etiam si duo plana P et p punctum b commune habeant: fiat e quovis puncto a ipsius p tali, quod ipsi P commune non est, recta ab ; transibit ista per P (per pracc.); fiat tum semi-

circulus in plano p radio ba centro b ; transibit is per P ; atque recta per punctum hoc et punctum b , tam in P quam in p incidet: nec ullum punctum praeterea commune utrique est, nam tum utraque coinciderent. Patet simul planum p quoque transire in alteram plagam.

3. Ad rectam, e quovis ejus puncto $\angle_{rem}$ dari patet ex (Fig 72 p. 479); uti etiam e quovis plani puncto dari rectam ad planum $\angle_{rem}$; quum quodvis planum, puncto quovis in c posito, primo ibidem generato congruere queat.

Sed quamvis e quovis puncto tam ad rectam quam ad planum dari $\angle_{rem}$, inferius demonstretur: duas ex eodem puncto $\angle_{res}$ ad eandem rectam (aut idem planum) diversas non dari facile patet; nam tum duae illae rectae cum recta duo illa puncta in quae $\angle_{res}$ caderent connectente, tale $\triangle_{lum}$ efficerent, cujus ad basim uterque angulus rectus esset. Hoc autem fieri nequit; quia si duae rectae in eodem plano ad eandem rectam in eadem plaga concurrerent, idem (ob generationes utrinque aequales) et in altera fieret; adeoque recta utraque propter 2 puncta communia coincideret.

4. Interim si recta ad dc et fc (Fig 75) duas plani rectas $\angle_{ris}$ fuerit; erit ad omnes, adeoque ad planum (per fed determinatum) ipsum P $\angle_{ris}$. Nam sit cp $\angle_{cf}$, et cq $\angle_{cd}$; moveatur fcp circa fc porro donec redeat, ita dcq circa dc ; via ipsius cp erit (per 480) planum K complectens omnes $\angle_{res}$ quae ex c ad fc fieri possunt; ita via ipsius cq erit planum Q complectens omnes $\angle_{res}$ ex c ad dc . Datur autem ex c $\angle_{ris}$ ad planum P ; atque ea tam ad fc quam ad dc est $\angle_{ris}$. Sed ejusmodi recta, quae ad fc et dc simul $\angle_{ris}$ sit, nonnisi una datur, nempe sectio planorum K et Q ; adesse enim $\angle_{ris}$ ex c ad fc in K , et $\angle_{ris}$ ex c ad dc in Q debet; adeoque illa quae tam ad fc quam ad dc $\angle_{ris}$ est, tam in K quam in Q adesse, id est utrique communis esse debet. Consequ. recta ad fc et dc simul $\angle_{ris}$, est ipsa ad P $\angle_{ris}$.

NN ii *

5. Est etiam planum quodvis p in quod $\angle_{ris}$ ad P cadit, ad P $\angle_{re}$. Nempe angulus duorum planorum generatur modo sequente: sint (Fig 76) ad rectam ab $\angle_{res}$ aequales dc , fe , in eodem plano P , atque $ac=be$; et moveatur plaga plani superior circa $a*b$ porro donec redeat; describent puncta d , f simultaneos arcus aequales circulorum radii aequalis, (propter generationes omnino aequales). Ita si gh $\angle_{gb}$; atque accipiatur $pg=eq$; erunt moto schemate circa $p*q$, viae punctorum h et f simultaneae aequales (ob generationes aequales): sed f eodem modo movetur, sive $a*b$ sive $p*q$ quiescant, quum omnia simul quiescere debeant. Consequ. omnium $\angle_{rium}$ aequalium extremitates arcus simultaneos aequales describent. Est autem (456) quantitas anguli planorum via ejusmodi; quae si quadrans sit, erit (459) planum ad P $\angle_{re}$. Patet hinc quantitatem anguli planorum esse quantitati anguli $\angle_{rium}$ e quovis puncto sectionis eorum aequalem.

6. Oritur autem anguli cujusvis, (tam duarum rectarum, quam duorum planorum), per transitum cujusvis in alteram plagam, suus verticalis: quos pro lineis rectis aequales esse vel ita patet. Sint anguli hi verticales u et v (Fig 77): si hi moto β circa c , donec extremitas arcum δ describat, non sint aequales; erit unus ex gr. $u >$ altero v , (nempe $\gamma > \delta$ pro radiis α et β aequalibus). Fiat $z=\delta$; erit (per generationes aequales), si α moveatur (in eodem plano intelligendo) circa c , donec arcum $z=\delta$ describat; erit z quoque $<$ arcu quem extremitas ipsius β interea descripsit. Est ver. manifesto arcus hic $< \delta$ (propter transitum rectae per rectas β , z in plagam alteram). Consequ. esset z (quod $= \delta$ est) minor arcu ipso δ minore. Pariter patet, si $v > u$ esset; et pariter de altero verticalium pari.

Atque rectis productis, quorum angulus (respectu quantitatis) angulo planorum aequalis est: manifesto etiam anguli planorum verticales aequales sunt.

7. Plani per centrum sphaerae positi, sectionem cum superficie sphaerica, circulum radii radio sphaerae aequalis (*circulum maximum* dictum) esse (ex 480) patet; quaevis duo plana autem per centrum e posita se invicem in recta e centro eunte secare, cujus punctum p in superficiem sphaerae cadens, circulis maximis e centro. in utroque plano descriptis commune est; et patet rectam eandem (utriusque plani sectionem) continuatam, alterum quoque eorundem circulorum punctum commune proebere.

8. Angulus vero circulorum maximorum sphaerae, quantitas respectiva fit, per arcum, quo quantitas anguli planorum, in quae circuli illi cadunt, exprimitur. Si igitur (Fig. 78) a puncto p supra tabulam sito in duobus circulis maximis, quadrantes accipiantur, pa in uno et pb in altero; circuli maximi arcus ab exprimet angulum eorum; nam pe sectio plani pca cum plano pcb est, et propter quadrantes pa , pb , anguli pca , pcb recti sunt.

9. Hinc etiam arcus circuli maximi ad arcum ab $Lres$ in extremitate quadrantum concurrent (in ita dicto *polo circuli* cujus ab arcus est). Nam pe est ad ac et bc simul $Lris$; adeoque ad totum planum abc $Lris$ est; itaque (484) et plana acp , bcp sunt ad planum abc $Lris$, adeoque angulus quadrantis utriusque cum arcu ab rectus est. Consequ. arcus ex a et b ad ab $Lres$ in p concurrunt. Patet autem schemate circa pc moto, arcum quemvis per a describi posse, et $Lrem$ circulum e quovis arcus ab puncto unum solum generari.

10. Si vero plana P et Q se invicem ad angulum rectum secant in recta ab ; e quovis puncto p ipsius P ad ab demissa $Lris$ est L Q , atque e quovis puncto ipsius ab erecta ad Q $Lris$ in P cadet. Nam sit pb L ab ; ducatur in plano Q ad ab $Lris$ bf ; erit angulus pbf rectus, quia $P \perp Q$; adeoque pb ad duas plani Q rectas (nempe ab et bf) $Lris$, consequ. etiam ad Q $Lris$ est.

Quaecunque $Lris$ autem fuerit ex a ad planum Q ; illa in planum P cadit: nam si ex a ca.

deret, ex eodem puncto a duae essent (contra 483) quia (per praec.) Lris ex a ad ab in P cadens est ad Q Lris.

11. Denique si duo plana P et p secant se invicem, et utrumque Lre sit ad planum Q; sectio priorum ad Q est Lris. Nam si $P \perp Q$, et simul $p \perp Q$, sit A sectio planorum P et Q, et α sectio planorum p et Q; secabunt A et α in Q cadentes se invicem; quia nisi secarent, nec plana ex A et α ad Q Lria secare se invicem facile patet. Sit sectio rectarum A et α in a, Lris ex a ad Q cadit (per praec) tam in P quam in p, adeoque in sectionem solam planorum P et p, cui a commune est.

12. Quoad angulum quem recta ac facit cum plano P; in quo, centro c sit descriptus circulus radio bc; supposito (sed inferius demonstrando), hypothenusam ecse catheto majorem, et rectis e quovis puncto eodem extra peripheriam, ad eam ductis, angulum ad centrum crescere; facile patet, nisi ac $\perp$ P sit, esse angulum acb minimum (457). Nempe sit b punctum, in quod Lris ex a ad P cadit; erit bc cathetus $<$ hypoth. ac; tum radio bc descripto in P circulo, erit quivis angulus dca $>$ bca, nam concipiatur a omnino supra planum dbc; erit in $\triangle$ rectilineo abd angulus ad b rectus, quia ab $\perp$ P; atque hinc hypoth. ad $>$ ab. Concipiantur jam duo $\triangle$ la, nempe abc et adc, et ponatur c in c et a in a, atque vertatur $\triangle$ utrumque (Fig 79) in eandem a recta ca plagam in P; patetque per supposita, esse angulum acb $<$ acd.

§. 16. Sed dicendum etiam (450) de planis et rectis se invicem (etiamsi in ∞ producta sint) non secantibus est. Si (Fig 80) rectae ac et bd ad rectam ab (sive in eodem plano sive non) Lres fuerint, nullum punctum commune habent (483); pariter si cabd circa ab usque ad reditum moveatur, plana per rectas ac et bc (etsi ∞ tae concipiantur), nullum punctum commune habent; nam ibi aliqua recta ac et aliqua bd productae secarent se invicem.

Patet etiam, quod, si duo haec plana per tertium secentur: rectae illae in quibus hoc priora secat, in idem planum tertium cadant, nec se invicem secent; quia tum duo priora punctum illud, in quo haec se invicem secarent, commune haberent.

I. At quaeritur, num per punctum a solum planum prius detur, quod planum inferius nempe viam rectae bd antea dictam haud secat? Atque haec quaestio eo redit, num per a sola recta $\widetilde{ac}$ detur in eodem plano rectam bd non secans?

Aut solam rectam, solumque planum, in aliquo casu; aut innumera in omni casu dari patebit.

II. Movetur ab (efficiens cum recta bd angulum ϵ , qui sit ex gr. $= R$ (denotante R rectum) circa a , (Fig 8C) per quadrantem usque in ac ; aliquamdiu secabit $\widetilde{ab}$ tam quadrantem quam rectam bd semper porro, in ac perveniendo autem non secat; dari igitur punctum aliquod ultimum p quadrantis debet (per p.16), per quod recta ex a ducta talis est, ut quaevis alia interior secat rectam bd ; illa autem ipsam non secat, quia id in puncto aliquo rectae bd esset, et recta $\widetilde{bd}$ e recta secante in plagam superiorem transiens, innumera puncta haberet, in quibus a recta circa a ulterius mota secari posset; adeoque recta $\widetilde{ap}$ non esset ultima earum, intra quas quaevis secat rectam bd . Itaque $\widetilde{ap}$ est primo non secans. Sed quaeritur quantitas anguli α nempe arcus bp ?

Axiomatis Euclidei XI^{mi} sensus est; quod si ad *quantaveris* rectae ab extrema, in eandem plagam, rectae ac et bd ponantur, *quantavis fuerit summa angulorum internorum* α *et* ϵ . 2 rectis minor, et utvis *partita*: rectae $\widetilde{ac}$ et $\widetilde{bd}$ se mutuo secant.

Tria igitur hoc continet, quorum quodvis solum ad reliqua duo demonstranda ex arte suf-

ficeret; nempe 1mo si pro uno solo ab non sit $u < R$; pro quovis ab , summa duorum internorum u et v , pro quibusvis rectis se invicem primo non secantibus erit $= 2R$. 2do. Si constaret summam internorum u et v dictorum, omni dabili minorem fieri non posse, etsi recta ad cujus extrema in eandem plagam positi sunt, quovis dabili major fiat, tum quoque certum esset, in omni casu esse $u + v = 2R$. Si nempe (pro angulo utvis parvo u) (Fig 81) posset ap ita removeri, ut recta ex a ad angulum u posita, primo non secans ipsius bd sit, ultra bd quoque ad distantiam a' a b aequalem, angulo u posito, erit rectarum ex a et a' se invicem (ut facile patet) primo non secantium, angulus uterque $= u$, et summa internorum $= 2u$, quod ~ 0 . Eritque (ut patebit) aut semper quodvis $u = R$, aut $u \sim 0$, si $ab \sim \infty$.

3tio. Si constaret; quod si pro certis u et v e finibus certae rectae, secant rectae se invicem, etiam ad angulos $u + x$ et $v - x$ ad fines rectae ejusdem positae secant se invicem: (nempe pro eadem internorum summa utvis partita): tum quoque facillime constarent omnia.

Vix concipi posset, tantum Geometram tale axioma ponere potuisse: at in manuscriptis antiquis inter postulata positum repertum est. Nimirum tota Geometria Euclidis, quasi una propositio considerari potest; si dicatur, *Posito A poni G*, (per A axioma XI, per G geometriam intelligendo). At plane hoc, quod poni debeat, atque et contrarium aequè poni possit; nempe quum omnia reliqua axiomata, tam cum eo si (Fig 80) u rectus sit, quam cum eo si eo minor sit, (imo quantovis sit ab R (inclusive) usque ad 0 (exclusive), aequè subsistant: duo systemata oriuntur, prouti $u =$ vel $< R$ ponitur, utraque vera, unum sub conditione quod si $u = R$ sit, alterum posito $u < R$: quamvis contraria respectu eorum prodeant, quae

a quantitate dicta ipsius u dependent. Imo prouti quantitas ipsius $u < R$ pro certa recta ab supponitur; eo respectu innumera systemata oriuntur; quae tamen certo respectu consentiunt, et omnia sub systemate generali, quod suppositioni $u < R$ innititur, continentur; ex gr. (Fig. 81) summa interno-
rum pro rectis se invicem primo non secantibus, in omnibus $\sim o$, si distantia $\sim \infty$; ita summa angulorum $\triangle$ li rectilinei $\sim o$, dum latus quodvis $\sim \infty$ &c

Si igitur utrumque systema elaboratum sit; etsi per reliqua axiomata indecisum maneat, quodnam reipsa locum habeat: dabitur Geometria eo sensu, quod non solum quodvis dictorum systematum supposititiae; sed etiam inconditionate verum sit, duorum aliquod reipsa esse; ea tamen cum restrictione, quod etsi constaret, systema pro $u < R$ reipsa locum habere, eorum quantitas, quae plane a quantitate ipsius u recto minoris determinata dependent, eatenus indecisa maneret.

Aliud est, si res non a priori, sed quoad praxim consideretur; et (Fig. 80) pro data ab, rectae ac, donec adhuc secet rectam bd, angulus a posteriori mensuretur; nempe tum saltem a posteriori constabit u a recto, pro tantis lineis quas nobis tentare licet, haud multum differre. Sed quid si ab usque ad Syrium protenderetur, aut ulterius? Utcunque sit; tempus ab aeterno connata spatii soror, ei auxilio venit; et quum motus corporum coelestium calculis $u = R$ posito innixis conveniant; pro omni mensurationum nostrarum sphaera, in praxi eidem suppositioni tuto conquiescere monet.

III. Omnia systemata nobis (si praeter axiomata reliqua nullum ponatur) subjective possibilia, (id est e quibus unum tantum est, sed quodnam absolute verum sit, decidere haud valemus), generaliter comprehendens, *Appendicis Auctor*, rem acumine singulari aggressus, Geometriam pro omni casu absolute veram posuit; quamvis e magna mole. tantum summe necessaria, in Appendice hujus tomi exhi-

buerit, multis (ut tetradri resolutione generali, pluribusque aliis disquisitionibus elegantibus) brevitatis studio omissis.

Pro data quavis recta ab , angulum u (Fig 80) geometricè construere, docetur in Appendice dicta: de quantitate ipsius u tamen, quamvis in concreto quasi ante oculos stet, a priori decidi nihil potest, nisi quod non 0 et non $> R$ sit.

Ibidem porro in spatii scientia distingvuntur ea, quae a quantitate dicta ipsius u non dependent; id est aequè vera sunt, sive $u = R$, sive quaevis alia quantitas ejus inter 0 et R ponatur: atque Trigonometria sphaerica, et quaedam alia, ut talia, demonstrantur.

Illa vero quae absolute a quantitate dicta ipsius u dependent, per ejusmodi functiones determinatas ipsius u exprimuntur, quae pro quovis valore ipsius u , (id est quicumque valor ipsius u re ipsa fuerit), eo in expressione substituto ipsi u , quantitatem quaesitam exhibent. Si ex gr. quantitas certa $x = (f)u$ in spatio, absolute a quantitate ipsius u dependeat; et sit $(f)u$ talis expressio, quae non nisi ipsum u et quantitates datas complectitur: concipiatur abscissa a 0 usque ad R crescens, omnes valores cogitabiles ipsius u (a 0 exclusive usque ad rectum inclusive) exhibens; et erigatur a fine cujusvis abscissae, ordinata $= (f)u$ pro illo valore ipsius u , atque pro $u = R$ fiat ordinata valori illi aequalis, quem expressio pro $u = R$ capit.

Quum autem omnes istae expressiones, quantitatum in toto spatio a quantitate ipsius u dependentium, cum reliquis axiomatibus aequè subsistant, quicumque innumerabilium valorum dictorum substituantur ipsi u : ex iisdem axiomatibus quantitas ipsius u determinari nequit.

IV. Nihilominus tamen quaestio suboritur: quid si novum axioma detur, per quod determinetur u ? tentamina idcirco quae olim feceram, breviter exponenda veniunt; ne saltem alius quis operam eandem perdat.

Distinxeram ea, e quibus Ax. XI^{um} Euclidis demonstrari, adeoque theoria parallelarum euclidea stabiliri posset, in axiomata *situs*, in *quantitativa*, et *intervalli*, atque *similitudinis*.

I. *Axiomata situs.*

1. Summa duorum internorum, quas rectae in plani ejusdem plaga eadem, ad rectam positae faciunt; utcunque haec crescat, nequit continuo decrescendo, omni dabili minor fieri, nisi eae se invicem secant.

2. Si (Fig 82) a x non capitur y ; neque a $x + v$ capitur $v + y$. Haec est axiomatis euclidei 3^{ta} pars, nempe eadem summa ad fines ejusdem rectae aliter partita.

3. (Fig 81) Si C ante finem temporis t dabilem quamvis portionem spatii universi utvis ∞ tam (dummodo nullum punctum rectae quae post a ad dextram est incidat), complectatur; et ad finem temporis t fiat C ipsum spatium universum: id quod e spatio praeter C est; ante finem temporis t , semper illi C, quod tunc est, absolute aequale complecti nequit. Duo spatia hoc pacto quaquavesum infinita, nullo puncto praeter dimidiam rectam excluso prodire videntur; nisi XI axioma Eucl. verum sit, (ut infra videbitur).

II. *Quantitativa.*

1. Si A habeat dimidia absolute aequalia; innumerabilia dimidia a se invicem prorsus distincta, prioribus absolute aequalia habere nequit.

2. Nullum A habet partes innumerabiles a se invicem prorsus distinctas, quarum quaevis ipsi A absolute aequalis sit.

3. Nullum A tale est; ut (pro $n \sim \infty$), $\frac{A}{n}$ queat ipsum A (uti est) continere, nonnisi $\frac{A^2}{n}$ deficiente.

III. *Intervalli.*

Si duarum linearum simplicium uniformium utrinque ∞ tarum, in plano se invicem secantium, apertura (id est angulus ad punctum sectionis) maneat utrinque constante quodam earundem linearum angulo, semper major ante temporis t finem: in puncto experte temporis ipsum t terminante, una alteram transiliisse nequit

Similitudinis: Sphaera nulla per ullam qualitatem, praeter magnitudinem locumque ab ulla alia discerni potest.

Aut idem de quibusvis duobus punctis in spatio dici potest.

Quovis horum posito, XI axioma omnino cum rigore demonstratur: et aut aliquod horum, vel alicui aequivalens adsumendum est; aut nulla alia Geometria absoluta datur, nisi quae in *Appendice* stabilita est; et quae in omnem casum absolute vera, magni imo eo majoris pretii est; quod nullum axiomaticum propositorum simplicitate ceterorum Geometriae axiomaticum gaudeat. Si igitur nullum propositorum, inter axiomata referatur; dabitur quidem Geometria, sed quantitas ipsius n semper indecisa manebit: fons purus veritatis in aeternitate est, eoque nos per noctem sepulchrum in lucem allicit; quum mortalibus labiis inde haurire haud liceat.

Interim quantitativum aliquod axioma, in Geometria adsumere necesse est: nempe quod sub iis axiomatibus, quibus relatio totius ad partes exprimi solet, latet (p. 44). Et hoc est sequens:

Quaevis portio spatii undique terminata, tam ipsa, quantitas finita est (p. 44), quam superficies ejus (si quantitas sit). Inde sequitur, etiam quantitates respectivas ejusmodi, finitas esse.

Hoc quasi introitum aperire videtur, alicui axiomaticum quantitativorum: utcunque sit; quomodo ope cujusvis dictorum demonstretur $n=R$ esse, breviter referre, paucis primariis (ab hoc independentibus) suppositis, liceat.

1mo. Ex (Ax. 1,2) facile sequeretur modo sequente : (Fig 82) si nempe $u+v < 2R$; ad punctum b deinceps positus, residuum dicatur y ; ductaque e quovis puncto f cruris anguli y recta ad c , angulus quem fc cum cb facit, dicatur z ; ponaturque ad c supra z angulus v . Manifesto y a z non capitur, adeoque (per Ax.) neque $y+v$ capitur a $z+v$. Consequ. pro internis u et $v+z$ sectio est; idque tanto fortius, si pro $v+z$ angulus minor v ponatur.

2do. Quoad reliqua: consideretur (Fig 83) via extremitatis, rectae AB L is ad AB in eodem plano; accipianturque inde ab a incipiendo (sive ad dextram sive ad laevam) partes hujus viae (quae L dicatur), se invicem excipientes ab, bc, cd &c omnes inter se æquales; ducanturque rectae ab, bc, cd &c... Angulos omnes x (propter generationes aequales) patet aequales esse. At quum puncta a, b, c, d --- in recta esse neutiquam constet; quaeritur num x rectus vel obtusus aut acutus sit?

1. Si x rectus esset: tum (Fig 84) punctum lineae L e meditullio E ipsius AB generatum quoque in rectae ab meditullium e cadit. Nam recta meditullia E, e connectens (per generationes utrinque aequales), tam ad E quam ad e angulos utrinque aequales, adeoque rectos facit. Si jam punctum lineae L per L rem ipsi a aequalem ex E erectam in p aut q caderet; in casu primo fieret $a = b + k + h$, adeoque $a > R$, quia $x = k + h = R$ erat; at idem $a < R$ esset, quia $p = R$ externus interno a major est (uti suo loco independenter demonstratur); in altero casu autem fieret $i = h$, adeoque $i < R$, quamvis externus i sit $> (p = R)$. Unde etiam $aA = Ec$ esset.

Atque eodem modo punctum lineae L e meditullio rectae AE pariter in meditullium rectae ac caderet; atque hoc per dimidiationes cujusvis dimidii in ∞ continuari patet. Tum vero nulla pars continua lineae L ex a supra aut infra rectam ab cadere poterit; nam inter aA et L rem e puncto quovis lineae dictae ex a incipientis (et omne punctum praeter a extra rectam ab habentis) ad Ab

demissam, innumera lineae ejnsdem puncta per dimidiationem dictam generata dantur in rectam ab cadentia. Essetque hoc pacto linea L eadem cum recta $abcd$ --- (Fig 83); unde (per inferiora) omnia facile patent.

2. Si vero x acutus vel obtusus esset: tum $abcd$ --- talis linea e rectis composita esset, cujus latera ab, bc, cd --- (utrinque in ∞), essent aequalia, et anguli quoque lateris cujusvis cum praecedente latere et sequente in eadem plaga, aequales essent. Si $x < R$, tum angulus rectarum ab et bc inferior est $< 2R$; si $x > R$ esset, tum ubique superior esset $< 2R$; potest quidem demonstrari $x > R$ non esse; quia tum per diagonalem aB duo $\triangle$ la fierent, quorum summa angulorum $> 4R$, adeoque $\triangle$ daretur, cujus angulorum summa $> 2R$. (quia 4 in duas partes dispesci ita nequit, ne aliqua > 2 sit); hoc autem fieri non posse (item independentem) pluribus modis demonstrari potest. Sed sufficit nunc linea dicta $abcd$ ---, cujus per quemvis angulum duobus rectis minor intelligatur: dicatur haec linea λ .

3. Manifesto vero lineae λ nullum latus ex gr. cd ad dextram continuatum, partem ipsius λ per L res ad $\widetilde{AB}$ a puncto C ad laevam cadentes generatam, (ita nec ullam L rium porro ad laevam cadentium) secare potest: nam tam omnes L res dictae, quam omnia quae inter tales L res sunt, in plagam plani illam cadunt, quae a C ad laevam est; itaque ut sectio dicta fiat, recta $c\widetilde{d}$ per rectam $\widetilde{C\epsilon}$ alicubi praeter c transire deberet, et tum cd in $\widetilde{C\epsilon}$ caderet.

4. Ita L ris quaevis $\widetilde{C\epsilon}$ per verticem anguli ipsius λ ex c ad $\widetilde{AB}$ missa, angulum ipsum omnino bisecans, nullum praeter c punctum cum λ (aut cum L) commune habet: nam si quod punctum p ipsius λ adhuc cum $\widetilde{C\epsilon}$ commune esset; hoc p in

L_{rem} e puncto rectae $\widetilde{AB}$ a $\mathcal{C}$ diverso erectam caderet; et si p etiam in $\mathcal{C}$ caderet, duae rectae ad eandem rectam L_{res} concurrerent.

5. (Fig. 85) Rectae ab , ac , ad $\mathcal{E}^c$ ex eodem a ad extrema laterum lineae λ ductae vocentur Q , Q' , Q'' --- et nomine generali dicantur Q ; atque sit Ω angulum lineae λ quae ad a est bifariam secans, (adeoque L_{ris} ad $\widetilde{AB}$ per a): angulus abc est $=bcd=cde$ $\mathcal{E}^c$; sed quaeritur, quo cadat respectu alicujus Q latus sequens lineae λ ? Primo statim bc infra ab cadit, quia (494) angulus 2 rectis minor accipitur; porro cd infra Q' cadit; secus enim aut in Q' aut supra Q' caderet. In Q' non cadit; quia id aut intra c , aut ultra c ex gr. in f esset; et in casu posteriore $\angle bcf > 2R$ esset, in altero vero per cd secaretur pars ipsius λ ante generata (contra 494). Idem fieret, si cd supra Q' caderet, fieri enim hoc inter Q' et cb deberet; nam si extra cb caderet, $\angle lns > 2R$ esset.

Demonstratione eadem semper ulterius applicata, patet quodvis latus sequens infra rectam ex a ad initium ejus ductam cadere.

6. Hinc si Q circa a moveatur per bcd ---; usquequo in $\mathcal{A}$ perveniat: omnino semper in ulterius punctum lineae λ veniet, adeoque eam secabit aliquamdiu, ipsum $\mathcal{A}$ vero nullum latus lineae λ secabit (494); itaque ut supra (487) datur aliqua recta Ω' lineam λ primo non secans, intra quam quodvis Q angulum utvis parvum $\propto$ cum Ω' efficiens secat lineam λ .

Sed tum etiam nullum latus lineae λ (ex gr. cd) ad dextram utvis continuatum secat rectam Ω' ullibi (ex gr. in i). Nam L_{ris} e quovis puncto ulteriori (ad dextram) lateris cujusvis utvis continuati quoque semper ulterius cadit: namque e a L_{ri} $\mathcal{D}$ ad dextram cadit; ita continuatio rectae de per L_{rem} $e\mathcal{C}$ transit ad dextram, et L_{ris} e quovis puncto rectae hujus quae ab $e\mathcal{C}$ ad dextram cadit, pariter ad dextram cadit; uti etiam

$Lris$ e quovis puncto rectae quae per novam $Lrem$ ad dextram transit.

Itaque si sectio i fieret; tota $b\epsilon f$ --- excepto puncto b intra $\triangle adi$, adeoque inter $Lres$ Ua et $i\mathfrak{Z}$ contineretur quodvis punctum, et quaevis $Lris$ generans ex eo ad $U\mathfrak{Z}$ missa, et ultra $\mathfrak{Z}$ nulla $Lris$ generans daretur. Idem valet quocunque cadat i , atque etiam si $abcdef$ --- versus $U\tilde{B}$ convexa esset; (quod ut dictum est, fieri non posse facile ostendi potest).

7. Manifesto, autem hinc pro α utvis parvo, ex gr. $\alpha < \frac{q}{n}$ pro n integro utvis magno, crura ali-

cujus anguli constantis q , producta in ∞ etiam, inter crura anguli α continentur. Atque hinc si q e vertice in n partes aequales dividatur; inter cujusvis ejusmodi $ntae$ partis crura quoque continebitur unum q cum cruribus infinitis, et omnes hi anguli q a se invicem prorsus distincti erunt, si in

quovis $\frac{q}{n}$ ita accipiat $\alpha < \frac{q}{n}$, ut crura ipsius α

e vertice anguli q intra crura anguli $\frac{q}{n}$ cadant.

Unde cum axioma (II, 2) proposito, anguli u (487) quantitas $>$ aut $<$ R consistere nequit. Consequ. u rectus est.

8. Hinc (Fig 86) si (ex Fig. 83) $aU = b\mathfrak{B}$, et anguli ad $U, a, \mathfrak{B}, b$ recti sint; erunt anguli $\alpha + \gamma$ et $\alpha' + \gamma'$ ac β, β' (*alterni dicti*) aequales, uti *externus* ex gr. β'' *internó opposito* β' aequalis, et quaecunque recta ab secet ipsam $U\tilde{B}$ et $\tilde{a}\tilde{b}$, summa interno-
rum est duobus rectis aequalis. Nam $\triangle la$ rectan-
gula $Ua\mathfrak{B}$ et $b\mathfrak{B}a$ propter hypotenusam communem et cathetum aU catheto $b\mathfrak{B}$ aequalem sunt (per inferiora ab his independenter) aequalia; adeoque $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$; et hinc quia $\beta = \beta''$ (nempe suo verticali), est etiam $\beta'' = \beta'$. Atque hinc, quum $\beta'' + \gamma + \alpha = 2R$, erit etiam $\beta' + \gamma + \alpha = 2R$.

9. Hinc item quodvis $\triangle$ fuerit; (Fig 87) per verticem tali linea (ut in praec.) generata, erit $\gamma = \gamma'$, et $\beta = \beta'$; adeoque $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta' + \gamma' = 2R$.

10. Atque hinc $\delta + \gamma = \beta + \alpha + \gamma = 2R$; et $\delta = \alpha + \beta$; nempe producto latere quovis $\triangle$ li, angulus externus est summae internorum oppositorum aequalis.

11. Et hinc jam facile sequitur; quod si (Fig 88) summa internorum $< 2R$; tum rectae secant se invicem. Nam si $u + p + \omega + q = 2R$, et $\mathfrak{B} \tilde{b}$ ipsam $\mathfrak{A} \tilde{a}$ primo non secans sit; erit tum recta e quovis puncto a ipsius $\mathfrak{A} \tilde{a}$ ad $\mathfrak{B}$ ducta, angulus ad $\triangle$ li $\mathfrak{A}ab$ (per 9) aequalis $2R - u - p = u + p + \omega + q - u - p = \omega + q$, essetque semper $> q$; quod falsum esse patet (ex Fig 89): nam si $\alpha' = \alpha$, ita $\beta' = \beta$, et ita porro cuivis novo lateri ex b ducto, e fine ejus in $\mathfrak{A} \tilde{a}$ aequale accipiatur; orientur $\triangle$ la' aequicrura se in ∞ excipientia; in quibus $z = 2z'$, $z' = 2z''$ &c, itaque angulis z , z' , z'' - - - generaliter z dictis, $z \sim o$. Nempe $\triangle$ li aequicruri angulos ad basim esse equales infra ab hoc independenter demonstrabitur.

12. Superius generatam L (per def. p. 462) parallelam ad $\mathfrak{AB}$ esse patet: et jam hic posito axioma dicto, manifesto recta $\tilde{a}b$ non secat rectam $\mathfrak{AB}$, quaevis alia per a ducta autem, quum ab aliqua parte summa internorum $< 2R$ fiat, secat rectam $\mathfrak{AB}$; et manifesto datur eodem modo parallela ad rectam quamvis per punctum quodvis, eaque una sola est.

13. Atque hinc (Fig 90) si rectae A, B secant se invicem in p ; ubicunque sit A' ad A parallela, etiam A' secatur a B . Sit enim ex p recta ad quodvis aliquod punctum q rectae A' ; erit $z + v + u = 2R$; itaque $v + u < 2R$; conseq. B ultra p , et A' ultra q continuatae concurrent.

14. Pariter patet, quocunque moveatur B sibi parallele (ex gr. in B'); rectas A' et B' quoque secare se invicem, et angulos z et k , in sectione

prima, esse angulis α et β sectionis posterioris aequales.

15. E superius dictis autem sequitur etiam inter crura anguli utvis parvi v continuata in ∞ , angulum 4 rectis quantovis minorem, simul cum cruribus continuatis in ∞ , imponi posse, nisi $n=R$ sit (487).

Nempe inter crura anguli utvis parvi v (496) angulus certus $\delta = \frac{R}{n}$ (pro R rectum et n integrum denotante) imponi potest, adeoque etsi $v = \frac{1}{2} \delta$ fuerit; fiat id ad distantiam d a vertice anguli $v = \frac{1}{2} \delta$. Atque hinc fiat (Fig 91) linea polygonalis $abcd \dots$, cujus latus quodvis $= d$, et angulus quivis (2 rectis minorem intelligendo) sit $= 2R - \frac{1}{2} \delta$. Dicaturque α continuatio lateris ab efficiens angulum $\frac{1}{2} \delta$ cum bc , et fiat ex b recta bb' , ex c recta cc' , ex d recta dd' &c, singulae angulum $\frac{1}{2} \delta$ cum lateribus e punctis $b, c, d \dots$ incipientibus efficientes, ut inter crura cujusvis $\frac{1}{2} \delta$ ad distantiam d sit $\frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2} \delta = \delta$ positum; quaevis litera graeca autem fuerit ad initium lateris alicujus, efficiens cum eo in plaga dextra angulum aliquem p , recta ad finem lateris ejus cum continuatione ejusdem efficiens angulum externum $= p$, insigniatur litera graeca sequente; ex gr. β efficiet cum continuatione lateris bc angulum $\frac{1}{2} \delta$, ita γ efficiet cum continuatione lateris cd angulum $2 \cdot \frac{1}{2} \delta$, ita δ cum continuatione lateris de angulum $3 \cdot \frac{1}{2} \delta$ et ita porro, donec litera graeca prodeat, quaecum continuatione lateris praecedentis efficiat an-

gulum $(4n-1) \cdot \frac{1}{2}b$, adeoque cum latere sequente faciat angulum $4n$. $\frac{1}{2}b=2R$.

Manifesto $\tilde{\beta}$ in plano supra $\tilde{\alpha}$, et $\tilde{\gamma}$ supra $\tilde{\beta}$, ac $\tilde{\delta}$ supra $\tilde{\gamma}$ &c, ac quaevis sequens supra omnes praecedentes cadit: imo si omnium rectarum literis graecis denotatarum tantum pars a linea bcd --- in plagam dextram cadens consideretur: quaevis supra omnes praecedentes cadet; nec illa (quae cum latere sequente $2R$ facit, adeoque in recta erit) secat ipsam $\tilde{\alpha}$. Erit igitur tota haec recta utrinque ∞ ta inter crura ipsius $v = \frac{1}{2}b$; nempe $b\tilde{b}'$ est intra $a\tilde{a}'$, $c\tilde{c}'$ intra $b\tilde{b}'$, $d\tilde{d}'$ intra $c\tilde{c}'$ &c.

Unde etiam (Fig 92) ad rectarum A, B angulum utvis parvum v efficientium, latus quodvis A potest talis $\angle$ ris poni, quae utvis producta latus alterum B utvis productum secare nequeat. Sit enim C recta talis, quae (per praec.) etiam utrinque ∞ ta inter crura anguli v ab ea parte in ∞ producta maneat: demittaturque e quovis puncto p ipsius C $\angle$ ris pq ad A; cadet haec in plagam eandem cum C, quia si in alteram caderet, fieret $\triangle$, cujus unus angulus rectus esset, alter autem obtusus, nempe ipsi v acuto deinceps positus: continuatio ipsius pq vero transit per C in alteram plagam, quae pariter tota inter crura anguli v continetur.

Atque hinc (Fig 93) inter crura anguli $2v$, (quod $\smile$ o si $v \smile$ o), non solum totam $\angle$ rem ccc , sed $a'c=ac$ facta, etiam angulum $b'a'f'$ aequalem $4R-2v$ simul cum cruribus ∞ tis imponi posse patet.

Si igitur ba circa a moveatur versus ac usquequo in ac perveniat; atque priusquam ab in ac perveniat, accipiatur semper tale a' , et tale $a'b'$ ad

angulum ei quem ab cum ac facit aequalem, ut $a'b'$ et ab se invicem haud secent; atque cogitetur semper spatium, quod si schema circa aa' revolveretur, maneret a via ipsius ab ad laevam, et id quod a via ipsius $a'b'$ ad dextram esset. Hoc pacto quaevis spatii portio s nihil cum recta aa' (saltem praeter punctum a) commune habens, manifesto alicui spatio ad laevam generato includetur; pro v minore, quam angulus quivis, quem recta ex a ad aliquod punctum ipsius s ducta cum aa' facit; atque a' sufficienter remoto, ad angulum v alteri v aequalem, aderit alterum s quoque cum priori nihil commune habens. Unde applicatio Ax. propositi (I; 3.) patet: non tamen duo spatia prodibunt; nam dum ab in ac pervenit, nascitur quidem totum spatium, sed a' in ∞ to disprens nullibi amplius in temporis puncto experte ultimo reperitur; et antea quidem quodvis punctum, in spatium ad laevam inclusum est, sed omne nunquam ante finem.

16. Ita facile demonstrantur sequentia:

1mo. Lineam uniformem L (495) nisi recta sit, extra lineam $abcd$ fluere, cum hac (Fig 85) nonnisi puncta $abcd$ communia habentem: atque hinc applicatio (Ax. III.) patet; nempe angulus quem continuatio inferior ipsorum Q cum L extus facit, infrorsum $\smile \alpha$, superius ad $2R' - \alpha$, (si per R' intelligatur angulus quem continuatio rectae aA cum L facit), et uterque est semper $> \alpha$; inferior crescit continuo, superior decrescit, et manifesto sunt anguli ad utramque continuationem cujusvis Q aequales.

2do. AB circa A sursum motum illico secat lineam L , uti etiam quaevis L ris ad aA inter a et A : et statim post A , ad dextram laevamque secat ipsum L ad angulos utrinque aequales, a limite dicto α decrescentes, et dato constante aliquamdiu semper majores.

3tio. Manente a et remoto $\mathcal{A}$ in $\widetilde{a\mathcal{A}}$ semper porro deorsum in ∞ simul cum $\mathcal{L}_{ri} \mathcal{A}\mathcal{B}$; ac generatis super quavis $\mathcal{A}\mathcal{B}$ cum $\mathcal{L}_{ri} \widetilde{a\mathcal{A}}$ lineis L , et angulo, quem recta ipsam L primo non secans cum $\widetilde{a\mathcal{A}}$ facit, generaliter $\propto$ dicto; atque etiam quovis centro $\mathcal{A}$ radio $\widetilde{a\mathcal{A}}$ descriptis circulis: angulus $\propto \smile o$; alioquin recta pro certo angulo $\mathcal{L}_{rem}$ utvis remotam secaret (contra 499); porro lineae L solum punctum a commune habebunt, et descendent; circuli vero idem punctum a solum commune habebunt, sed ascendent continuo, gaudebuntque limite geometrio certo eodem: quem existere, uti et superficiem per revolutionem hujus lineae circa $\widetilde{a\mathcal{A}}$, atque utramque formam uniformem esse constat; estque si XI Ax. Eucl. verum sit, linea dicta *recta*, et superficies *planum*; in omni tamen casu tam linea haec quam superficies, *sola* determinatur in *spatio*.

Describi vero linea dicta motu puncti continuo potest modo sequente. Sit prius (Fig 94) $\alpha = R$, et moveatur ab circa a usque in ac ; simulac b in arcu α viam aliquam describet, illico dabitur aliquod c , unde erecta $\mathcal{L}_{ris}$ primo non secans rectae $\widetilde{ab}$ est, et pro $ca' = ca$ erit etiam $\widetilde{a'b'}$ primo non secans ipsius $\widetilde{ab}$. Puncto b in arcu α porro moto vero, punctum c ab a incipiendo semper porro movetur: nam pro quovis puncto interiore ipsius α , datur c , et quidem semper ulterius; nec ullum punctum ultra quodvis c ab a incipiendo est, cui aliquod punctum ipsius α non respondeat, et cuivis ulteriori puncto, interius punctum ipsius α respondet. Nam si $\widetilde{ab}$ primo non secans ipsius $\widetilde{cp}$ sit, interius ducta recta secabit ipsam $\widetilde{cp}$, adeoque illa $\mathcal{L}_{ris}$ quam non secat, ulterius esse debet; si vero aliquod c esset, cui non responderet punctum aliquod interius ipsius α , tum $\mathcal{L}_{ris}$ ex a esset primo non secans ipsius $\widetilde{cp}$; atque tum pro

recta ac verum esset Ax. XI; et tum de omnibus facile demonstraretur. Potest igitur c ex a incipiendo ita moveri porro, ut mota ab circa a, (adeoque mota b in α) donec u (prius $=R$) fiat $=0$, et semper tale sit, ut $\widetilde{ab}$ primo non secans illius sit: atque hinc eadem ad a' applicando, poterit a' ex a ita porro moveri, ut $\widetilde{ab}$ et $\widetilde{a'b'}$, quaevis alterius primo non secans sit.

Atque jam moveatur (Fig 95) $\widetilde{ab}$ circa a versus α in eodem plano, donec u (prius $=R$) fiat $=0$, atque interea in $\widetilde{ab}$ moveatur punctum b' semper porro, ita ut b' in moto $\widetilde{ab}$ semper in loco dicto ipsi u respondente sit: erit via ipsius b' (per motum hunc compositum) *linea dicta*. Reliqua autem ultro patent; uti et ea quae reliquorum axiomatum propositorum quovis posito, rem deciderent: nec operae pretium est plura referre; quum res tota ex altiori contemplationis puncto, in ima penetranti oculo, tractetur in Appendice sequente, a quovis fideli veritatis purae alumno digna legi.

Appendix.

A P P E N D I X.

SCIENTIAM SPATII *absolute veram* exhibens:

*a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei
(a priori haud unquam decidenda) in-
dependentem; adjecta ad casum fal-
sitatis, quadratura circuli
geometrica.*

Auctore JOHANNÉ BOLYAI de eadem, Geometrarum
in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Ca-
strensium Capitaneo.

EXPLICATIO SIGNORUM.

$\widetilde{ab}$ denotet complexum omnium punctorum cum punctis a, b in recta sitorum.

$\widetilde{ab}$ - - - rectae $\widetilde{ab}$ in a bifariam sectae dimidium illud, quod punctum b complectitur.

$\widetilde{abc}$ - - - complexum omnium punctorum, quae cum punctis a, b, c (non in eadem recta sitis) in eodem plano sunt.

$\widetilde{abc}$ - - - plani $\widetilde{abc}$ per $\widetilde{ab}$ bifariam secti dimidium, punctum c complectens.

abc - - - portionum, in quas $\widetilde{abc}$ per complexum rectarum $\widetilde{ba}, \widetilde{bc}$ dividitur, minorem; si-
ve *angulum*, cuius $\widetilde{ba}, \widetilde{bc}$ crura sunt.

$abcd$ - - - (si d in abc sit et $\widetilde{ba}, \widetilde{cd}$ se invicem non
secent) portionem ipsius abc inter $\widetilde{ba},$
 $\widetilde{bc}, \widetilde{cd}$ comprehensam; $bacd$ vero por-
tionem plani $\widetilde{abc}$ inter $\widetilde{ab}, \widetilde{cd}$ sitam.

$\perp$ - - - perpendiculare.

$\wedge$ - - - angulum.

R - - - angulum rectum.

$ab \triangleq cd$ - - - $cab = acd$.

$\equiv$ - - - congruens *).

$x \rightsquigarrow a$ - - - x tendere ad limitem a .

$\bigcirc r$ - - - peripheriam circuli radii r .

$\odot r$ - - - aream circuli radii r .

*) Sit fas, signo hocce, quo summus Geometra GAUSS numeros congruos insignivit; congruentiam geometricam quaeque denotare: nulla ambiguitate exinde metuenda.

§ 1. (Fig. 1.) Si rectam $\tilde{am}$ non secet plani ejusdem recta $\tilde{bn}$, at secet quaevis $\tilde{bp}$ (in abn): designetur hoc per $bn ||| am$. Dari talem $\tilde{bn}$, et quidem unicam, e quovis puncto b (extra $\tilde{am}$), atque $bam \nmid abn$ non $> 2R$ esse patet; nam bc circa b mota, donec $bam \nmid abc = 2R$ fiat, $\tilde{bc}$ ex $\tilde{am}$ aliquando primum exit, estque tunc $bc ||| am$. Nec non patet esse $bn ||| em$, ubi vis sit e in $\tilde{am}$ (supponendo in omnibus talibus casibus esse $am > ae$). Et si, puncto c in $\tilde{am}$ abeunte in infinitum, semper sit $cd = cb$: erit semper $cdb = (cbd < nbc)$; ast $nbc \searrow o$; adeoque et $adb \searrow o$.

§ 2. (Fig. 2.) Si $bn ||| am$; est quoque $cn ||| am$. Nam sit d ubicunque in $macn$. Si c in $\tilde{bn}$ sit; $\tilde{bd}$ secat $\tilde{am}$ (propter $bn ||| am$), adeoque et $\tilde{cd}$ secat $\tilde{am}$; si vero c in $\tilde{bp}$ fuerit; sit $bq ||| cd$: cadit bq in abn (§ 1), secatque $\tilde{am}$, adeoque et $\tilde{cd}$ secat $\tilde{am}$. Quaevis $\tilde{cd}$ igitur (in acn) secat in utroque casu $\tilde{am}$ absque eo, ut $\tilde{cn}$ ipsam $\tilde{am}$ secet. Est ergo semper $cn ||| am$.

§ 3. (Fig. 2.) Si tam $\tilde{br}$ quam $\tilde{cs}$ sit $||| am$, et c non sit in $\tilde{br}$; tum $\tilde{br}$, $\tilde{cs}$ se invicem haud secant. Si enim $\tilde{br}$, $\tilde{cs}$ punctum d commune haberent; (per §. 2.) essent $\tilde{dr}$ et $\tilde{ds}$ simul $||| am$, caderetque (§. 1.) $\tilde{ds}$ in $\tilde{dr}$ et c in $\tilde{br}$ (contra hyp).

§ 4. (Fig. 3.) Si $man > mab$; pro quovis puncto b ipsius ab datur tale c in $\tilde{am}$, ut sit $bcm = nam$. Nam datur per (§. 1.) $bdm > nam$, adeoque $mdp = man$, caditque b in $nadp$. Si igitur nam juxta am feratur, usquequo $\tilde{an}$ in $\tilde{dp}$ veniat; aliquando $\tilde{an}$ per b transiisse, et aliquod $bcm = ncm$ esse oportet.

§ 5. (Fig. 1). Si $\tilde{bn} ||| \tilde{am}$, datur tale punctum f in $\tilde{am}$, ut sit $\tilde{fm} \doteq \tilde{bn}$. Nam per §. 1. datur $\tilde{bcm} > \tilde{cbn}$; et si $\tilde{ce} = \tilde{cb}$, adeoque $\tilde{ec} \doteq \tilde{bc}$; patet esse $\tilde{bem} < \tilde{ebn}$. Feratur p per ec , $\wedge lo \tilde{bpm}$ semper u , et $\wedge lo \tilde{pbn}$ semper v dicto; patet u esse prius ei simultaneo v minus, posterius vero esse majus. Crescit vero u a $\tilde{bem}$ usque $\tilde{bcm}$ continuo; cum (per §. 4.) nullus $\wedge lus > \tilde{bem}$ et $< \tilde{bcm}$ detur, cui u aliquando $=$ non fiat; pariter decrescit v ab $\tilde{ebn}$ usque $\tilde{cbn}$ continuo: datur itaque in ec tale f , ut $\tilde{bfm} = \tilde{fbn}$ sit.

§ 6. Si $\tilde{bn} ||| \tilde{am}$, atque ubivis sit e in $\tilde{am}$, et g in $\tilde{bn}$: tum $\tilde{gn} ||| \tilde{em}$ et $\tilde{em} ||| \tilde{gn}$. Nam (per §. 1.) est $\tilde{bn} ||| \tilde{em}$, et hinc (per §. 2.) $\tilde{gn} ||| \tilde{em}$. Si porro $\tilde{fm} \doteq \tilde{bn}$ (§. 5.); tum $\tilde{mfbn} \equiv \tilde{nbfm}$, adeoque (cum $\tilde{bn} ||| \tilde{fm}$ sit) etiam $\tilde{fm} ||| \tilde{bn}$, et (per praec.) $\tilde{em} ||| \tilde{gn}$.

§ 7. (Fig. 4). Si tam $\tilde{bn}$ quam $\tilde{cp}$ sit $||| \tilde{am}$, et c non sit in $\tilde{bn}$: est etiam $\tilde{bn} ||| \tilde{cp}$. Nam $\tilde{bn}$, $\tilde{cp}$ se invicem non secant (§. 3); sunt vero $\tilde{am}$, $\tilde{bn}$, $\tilde{cp}$ aut in plano, aut non; atque in casu primo $\tilde{am}$ aut in $\tilde{bncp}$ est, aut non. Si $\tilde{am}$, $\tilde{bn}$, $\tilde{cp}$ in plano sint, et $\tilde{am}$ in $\tilde{bncp}$ cadat; tum quaevis $\tilde{bq}$ (in $\tilde{nbc}$) secat $\tilde{am}$ in aliquo puncto d (quia $\tilde{bn} ||| \tilde{am}$); porro cum $\tilde{dm} ||| \tilde{cp}$ sit (§. 6.), patet $\tilde{dq}$ secare $\tilde{cp}$, adeoque esse $\tilde{bn} ||| \tilde{cp}$. Si vero $\tilde{bn}$, $\tilde{cp}$ in eadem plaga ipsius $\tilde{am}$ sint; tum aliqua earum ex. gr. $\tilde{cp}$, intra duas reliquas $\tilde{bn}$, $\tilde{am}$ cadit; quaevis $\tilde{bq}$ (in $\tilde{nba}$) autem secat $\tilde{am}$, adeoque et ipsam $\tilde{cp}$. Est itaque $\tilde{bn} ||| \tilde{cp}$.

Si $\tilde{mab}$, $\tilde{mac}$, $\wedge lum$ efficiant; tum $\tilde{cbn}$ cum $\tilde{abn}$ non nisi $\tilde{bn}$, $\tilde{am}$ vero (in $\tilde{abn}$) cum $\tilde{bn}$, adeoque $\tilde{nbc}$ quoque cum $\tilde{am}$, nihil commune habent. Per quamvis $\tilde{bd}$ (in $\tilde{nba}$) autem positum $\tilde{bcd}$ secat $\tilde{am}$, quia (propter $\tilde{bn} ||| \tilde{am}$) $\tilde{bd}$ secat $\tilde{am}$. Moto itaque $\tilde{bcu}$ cir-

ca $\tilde{bc}$, donec ipsam $\tilde{am}$ prima vice deserat, postremo cadet $\tilde{bcd}$ in $\tilde{bcn}$. Eadem ratione cadet idem in $\tilde{bcp}$; cadit igitur $\tilde{bn}$ in $\tilde{bcp}$. Porro si $\tilde{br} \parallel \tilde{cp}$; tum (quia etiam $\tilde{am} \parallel \tilde{cp}$) pari ratione cadit $\tilde{br}$ in $\tilde{bam}$; nec non (propter $\tilde{br} \parallel \tilde{cp}$) in $\tilde{bcp}$. Itaque $\tilde{br}$ ipsis $\tilde{mab}$, $\tilde{pcb}$ commune, nempe ipsum $\tilde{bn}$ est, atque hinc $\tilde{bn} \parallel \tilde{cp}$.

Si igitur $\tilde{cp} \parallel \tilde{am}$, et $\tilde{b}$ extra $\tilde{cam}$ sit; tum sectio ipsorum $\tilde{bam}$, $\tilde{bcp}$, nempe $\tilde{bn}$ est $\parallel$ tam ad $\tilde{am}$, quam ad $\tilde{cp}$.

§ 8. (Fig.5). Si $\tilde{bn} \parallel$ et $\tilde{cp}$ (vel brevius $\tilde{bn} \parallel \tilde{cp}$), atque $\tilde{am}$ (in $\tilde{nbc}$) rectam $\tilde{bc} \perp$ riter bissecet; tum $\tilde{bn} \parallel \tilde{am}$. Si enim $\tilde{bn}$ secaret $\tilde{am}$, etiam $\tilde{cp}$ secaret $\tilde{am}$ in eodem puncto (cum $\tilde{mabn} \equiv \tilde{macp}$), quod et ipsis $\tilde{bn}$, $\tilde{cp}$ commune esset, quamvis $\tilde{bn} \parallel \tilde{cp}$ sit. Quaevis $\tilde{bq}$ (in $\tilde{cbn}$) vero secat $\tilde{cp}$; adeoque, secat $\tilde{bq}$ etiam $\tilde{am}$. Consequenter $\tilde{bn} \parallel \tilde{am}$.

§ 9. (Fig.6). Si $\tilde{bn} \parallel \tilde{am}$, $\tilde{map} \perp \tilde{mab}$, atque $\wedge$, quem $\tilde{nbd}$ cum $\tilde{nba}$ (in ea plaga ipsius $\tilde{mabn}$, ubi $\tilde{map}$ est) facit, sit $\angle R$: tum $\tilde{map}$ et $\tilde{nbd}$ se invicem secant. Nam sit $\tilde{bam} = R$, ac $\tilde{ac} \perp \tilde{bn}$ (sive in $\tilde{b}$ cadat $\tilde{c}$, sive non) et $\tilde{ce} \perp \tilde{bn}$ (in $\tilde{nbd}$); erit (per hyp.) $\tilde{ace} < R$, et $\tilde{af} (\perp \tilde{ce})$ in $\tilde{ace}$ cadet. Sit $\tilde{ap}$ sectio (punctum $\tilde{a}$ commune habentium) $\tilde{abf}$ et $\tilde{amp}$; erit $\tilde{bap} = \tilde{bam} = R$ (cum sit $\tilde{bam} \perp \tilde{map}$). Si denique $\tilde{abf}$ in $\tilde{abm}$ ponatur ($\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ manentibus); cadet $\tilde{ap}$ in $\tilde{am}$; atque cum $\tilde{ac} \perp \tilde{bn}$ et $\tilde{af} \perp \tilde{ac}$ sit, patet $\tilde{af}$ intra $\tilde{bn}$ terminari, adeoque $\tilde{bf}$ in $\tilde{abn}$ cadere. Secat autem $\tilde{bf}$ ipsam $\tilde{ap}$ in hoc situ (quia $\tilde{bn} \parallel \tilde{am}$), adeoque etiam in situ primo, $\tilde{ap}$ et $\tilde{bf}$ se invicem secant; estque punctum sectionis ip-

sis $\tilde{map}$ et $\tilde{nbd}$ commune: secant itaque $\tilde{map}$ et $\tilde{nbd}$ se invicem. Facile exhinc sequitur $\tilde{map}$ et $\tilde{nbd}$ se mutuo secare, si summa internorum, quos cum $mabn$ efficiunt, $< 2R$ sit.

§ 10. (Fig.7). Si tam bn quam cp sit $||| \triangleq am$; est etiam $bn ||| \triangleq cp$. Nam mab et mac aut $\wedge lum$ efficiunt, aut in plano sunt.

Si prius; bissecet $\tilde{qdf}$ rectam ab $\perp$ riter; erit $dq \perp ab$, adeoque $dq ||| am$ (§.8.); pariter si $\tilde{ers}$ bissecet rectam ac $\perp$ riter, est $er ||| am$; unde $dq ||| er$ (§.7.). Facile hinc (per §.9.) consequitur, $\tilde{qdf}$ et $\tilde{ers}$ se mutuo secare, et sectionem $\tilde{fs}$ esse $||| dq$ (§.7.), atque (propter $bn ||| dq$) esse etiam $fs ||| bn$. Est porro (pro quovis puncto ipsius $\tilde{fs}$) $fb = fa = fc$, caditque $\tilde{fs}$ in planum $\tilde{tgf}$, rectam bc $\perp$ riter bissecans. Est vero (per §.7.) (cum sit $fs ||| bn$) etiam $gt ||| bn$. Pari modo demonstratur $gt ||| cp$ esse. Interim gt bissecat rectam bc $\perp$ riter; adeoque $tbgn \equiv tgcp$ (§.1.) et $bn ||| \triangleq cp$.

Si bn , am , cp in plano sint; sit (extra hoc planum cadens) $fs ||| \triangleq am$; tum (per praec.) $fs ||| \triangleq$ tam ad bn quam ad cp , adeoque et $bn ||| \triangleq cp$.

§ 11. Complexus puncti a , atque omnium punctorum, quorum quodvis b tale est, ut si $bn ||| am$ sit, sit etiam $bn \triangleq am$; dicatur F : sectio vero ipsius F cum quovis plano rectam am complectente nominetur L . In quavis recta, quae $||| am$ est, F gaudet puncto, et nonnisi uno; atque patet L per am dividi in duas partes congruentes; dicatur $\tilde{am}$ axis ipsius L ; patet etiam, in quovis plano rectam am complectente, pro axe $\tilde{am}$ unicum L dari. Quodvis eiusmodi L , dicatur L ipsius $\tilde{am}$ (in plano, de quo agitur, intelligendo). Patet per L circa am revolutum, F describi, cuius $\tilde{am}$ axis vocetur, et vicissim F axi $\tilde{am}$ attribuat.

§ 12. Si b ubivis in L ipsius $\widetilde{am}$ fuerit, et $bn \parallel \widetilde{am}$ (§. 11); tum L ipsius $\widetilde{am}$ et L ipsius $\widetilde{bn}$ coincidunt. Nam dicatur L ipsius $\widetilde{bn}$ distinctionis ergo l ; sitque c ubivis in l , et $cp \parallel \widetilde{bn}$ (§. 11.); erit (cum et $bn \parallel \widetilde{am}$ sit) $cp \parallel \widetilde{am}$ (§. 10.), adeoque c etiam in L cadet. Et si c ubivis in L sit, et $cp \parallel \widetilde{am}$; tum $cp \parallel \widetilde{bn}$ (§. 10.); caditque c etiam in l (§. 11). Itaque L et l sunt eadem; hac quaevis $\widetilde{bn}$ est etiam axis ipsius L , et inter omnes axes ipsius L , $\widetilde{bn}$ est. Idem de F eodem modo patet.

§. 13. (Fig. 8). Si $bn \parallel am$, $cp \parallel dq$, et $bam + abn = 2R$ sit; tum etiam $dcp + cdq = 2R$. Sit enim $ea = eb$ et $efm = dcp$ (§. 4.); erit (cum $bam + abn = 2R = abn + abg$ sit) $ebg = eaf$; adeoque si etiam $bg = af$ sit, $\triangle ebg \equiv \triangle eaf$, $beg = aef$, cadetque g in fe . Est porro $gfm + fgn = 2R$ (quia $egb = efa$). Est etiam $gn \parallel fm$ (§. 6.); itaque si $mfrs \equiv pcdq$, tum $rs \parallel gn$ (§. 7.), et r in vel extra fg cadit (si cd non $= fg$, ubi res jam patet).

I. In casu primo est frs non $> (2R - rfm = fgn)$, quia $rs \parallel fm$; ast cum $rs \parallel gn$ sit, est etiam frs non $< fgn$; adeoque $frs = fgn$, et $rfm + frs = gfm + fgn = 2R$. Itaque et $dcp + cdq = 2R$.

II. Si r extra fg cadat; tunc $ngr = mfr$, sitque $mfgn \equiv ng hl \equiv lhko$ et ita porro, usquequo $fk =$ vel prima vice $> fr$ fiat. Est heic $ko \parallel hl \parallel fm$ (§. 7.). Si fk in r cadat; tum ko in rs cadit (§. 1.); adeoque $rfm + frs = kfm + fko = kfm + fgn = 2R$; si vero r in hk cadat, tum (per I.) est $rhl + krs = 2R = rfm + frs = dcp + cdq$.

§ 14. Si $bn \parallel am$, $cp \parallel dq$, et $bam + abn < 2R$ sit; tum etiam $dcp + cdq < 2R$. Si enim $dcp + cdq$ non esset $<$, adeoque (per §. 1.) esset $= 2R$; tum (per §. 13.) etiam $bam + abn = 2R$ esset (contra hyp).

§ 15. Perpensis §§. 13. et 14. *Systema Geometriae, hypotesi veritatis Axiomatis Euclidei XI. insistentis dicatur Σ ; et hypotesi contrariae super-*

structum sit S. Omnia, quae expresse non dicentur, in Σ vel in S esse; absolute enuntiari, i. e. illa, sive Σ sive S reipsa sit, vera asseri intelligatur.

§ 16. (Fig. 5). Si *am* sit axis alicujus *L*; tum *L* in Σ recta $\perp am$ est. Nam sit e quovis puncto *b* ipsius *L* axis *bn*; erit in Σ $bam + abn = 2bam = 2R$, adeoque $bam = R$. Et si *c* quodvis punctum in $\widetilde{ab}$ sit, atque $cp \parallel am$; est (per §. 13.) $cp = am$, adeoque *c* in *L* (§. 11.)

In *S* vero nulla 3 puncta *a, b, c* ipsius *L* vel *F* in recta sunt. Nam aliquis axium *am, bn, cp* (ex.gr. *am*) intra duos reliquos cadit; et tunc (per §. 14.) tam *bam* quam *cam* $< R$.

§ 17. *L* est etiam in *S* linea, et *F* superficies. Nam (per §. 11.) quodvis planum ad axem *am* (per punctum aliquod ipsius *F*) $\perp re$, secat ipsum *F* in peripheria circuli, cuius planum (per §. 14.) ad nullum alium axem $\widetilde{bn} \perp re$ est. Revolvatur *F* circa *bn*; manebit (per §. 12.) quodvis punctum ipsius *F* in *F*, et sectio ipsius *F* cum plano ad $\widetilde{bn}$ non $\perp ri$, describet superficiem: atqui *F* (per §. 12), quaecunque puncta *a, b* fuerint in eo, ita sibi congruere poterit, ut *a* in *b* cadat; est igitur *F* superficies uniformis. Patet hinc (per §. 11. et 12) *L* esse lineam uniformem.

§ 18. (Fig. 7). Cujusvis plani, per punctum *a* ipsius *F* ad axem *am* oblique positi, sectio cum *F* in *S* peripheria circuli est. Nam sint *a, b, c*, 3 puncta hujus sectionis, et *bn, cp* axes; facient *ambn, amcp* $\triangle lum$; nam secus planum (ex §. 16.) per *a, b, c* determinatum ipsam *am* complecteretur (contra hyp). Plana igitur, rectas *ab, ac* $\perp riter$ bissecantia se mutuo secant (§. 10.) in aliquo axe $\widetilde{fs}$ (ipsius *F*), atque $fb = fa = fc$. Sit *ah* $\perp fs$, et revolvatur *fah* circa *fs*; describet *a* peripheriam radii *ha*, per *b* et *c* euntem, et simul in *F* et $\widetilde{abc}$ sitam

nec F et $\widetilde{abc}$ praeter $\odot ha$ quidquam commune habent (§. 16.). Patet etiam portione fa lineae L (tanquam radio) in F circa f mota ipsam $\odot hk$ describi.

§ 19. (Fig. 5). $\angle ris$ bt ad axem bn ipsius L (in planum ipsius L cadens) est in S tangens ipsius L . Nam L in $\widetilde{bt}$ praeter b nullo puncto gaudet (§. 14.), si vero bq in tbn cadat, tum centrum sectionis plani per bq ad tbn $\angle ris$ cum F ipsius $\widetilde{bn}$ (§. 18.) manifesto in $\widetilde{bq}$ locatur, et si bc diameter sit, patet $\widetilde{bq}$ lineam L ipsius $\widetilde{bn}$ in c secare.

§. 20. Per quaevis 2 puncta in F linea L determinatur (§. 11. et 18); atque (cum ex §§. 16. et 19. L ad omnes suos axes sit) quivis $\angle L$ lineus in F , $\angle lo$ planorum ad F per crura $\angle rium$, = est.

§ 21. (Fig. 6). Duae lineae L formes $\widetilde{ap}$, $\widetilde{bd}$ in eodem F , cum tertia L formi $\widetilde{ab}$ summam interiorum $< 2R$ efficientes, se mutuo secant (per $\widetilde{ap}$ in F intelligendo L per a, p ductum, per $\widetilde{ap}$ vero dimidium illud eius ex a incipiens, in quod p cadit). Nam si am , bn axes ipsius F sint; tum $\widetilde{amp}$, $\widetilde{bnd}$ secant se invicem (§. 9.); atque F secat eorundem sectionem (per §§. 7. et 11.); adeoque et $\widetilde{ap}$, $\widetilde{bd}$ se mutuo secant.

Patet exhinc Axioma XI. et omnia, quae in Geometria Trigonometriaque (plana) asseruntur, absolute constare in F , rectarum vices lineis L subeuntibus: idcirco functiones trigonometricae abhinc eodem sensu accipientur, quo in Σ veniunt; et peripheria circuli, cuius radius L formis $= r$ in F , est $= 2\pi r$, et pariter $\odot r$ (in F) $= \pi r^2$ (per π intelligendo $\frac{1}{2} \odot 1$ in F , sive notum 3,1415926 . . .)

§ 22. (Fig. 9. Si $\widetilde{ab}$ fuerit L ipsius $\widetilde{am}$, et c in $\widetilde{am}$; atque $\angle cab$ (e recta $\widetilde{am}$ et L formi linea

B.

$\widetilde{ab}$ compositus) feratur prius juxta $\widetilde{ab}$, tum juxta $\widetilde{ba}$ semper porro in infinitum: erit via $\widetilde{cd}$ ipsius c linea L ipsius cm . Nam (posteriori l dicta) sit punctum quodvis d in $\widetilde{cd}$, $dn \parallel cm$, et b punctum ipsius L in $\widetilde{dn}$ cadens; erit $bn \triangleq am$, et $ac = bd$, adeoque $dn \triangleq cm$, consequ. d in l . Si vero d in l et $dn \parallel cm$, atque b punctum ipsius L ipsi $\widetilde{dn}$ commune sit; erit $am \triangleq bn$ et $cm \triangleq dn$, unde manifesto $bd = ac$, cadetque d in viam puncti c , et sunt l et $\widetilde{cd}$ eadem. Designetur tale l per $l \parallel L$.

§. 23. (Fig. 9) Si linea L formis $\widetilde{cdf} \parallel \widetilde{abe}$ (§. 22.), et $\widetilde{ab} = \widetilde{be}$, atque $\widetilde{am}, \widetilde{bn}, \widetilde{ep}$ sint axes; erit manifesto $\widetilde{cd} = \widetilde{df}$; et si quaelibet 3 puncta a, b, e fuerint ipsius $\widetilde{ab}$, ac $\widetilde{al} = n. \widetilde{cd}$. erit quoque $\widetilde{ae} = n. \widetilde{cf}$; adeoque (manifesto etiam pro $\widetilde{ab}, \widetilde{ae}, \widetilde{dc}$ incommensurabilibus) $\widetilde{ab} : \widetilde{cd} = \widetilde{ae} : \widetilde{cf}$, estque $\widetilde{ab} : \widetilde{cd}$ ab $\widetilde{ab}$ *independens*, et per $\widetilde{ac}$ prorsus determinatum. Denotetur quotus iste, nempe $\widetilde{ab} : \widetilde{cd}$ litera majori eiusdem nominis (puta per X), quo $\widetilde{ac}$ litera minuscula (ex.gr. x) insignitur.

24. Quaecunque x et y fuerint; est $X = Y^{\frac{y}{x}}$ (§. 23) Nam aut erit alterum (ipsorum x, y) multipulum alterius (ex.gr. y ipsius x), aut non.

Si $y = nx$; sit $x = ac = cg = gh$ & usque quo $ah = y$ fiat; sit porro $cd \parallel gk \parallel hl$; erit (§. 23.) $X = \widetilde{ab} : \widetilde{cd} = \widetilde{cd} : \widetilde{gk} = \widetilde{gk} : \widetilde{hl}$; adeoque $\frac{\widetilde{ab}}{\widetilde{hl}} = \left(\frac{\widetilde{ab}}{\widetilde{cd}}\right)^n$, sive $Y =$

$X^n = X^{\frac{y}{x}}$. Si x, y multipla ipsius i sint, puta $x = mi$, et $y = ni$; est (per praec.) $X = I^m$, $Y = I^n$,

consequ. $Y = X^{\frac{n}{m}} = X^{\frac{y}{x}}$. Idem ad casum incommensurabilitatis ipsorum x, y facile extenditur. Si vero fuerit $q = y - x$; erit manifesto $Q = Y : X$.

Nec non manifestum est, in Σ pro quovis x es-

se $X=1$, in S vero $X > 1$ esse, atque pro quibusvis ab , abe dari tale $cdf \parallel abe$, ut sit $cdf = ab$, unde $ambn \equiv amep$ erit, etsi hoc illius qualevis multipulum sit; quod singulare quidem est, sed absurditatem ipsius S evidenter non probat.

§.25. (Fig.10) *In quovis rectilineo Δlo sunt peripheriae radiorum lateribus aequalium, uti sinus Λ lorum oppositorum.*

Sit enim $abc = R$, et $am \perp bac$, atque sint bn , $cp \parallel am$; erit $cab \perp ambn$, adeoque (cum $cb \perp ba$ sit) $cb \perp ambn$, consequ. $cpbn \perp ambn$. Secet F ipsius cp , rectas bn , am (respective) in d , e , et fascias $cpbn$, $cpam$, $bnam$ in lineis L formibus cd , ce , de ; crit (§.20.) $cde = \Lambda lo$ ipsorum ndc , nde , adeoque $= R$; atque pari ratione est $ced = cab$. Est autem (per §.21.) in L lineo Δced (heic radio semper $= 1$ posito) $ec : dc = 1 : \sin dec = 1 : \sin cab$. Est quoque (per §.21.) $ec : dc = \odot ec : \odot dc$ (in F) $= \odot ac : \odot bc$ (§.18.); adeoque est etiam $\odot ac : \odot bc = 1 : \sin cab$; unde assertum pro quovis Δlo liquet.

§.26. *In quovis sphaerico Δlo sunt sinus laterum, uti sinus Λ lorum iisdem oppositorum.*

Fig.11. Nam sit $abc = R$, et $ced \perp ad$ sphaerae radium oa ; erit $ced \perp aob$, et (cum etiam $boc \perp boa$ sit) $cd \perp ob$. In $\Delta \Delta ceo$, cdo vero est (per §.25.) $\odot ec : \odot oc : \odot dc = \sin coe : 1 : \sin cod = \sin ac : 1 : \sin bc$; interim (§.25.) etiam $\odot ec : \odot dc = \sin cde : \sin ced$; Itaque $\sin ac : \sin bc = \sin cde : \sin ced$; est vero $cde = R = cba$, atque $ced = cab$. Consequenter $\sin ac : \sin bc = 1 : \sin a$. *E quo promanans Trigonometria sphaerica, ab Axiomate XI independenter stabilita est*

§.27. (Fig.12.) Si ac , bd sint $\perp ab$, et feratur cab juxta ab ; erit (via puncti c dicta heic cd) : $ab = \sin u : \sin v$. Nam sit $de \perp ca$; est in $\Delta \Delta ade$, adb (per §25.) $\odot ed : \odot ad : \odot ab = \sin u : 1 : \sin v$. Revoluto $bacd$ circa ac , describetur $\odot ab$ per b , $\odot d$ per d ; et via dictae cd denotetur heic per $\odot de$.

Sit porro polygonum quodvis $bfg \dots$ ipsi $\odot ab$ inscriptum; nascetur per plana ex omnibus lateribus $bf, fg \&$, ad $\odot ab$ $\perp$ ria, in $\odot cd$ quoque figura polygonalis totidem laterum; et demonstrari ad instar §. 23 potest, esse $cd : ab = dh : bf = hk : fg \&$, adeoque $dh + hk \& : bf + fg \& = cd : ab$. Quovis laterum $bf, fg \dots$ ad limitem o tendente, manifesto $bf + fg \dots \rightsquigarrow \odot ab$, et $dh + hk \dots \rightsquigarrow \odot cd$. Itaque etiam $\odot ed : \odot ab = cd : ab$. Erat vero $\odot ed : \odot ab = \sin u : \sin v$. Conseq. $cd : ab = \sin u : \sin v$.

Remoto ac a bd in infinitum, manet $cd : ab$, adeoque etiam $\sin u : \sin v$ constans; u vero $\rightsquigarrow R$ (§. 1.), et si $dm \parallel bn$ sit, $v \rightsquigarrow z$; unde fit $cd : ab = 1 : \sin z$. Via dicta cd denotabitur per $cd \parallel ab$.

§. 28. (Fig. 13.) Si $bn \parallel am$, et c in $\widetilde{am}$, atque $ac = x$ sit: erit X (§. 23.) $= \sin u : \sin v$. Nam si cd et ae sint $\perp bn$, et $bf \perp am$; erit (ad instar §. 27.) $\odot bf : \odot cd = \sin u : \sin v$. Est autem evidenter $bf = ae$; quamobrem $\odot ea : \odot dc = \sin u : \sin v$. In superficiebus vero L formibus ipsorum am et cm (ipsum $ambn$ in ab et cg secantibus) est (per §. 21.) $\odot ea : \odot dc = ab : cg = X$. Est itaque etiam $X = \sin u : \sin v$.

§. 29. (Fig. 14.) Si $bam = R$, $ab = y$, et $bn \parallel am$ sit; erit in S , $Y = \cot \frac{1}{2} u$. Nam si fuerit $ab = ac$, et $cp \parallel am$ (adeoque $bn \parallel cp$), atque $pcd = qcd$; datur (§. 19.) $ds \perp cd$, ut $ds \parallel cp$, adeoque (§. 1.) $dt \parallel cq$ sit. Si porro $be \perp ds$; erit (§. 7.) $ds \parallel bn$, adeoque (§. 6.) $bn \parallel es$, et (cum $dt \parallel cq$ sit) $bq \parallel et$; consequ. (§. 1.) $ebn = ebq$. Repraesententur, bcf ex L ipsius bn , et fg, dh, ck et el ex L formibus lineis ipsorum ft, dt, cq et et ; erit evidenter (§. 22.) $hg = df = dk = hc$; itaque $cg = 2ch = 2v$. Pariter patet, $bg = 2bl = 2z$ esse. Est vero $bc = bg - cg$; quapropter $y = z - v$, adeoque (§. 24.) $Y = Z : V$. Est de-

mum (§. 28.) $Z = 1 : \sin \frac{1}{2} u$, et $V = 1 : \sin (R -$

$$Y = \cot \frac{1}{2} u.$$

§. 30. (Fig.15.) Verumtamen facile (ex §. 25) patet, resolutionem problematis *Trigonometriae planae* in S , peripheriae per radium expressae indigere; hoc vero rectificatione ipsius L obtineri potest. Sint $ab, cm, c'm' \perp \tilde{ac}$, atque b ubivis in $\tilde{ab}$; erit (§.25.) $\sin u : \sin v := \odot p : \odot y$, et $\sin u' : \sin v' := \odot p : \odot y'$; adeoque $\frac{\sin u}{\sin v} \cdot \odot y = \frac{\sin u'}{\cos v'} \cdot \odot y'$. Est vero (per § 27) $\sin v : \sin v' = \cos u : \cos u'$;

conseq. $\frac{\sin u}{\cos u} \odot y = \frac{\sin u'}{\cos u'} \odot y'$; seu $\odot y : \odot y' = \tan u' : \tan u = \tan w : \tan w'$. Sint porro $cn, c'n' \parallel ab$, et $cd, c'd'$ lineae L formes ad $\tilde{ab} \perp res$; erit (§.21.) etiam $\odot y : \odot y' = r : r'$, adeoque $r : r' = \tan w : \tan w'$. Crescat iam p ab a incipiendo in infinitum; tum $w \rightsquigarrow z$, et $w' \rightsquigarrow z'$; quapropter etiam $r : r' = \tan z : \tan z'$. *Constans* $r : \tan z$ (ab r *independens*) dicatur i ; dum $y \rightsquigarrow o$, est $(\frac{r}{y} = \frac{i \tan z}{y}) \rightsquigarrow 1$, adeoque $\frac{y}{\tan z} \rightsquigarrow i$. Ex §. 29 fit $\tan z = \frac{1}{2} (Y - Y^{-1})$; itaque $\frac{2y}{Y - Y^{-1}} \rightsquigarrow i$,

seu (§.24.) $\frac{2y I^{\frac{y}{i}}}{I^{\frac{y}{i}} - 1} \rightsquigarrow i$.

Notum autem est, expressionis istius (dum $y \rightsquigarrow o$) limitem esse $\frac{i}{\log \text{nat } I}$; est ergo $\frac{i}{\log \text{nat } I} = i$, et $I = e = 2, 7182818 \dots$, quae quantitas insignis hic quoque elucet. Si nempe abhinc i illam rectam denotet, cuius $I = e$ sit, erit $r = i \tan z$. Erat autem (§.21.) $\odot y = 2\pi r$; est igitur $\odot y = 2\pi i \tan z = \pi i (Y - Y^{-1}) = \pi i (e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}) = \frac{\pi y}{\log \text{nat } Y}$ ($Y - Y^{-1}$) (per §.24.)

§. 31. (Fig.16.) Ad resolutionem omnium Δ lorum rectangulorum rectilineorum trigonometricam (e qua omnium Δ lorum resolutio in promptu est) in S ,

3 aequationes sufficiunt: nempe (a, b cathetos, c hypotenusam, et α, β $\angle$ os cathetis oppositos denotantibus) aequatio relationem exprimens 1^{mo} inter a, b, c ; 2^{do} inter a, α, β ; 3^{tio} inter a, b, c ; nimirum ex his reliquae 3 per eliminationem prodeunt.

I. Ex §.25. et 30. est $1 : \sin \alpha = (C - C^{-1}) : (A - A^{-1}) = (e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}}) : (e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}})$ (aequatio pro α, c, a).

II. Ex §.27. sequitur (si $\beta m \parallel \gamma n$ sit) $\cos, \alpha : \sin \beta = 1 : \sin u$; ex §. 29 autem fit $1 : \sin u = \frac{1}{2} (A + A^{-1})$; itaque $\cos \alpha : \sin \beta = \frac{1}{2} (A + A^{-1}) = \frac{1}{2}$

$(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}})$ (aequatio pro α, β, a).

III. Si $\alpha\alpha' \perp \beta\alpha\gamma$, atque $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma'$ fuerint $\parallel \alpha\alpha'$, (§.27), atque $\beta'\alpha'\gamma' \perp \alpha\alpha'$; erit manifesto (uti in

(§. 27) $\frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} = \frac{1}{\sin u} = \frac{1}{2} (A + A^{-1})$; $\frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2} (B + B^{-1})$, ac $\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2} (C + C^{-1})$; consequ. $\frac{1}{2} (C +$

$C^{-1}) = \frac{1}{2} (A + A^{-1}) \cdot \frac{1}{2} (B + B^{-1})$, sive $(e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}}) = \frac{1}{2} (e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}) (e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}})$ (aequatio pro a, b, c).

§.32. Si $\gamma\alpha\delta = R$, et $\beta\delta \perp a\delta$ sit; erit $\odot c : \odot a = 1 : \sin \alpha$, et $\odot c : \odot (d = \beta\delta) = 1 : \cos \alpha$, adeoque ($\odot x^2$ pro quovis x factum $\odot x$. $\odot x$ denotante) manifesto $\odot a^2 + \odot d^2 = \odot c^2$. Est vero (per §.27. et II.)

$\odot d = \odot b \cdot \frac{1}{2} (A + A^{-1})$, consequ. $(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}})^2 =$

$\frac{1}{4} [e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}] \cdot [e^{\frac{b}{i}} - e^{-\frac{b}{i}}] + [e^{-\frac{a}{i}} - e^{\frac{a}{i}}]^2$,

alia aequatio pro a, b, c , (cuius membrum 2^{dum}

facile ad formam *symmetricam* seu *invariabilem* reducitur.) Denique ex $\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{2}(A+A^{-1})$, atque $\frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \frac{1}{2}(B+B^{-1})$, fit (per III.) $\cot \alpha \cdot \cot \beta = \frac{1}{2} (e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}})$ (aequatio pro α, β, c).

§. 32. Restat adhuc modum *problemata* in S resolvendi breviter ostendere, quo (per exempla magis obvia) peracto, demum quid theoria haecce praestet, candide dicetur.

I. (Fig. 17.) Sit $\widetilde{ab}$ linea in plano, et $y=f(x)$ aequatio eius (pro coordinatis $\text{—}ribus$), et quodvis incrementum ipsius x dicatur dx , atque incrementa ipsorum x, y , et areae u , eidem dx respondentia, respective per dx, dy, du denotentur; sitque $bh \parallel cf$, et exprimatur (ex §. 31.) $\frac{bh}{dx}$ per y , ac quaeratur ipsius $\frac{dy}{dx}$ limes tendente dx ad litem 0 , (quod ubi eiusmodi limes quaeritur, subintelligatur): innotescet exinde etiam limes ipsius $\frac{dy}{bh}$, adeoque tang hba ; eritque (cum hbc manifesto nec $>$ nec $<$ adeoque $=R$ sit), *tangens* in b ipsius bg per y determinata.

II. Demonstrari potest, esse $\frac{dz^2}{dy^2+bh^2} \sim 1$; Hinc limes ipsius $\frac{dz}{dx}$, et inde x integration (per x expressum) reperitur. Et potest lineae cuiusvis *in concreto datae* aequatio in S inveniri, e. g. ipsius L . Si enim $\widetilde{am}$ axis ipsius L sit; tum quaevis $\widetilde{cb}$ ex $\widetilde{am}$ secat L (cum (per §. 19.) quaevis recta ex a praeter am ipsum L secet); est vero (si bn axis sit), $X=1:\sin cbn$ (§. 28.), atque $Y=\cot \frac{1}{2}cbn$, (§. 29) unde fit $Y=X\sqrt{X^2-1}$, seu $e^{\frac{y}{i}}=e^{\frac{x}{i}}+$

$\sqrt{(e^{\frac{2x}{i}} - 1)}$ aequatio quaesita. Erit hinc $\frac{dy}{dx} \sim$
 $X(X^2 - 1)^{\frac{-1}{2}}$; atqui $\frac{bh}{dx} = 1 : \sin cbn = X$; adeo-
 que $\frac{dy}{bh} \sim (X^2 - 1)^{\frac{-1}{2}}$; $1 + \frac{dy^2}{bh^2} \sim X^2 (X^2 - 1)^{-1}$, $\frac{dz^2}{bh^2} \sim X^2 (X^2 - 1)^{-1}$, atque $\frac{dz}{dz} \sim$
 $X(X^2 - 1)^{-1}$, $\frac{dz^2}{bh^2} \sim X^2 (X^2 - 1)^{-1}$, atque $\frac{dz}{dx} \sim$
 $X^2 (X^2 - 1)^{\frac{-1}{2}}$; unde per integrationem
 invenitur $z = i (X^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = i \cot cbn$ (uti §. 30.):

III. Manifesto $\frac{du}{d} \sim \frac{hfcbh}{dx}$, quod (nonni-
 si ab y dependens) iam primum per y exprimen-
 dum est; unde u integrando prodit.

Si (Fig. 12.) $ab = p$, $ac = q$, et $cd = r$, atque $cabdc = s$ sit; poterit (uti in II.) ostendi, esse $\frac{ds}{dg} \sim r$,

quod $= \frac{1}{2} p (e^{\frac{q}{i}} + e^{\frac{-q}{i}})$ atque integrando $s =$

$\frac{1}{2} pi (e^{\frac{q}{i}} - e^{\frac{-q}{i}})$. Potest hoc absque integratione
 quoque deduci. Aequatione e. g, circuli (ex §. 31,
 III), rectae (ex § 31, II), sectionis conici (per praec)
 expressis; poterunt areae quoque his lineis clau-
 sae exprimi.

Palam est, superficiem t ad figuram planam p
 (in distantia q) *llam*, esse ad p in ratione poten-
 tiarum *2darum* linearum homologarum, sive uti

$\frac{1}{4} (e^{\frac{q}{i}} + e^{\frac{-q}{i}}) : 1$. Porro computum soliditatis pa-
 ri modo tractatum, facile patet duas integrationes
 requirere, (cum et differentiale ipsum hic nonni-
 si per integrationem determinetur); et ante o-

omnia solidum a p et t ac complexu omnium re-
ctarum ad p Lrimum fines ipsorum p, t connectenti-
um, clausum quaerendum esse. Reperitur solidum
istud (tam per integrationem quam sine ea) $= \frac{1}{8}$

$\pi i \left[e^{\frac{2q}{i}} - e^{\frac{-2q}{i}} \right] + \frac{1}{2}pq$. Superficies quoque cor-

porum in S determinari possunt, nec non *curva-*
turae, evolutae, evolventesque linearum qualium-
vis $\mathfrak{C}$. Quod curvaturam attinet; ea in S aut
ipsius L est, aut per radium circuli, aut *distan-*
tiam curvae ad rectam $llae$ ab hac recta, determi-
natur; cum e praecedentibus facile ostendi possit,
praeter L , lineas circulares, ac rectae $llas$, nullas
in plano alias lineas uniformes dari.

IV. Pro circulo est (uti in III.) $\frac{d(\odot x)}{dx} \sim \odot x$,

unde (per §.29.) integrando fit $\odot x = \pi i^2 \left[e^{\frac{x}{i}} - 2 + e^{\frac{-x}{i}} \right]$.

V. Pro area $cabdc = u$ (Fig.9.) (linea L formi $ab = r$, huic $llae$ $cd = y$, ac rectis $ac, bd = x$ clausa)

est $\frac{du}{dx} \sim y$; atque (§.24.) $y = re^{\frac{-x}{i}}$; adeoque

(integrando) $u = ri \left(1 - e^{\frac{-x}{i}} \right)$. Crescente x in in-

finitum, fiet in S , $e^{\frac{-x}{i}} \sim 0$, adeoque $u \sim ri$.
Per *quantitatem* ipsius $mabn$, in posterum li-
mes iste intelligetur. Simili modo invenitur, quod
si p sit figura in F ; spatium a p et complexu a-
xium e terminis ipsius p ductorum clausum $= \frac{1}{2}$
 πi sit.

VI. Si angulus ad centrum segmenti (Fig. 10)
sphaerae sit $2u$, peripheria circuli maximi sit p , et
arcus fc ($\wedge$ li u) $= x$; erit $1 : \sin u = p : \odot bc$ (§.25),

et hinc $\odot bc = p \sin u$. Interim est $x = \frac{pu}{2\pi}$, ac $dx = \frac{pdu}{2\pi}$. Est porro $\frac{dz}{dx} \sim \odot bc$, et hinc $\frac{dz}{du} \sim \frac{p^2}{2\pi} \sin u$, unde (integrando) $z = \frac{\sin v u}{2\pi} p^2$. Cogitur F in quod p (per meditullium f segmenti transiens) cadit; planis $\widetilde{fem}$, $\widetilde{cem}$ per af , ac ad F $\perp$ riter positis, ipsumque in feg , ce secantibus; et considerentur L formis cd (ex c ad feg $\perp$ ris) nec non L formis cf ; erit $cef = u$ (§.20.), et (§.21.) $\frac{fd}{p} = \frac{\sin v u}{2\pi}$, adeoque $z = fd.p$. Ast (§.21.) $p = \pi.fdg$; itaque $z = \pi.fd.fdg$. Est autem (§.21.) $fd.fdg = fc.fc$; consequ $z = \pi.fc.fc = \odot fc$ in F . Sit iam (Fig.14.) $b_j = ej = r$; erit (§.29.) $2r = i(Y - Y^{-1})$, adeoque (§.21.) $\odot 2r$ (in F) $= \pi i^2 (Y - Y^{-1})^2$. Est quoque (IV) $\odot 2y = \pi i^2 (Y^2 - 2 + Y^{-2})$; igitur $\odot 2r$ (in F) $= \odot 2y$, adeoque et $z = \odot 2y$, sive superficies z segmenti sphaerici aequatur circulo, chorda fc tanquam radio descripto. Hinc tota sphaerae superficies $= \odot fg = fdg.p = \frac{p^2}{\pi}$, suntque superficies sphaerarum, uti 2dae potentiae peripheriarum earundem maximarum.

VII. Soliditas sphaerae radii x in S reperitur simili modo $= \frac{1}{2} \pi i^3 (X^2 - X^{-2}) - 2\pi i^2 x$; superficies per revolutionem lineae cd (Fig.12.) circa ab orta $= \frac{1}{2} \pi i p (Q^2 - Q^{-2})$, et corpus per $cabdc$ descriptum $= \frac{1}{2} \pi i^2 p (Q^2 + Q^{-2})$. Quomodo vero omnia a' (IV.) hucusque tractata, etiam absque integratione perfici possint brevitatis studio supprimitur.

Demonstrari potest, omnis expressionis literam i continentis (adeoque hypothesi, quod detur i ,

innixae) *limitem*, *crescente i in infinitum*, *exprimere quantitatem plane pro Σ* (adeoque pro hypothesi nullius *i*), *siquidem non eveniant aequationes identicae*. Cave vero intelligas putari, *systema ipsum variari posse* (quod omnino *in se et per se determinatum* est) sed tantum *hypothesin*, quod *successive* fieri potest, donec non ad absurdum perducti fuerimus. Posito igitur, quod in *tali* expressione *litera i* pro casu, si *S* esset re ipsa, *illam* quantitatem unicam designet, cuius $I=2$ sit; si vero *revera Σ* fuerit, *limes dictus* loco expressionis accipi cogitetur: manifesto *omnes* expressiones ex *hypothesi realitatis* ipsius *S* oriundae (hoc sensu) *absolute valent*, etsi prorsus *ignotum sit, num Σ sit, aut non sit*.

Ita e. g. ex expressione in §. 29. obtenta facile (et quidem *tam* differentiationis auxilio, quam *absque* eo) valor notus pro Σ prodit $\odot x = 2\pi x$; ex I. (§. 31.) rite tractato, sequitur $1 : \sin \alpha = c : a$; ex II. vero $\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = 1$, adeoque $\alpha + \beta = R$; aequatio *prima* in III. fit *indentica*, adeoque *valet* pro Σ , quamvis nihil in eo *determinet*; ex *secunda* autem fluit $c^2 = a^2 + b^2$. *Aequationes notae fundamentales trigonometriae planae* in Σ . Porro *inveniuntur* (ex §. 32.) pro Σ *area* et *corpus* in IV, utrumque $= \frac{2}{3} pq$; ex IV. $\odot x = \pi x^2$; (ex VII) *sphaera* radii $x = \frac{4}{3} \pi x^3$ &c. Sunt quoque *theoremata* ad finem (VI) *enuntiata* manifesto *inconditionate vera*.

§. 33. Superest adhuc quid *theoria* ista sibi velit, (in §. 32 *promissum*) exponere.

I. Num Σ aut *S* aliquod *re ipsa* sit, *indecisum* manet.

II. Omnia ex *hypothesi falsitatis* Ax. XI. deducta (semper *sensu* §. 32. intelligendo) *absolute valent*, adeoque *hoc sensu nulli hypothesi inniuntur*. Habetur idcirco *trigonometria plana a priori* in qua *solum systema ipsum ignotum* adeo-

que solummodo *absolutae* magnitudines expresionum incognitae manent, per *unicum* vero casum notum, manifesto totum systema figeretur. Trigonometria sphaerica autem in §. 26. absolute stabilitur (Habeturque Geometria, Geometriae planae in Σ prorsus analoga in E).

III. Si *constaret*, Σ esse, nihil hoc respectu amplius incognitum esset; si vero *constaret non esse* Σ , tunc (§. 31.) (e.g.) e lateribus x, y et Λ lo rectilineo ab iis intercepto, in *concreto datis* manifesto in se et per se impossibile esset Δ lum absolute resolvere (i, e.) a priori determinare Λ los ceteros et *rationem lateris tertii* ad duo data; nisi X, Y determinentur, ad quod in *concreto* habere aliquod a oporteret, cuius A notum esset; atque tum *i unitas naturalis longitudinum* esset, (sicuti e est basis logarithmorum naturalium). Si existentia hujus i constiterit; quomodo ad usum saltem quam exactissime construi possit, ostendetur.

IV. Sensu in I et II exposito patet, omnia in spatio methodo recentiorum Analytica (intra justos fines valde laudanda) absolvi posse.

V. Denique lectoribus benevolis haud ingratum futurum est; pro casu illo quodsi non Σ sed S re ipsa esset, circulo aequale rectilineum construi.

§. 34. (Fig.12.) Ex d ducitur $dm \parallel an$ modo sequenti. Fiat ex d , $db \perp an$; erigatur e puncto quovis aliquo a rectae $\widetilde{ab}, ac \perp an$ (in dba), et demittatur $de \perp ac$; erit $\odot ed : \odot ab = 1 : \sin z$ (§. 27) siquidem fuerit $dm \parallel bn$. Est vero $\sin z$ non > 1 , adeoque ab non $> de$. Descriptus igitur quadrans radio ipsi de aequali, ex a in bac , gaudebit puncto aliquo b vel o cum $\widetilde{bd}$ communi. Priori in casu manifesto $z = R$; in posteriori vero erit (§.25) $(\odot ao = \odot ed) : \odot ab = 1 : \sin aob$, adeoque $z = aob$. Si itaque fiat $z = aob$; erit $dm \parallel bn$.

§. 35. (Fig. 18.) Si fuerit S reipsa; ducetur recta ad $\wedge$ li acuti crux unum. $\perp$ ris, quae ad alterum $\parallel$ sit, hoc modo. Sit $am \perp bc$, et accipiatur $ab = ec$ tam parvum (per §. 19.), ut si ducatur $bn \parallel am$ (§. 34.), sit $abn > \wedge$ lo dato. Ducatur porro $cp \parallel am$ (§. 34.), fiantque nbq , pcd utrumque $= \wedge$ lo dato; et bq , cd se mutuo secabunt. Secet enim bq (quod per constr. in nbc cadit) ipsam cp in e ; erit (propter $bn = cp$) $ebc < ecb$, adeoque $ec < eb$. Sint $ef = ec$, $efr = ecd$, et $fs \parallel ep$; cadet fs in bfr . Nam cum $bn \parallel cp$, adeoque $bn \parallel ep$, atque $bn \parallel fs$ sit; erit (§. 14.) $fbn + bfs < (2R = fbn + bfr)$; itaque $bfs < bfr$. Quamobrem fr secat ep , adeoque cd quoque ipsam eq in puncto aliquo d . Sit iam $dg = dc$, atque $dgt = dcp = gbn$; erit (cum $cd = gd$ sit) $bn = gt = cp$. Si fuerit lineae L formis ipsius bn , punctum in bq cadens k (§. 19.), et axis kl ; erit $bn = kl$, adeoque $bkl = bgt = dcp$; sed etiam $kl = cp$: cadit ergo k manifesto in g , estque $gt \parallel bn$. Si vero ho ipsum bg $\perp$ riter bissecet; erit $ho \parallel bn$ constructum.

§. 36. (Fig. 10.) Si fuerint data recta cp et planum mab , atque fiat $cb \perp mab$, bn (in bcp) $\perp bc$, et $cq \parallel bn$ (§. 34.); sectio ipsius cp (si haec in bcq cadat) cum bn (in cbn), adeoque cum mab reperitur. Et si fuerint data duo plana pcq , mab , et sit $cb \perp mab$, $cr \perp pcq$, atque (in bcr) $bn \perp bc$, $cs \perp cr$; cadent bn in mab , et cs in pcq ; et sectione ipsarum bn , cs (si detur) reperta, erit $\perp$ ris in pcq per eandem ad cs ducta, manifesto sesectio ipsorum mab , pcq .

§. 37. (Fig. 7.) In $am \parallel bn$ reperitur tale α , ut sit

$am \cong bn$; si (per §. 34.) construat^r extra $n\tilde{b}m$, $gt \parallel bn$, et fiant $bg \perp gt$, $gc = gb$, atque $cp \parallel gt$; ponaturque $tg\tilde{d}$ ita, ut efficiat cum $tg\tilde{b}$ $\wedge$ Ium illi aequalem, quem $pc\tilde{a}$ cum $pc\tilde{b}$ facit; atque quaeratur (per §. 36.) sectio dq ipsorum $tg\tilde{d}$, $n\tilde{b}a$; fiatque $ba \perp dq$. Erit enimvero ob Δ lorum L linearum in F ipsius bn exortorum similitudinem (§.21.) manifesto $db = da$, et $am \cong bn$.

Facile hinc patet (L lineis per *solos terminos* datis) reperiri posse etiam *terminos* proportionis 4tum ac medium, atque omnes constructiones geometricas, quae in Σ in plano fiunt, hoc modo in F absque XI. Axiomate perfici posse. Ita e. g. $4R$ in quotvis partes aequales geometricè dividi potest, si sectionem istam in Σ perficere licet.

§. 38. (Fig.14.) Si construat^r (per §. 37.) e. g. $nbq = \frac{1}{3} R$, et fiat (per §. 35) in S ad $bq \perp$ ris $am \parallel bn$, atque determinetur (per §. 37.) $jm \cong bn$; erit, si $ja = x$ sit, (§. 28.) $X = 1 : \sin \frac{1}{3} R = 2$, atque x geometricè constructum.; Et potest nbq ita computari, ut ja ab i quovis dato minus discrepet, cum nonnisi $\sin nbq = \frac{1}{e}$ esse debeat.

§. 39. (Fig 19.) Si fuerint (in plano) pq et st , $\parallel$ rectae mn (. 27.), et ab, cd sint $\perp$ res ad mn aequales; manifesto est $\triangle dec \cong \triangle bea$, adeoque $\wedge$ li (forsan mixtilinei) ecp , eat congruent, atque $ec = ea$. Si porro $cf = ag$, erit $\triangle acf \cong \triangle cag$, et utrumque quadrilateri $fagc$ dimidium est. Si $fagc$, $hagh$ duo eiusmodi quadrilatera fuerint ad ag , inter pq et st ; aequalitas eorum (uti apud *Euclidem*), nec non Δ lorum agc , agh eidem ag insistentium, verticesque in pq habentium aequalitas patet. Est porro $acf = cag$, $gcq = cga$, atque $acf + acg + gcq = 2R$

(§. 32.), adeoque etiam $cag + acg + cga = 2R$: itaque in quovis eiusmodi Δ^{lo}_{acg} summa 3 $\Lambda^{\text{lo}}_{\text{lorum}} = 2R$. Sive in ag (quae $\parallel mn$) ceciderit autem *recta* ag , sive non; $\Delta^{\text{lo}}_{\text{lorum rectilineorum } agc, agh, tam ipsorum, quam summarum \Lambda^{\text{lo}}_{\text{lorum ipsorumdem, aequalitas in aperto est.}}$

§. 40. (Fig. 20.) *Aequalia $\Delta^{\text{la}}_{abc, abd}$ (abhinc rectilinea) uno latere aequali gaudentia, summas $\Lambda^{\text{lo}}_{\text{lorum aequales habent.}}$ Nam dividat mn bifariam tam ac quam bc , et sit pq (per c) $\parallel mn$; cadet d in $\widetilde{pq}$. Nam si $\widetilde{bd}$ ipsum $\widetilde{mn}$ in puncto e , adeoque (§. 39.) ipsum $\widetilde{pq}$ ad distantiam $ef = eb$ secet; erit $\Delta_{abc} = \Delta_{abf}$, adeoque et $\Delta_{abd} = \Delta_{abf}$, unde d in f cadit: si vero $\widetilde{bd}$ ipsum $\widetilde{mn}$ non secuerit, sit c punctum, ubi $\perp^{\text{ris}}$ rectam ab bissecans ipsum $\widetilde{pq}$ secat, atque $gs = ht$ ita, ut st productam $\widetilde{bd}$ in puncto aliquo k secet (quod fieri posse modo simili patet, ut §. 4.); sint porro $sl = sa$, $lo \parallel st$, atque o sectio ipsorum $\widetilde{bk}$ et $\widetilde{lo}$; esset tum $\Delta_{abl} = \Delta_{abo}$ (§. 39.), adeoque $\Delta_{abc} > \Delta_{abd}$ (contra hyp).*

§. 41. (Fig. 21.) *Aequalia $\Delta_{abc, def}$, aequalibus $\Lambda^{\text{lo}}_{\text{lorum summis gaudent.}}$ Nam secet mn tam ac , quam bc , ita pq tam df quam fe bifariam, et sit $rs \parallel mn$, atque $to \parallel pq$; erit $\perp^{\text{ris}}_{ag}$ ad rs aut $\perp^{\text{ris}}_{dh}$ ad to , aut altera e. g. dh erit maior: in quovis casu $\odot_{df}$ e centro a cum gs punctum aliquod k commune habet, eritque (§. 39.) $\Delta_{abh} = \Delta_{abc} = \Delta_{def}$. Est vero Δ_{akb} (per §. 40.) Δ^{lo}_{dfe} , ac (per §. 39.) Δ^{lo}_{abc} aequiangulum. Sunt igitur etiam $\Delta_{abc, def}$ aequiangula.*

In *S converti* quoque theorema potest. Sint enim $\Delta_{abc, def}$ reciproce aequiangula, atque $\Delta_{bal} = \Delta_{def}$; crit (per praec.) alterum alteri, adeoque etiam Δ_{abc} Δ^{lo}_{abl} aequiangulum, et hinc manifesto $bcl + blc + cbl = 2R$. Atqui (ex §. 31.) cuiusvis

Δ^{li} Λ^{lorum} summa in S , est $< 2R$: cadit igitur Δ in c .

§. 42. (Fig. 22.) Si fuerit complementum summae Λ^{lorum} Δ^{li} abc ad $2R$, u , Δ^{li} def vero v ; est $\Delta abc : \Delta def = u : v$. Nam si quodvis Δ^{lorum} acg , geh , hcb , dfk , kfe sit $= p$, atque $\Delta abc = mp$, $\Delta def = np$; sitque s summa Λ^{lorum} cuiusvis Δ^{li} quod $= p$ est; erit manifesto $2R - u = ms - (m - 1) 2R = 2R - m(2R - s)$, et $u = m(2R - s)$, et pariter $v = n(2R - s)$. Est igitur $\Delta abc : \Delta def = m : n = u : v$. Ad casum incommensurabilitatis Δ^{lorum} abc , def quoque extendi facile patet.

Eodem modo demonstratur Δ^{la} in superficie sphaerica esse uti excessus summarum Λ^{lorum} eorundem supra $2R$. Si 2 Δ^{li} sphaerici recti fuerint, tertius z erit excessus dictus; est autem Δ istud (peripheria maxima p dicta) manifesto $= \frac{z}{2\pi}$

$\frac{p^2}{2\pi}$ (§. 32. VI.); consequi quodvis Δ , cuius Λ^{lorum} excessus $= e$, est $= \frac{zp^2}{4\pi^2}$.

§. 43. (Fig. 15.) Jam area Δ^{li} rectilinei in S per summam Λ^{lorum} exprimetur. Si ab crescat in infinitum; erit (§. 42) $\Delta abc : (R - u - v)$ constans. Est vero $\Delta abc \sim bacn$ (§. 32. V.), et $R - u - v \sim z$ (§. 1.); adeoque $bacn : z = \Delta abc : (R - u - v) = bac'n' : z'$. Est porro manifesto $bdcn : bd'c'n' = r : r' = \text{tang } z : \text{tang } z'$ (§. 30.). Pro $y' \sim o$ autem est $\frac{bd'c'n'}{bac'n'} \sim 1$, nec non $\frac{\text{tang } z'}{z'} \sim 1$; consequ. $bdcn : bacn = \text{tang } z : z$. Erat vero (§. 32) $bdcn = ri = i^2 \text{ tang } z$; est igitur $bacn = zi^2$. Quovis Δ^{lo} cuius Λ^{lorum} summae complementum ad $2R$, z est, in posterum breviter Δ dicto, erit idcirco $\Delta = zi^2$.

Facile hinc liquet, quod si (Fig. 14.) $or \parallel am$ et $ro \parallel ab$ fuerint; area inter or , st , oc , compre-

hensa (quae manifesto limes absolutus est areas
 triangulorum rectilineorum sine fine crescentium;
 seu ipsius Δ pro $\propto \sim 2R$), sit $= \pi i^2 = \odot i$, in F.
 Limite isto per $\square$ denotato, erit porro (Fig. 15)
 (per § 30) $\pi r^2 = \text{tang } \propto^2 \square = \odot r$ in F (§ 21) $= \odot s$
 (per § 32. VI.), si chorda dc , s dicatur. Si jam
 radio dato s , circuli in plano (sive radio L formi
 circuli in F) $\perp$ riter bisecto, construat (per § 34)
 $db \parallel \simeq cn$; demissa $\perp$ ri ca ad db , et erecta $\perp$ ri
 cm ad ca ; habebitur $\propto$; unde (per § 37) $\text{tang } \propto^2$,
 radio L formi ad lubitum pro unitate assumpto,
geometrice determinari potest, per duas lineas
uniformes ejusdem curvaturae (quae solis termi-
 nis datis, constructis axibus, manifesto tanquam
 rectae commensurari, atque hoc respectu rectis
 aequivalentes spectari possunt).

Porro (Fig. 23) construitur quadrilaterum ex gr.
 regulare $= \square$, ut sequitur. Sit $abc = R$, $bac =$
 $\frac{1}{2}R$, $acb = \frac{1}{4}R$, et $bc = x$; poterit X (ex § 31. II)
 per meras radices quadraticas exprimi, et (per §. 37)
 construi: habitoque X, (per § 38, sive etiam 29
 et 35) x ipsum determinari potest. Estque octu-
 plum Δabc manifesto $= \square$, atque per hoc, circu-
 lus planus radii s , per figuram rectilineam, et li-
 neas uniformes ejusdem generis (rectis, quoad
 comparisonem inter se, aequivalentes) geome-
 trice quadratus; circulus F formis vero eodem
 modo complanatus: habeturque aut Axioma XI
 Euclidis verum, aut quadratura circuli geometrica;
 etsi hucusque indecisum manserit, quodnam ex his
 duobus revera locum habeat. Quoties $\text{tang } \propto^2$ vel nū-
 merus integer vel fractio rationalis fuerit, cujus
 (ad simplicissimam formam reductae) denomina-
 tor aut numerus primus formae $2^m + 1$ (cujus est
 etiam $2 = 2^0 + 1$) aut productum fuerit e quotcun-
 que primis hujus formae, quorum (ipsum 2, qui
 solus quotvis vicibus occurrere potest, excipiendo)
 quivis semel ut factor occurrit: per theoriam po-

lyponorum ill. *GAVSS* (praeclarum nostri imo omnis aevi inventum), etiam ipsi tang $z^2 \square = \odot s$ (et nonnisi pro talibus valoribus ipsius z) figuram rectilineam aequalem constituere licet. Nam *divisio* ipsius $\square$ (theoremate § 42 facile ad quaelibet polygoma extenso) manifesto *sectionem* ipsius $2R$ requirit, quam (ut ostendi potest) unice sub dicta conditione geometricè perficere licet. In omnibus autem talibus casibus praecedentia facile ad scopum perducunt. Et potest quaevis figura rectilinea in polygenum regulare n laterum geometricè converti, siquidem n sub formam *GAVSSianam* cadat.

Superèssset denique, (ut res omni numero absolvatur), impossibilitatem, (absque suppositione aliqua) decidendi, num Σ , aut aliquod (et quodnam) S sit, demonstrare: quod tamen occasione magis idoneae reservatur.

E R R A T A.

- §. 1. l. 6. pro ex $a\tilde{m}$ primum exit, lege, primo non secatur $a\tilde{m}$.
- §. 4. linea 2 pro $a\tilde{b}$ lege $a\tilde{b}$; l. 3. lege (per §. 1.), ultima l. lege *nam*;
- Pag. 4. pro 6 lege § 6; l. ult. pro $b\tilde{a}$ lege $b\tilde{d}$. Pro bissecare, lege ubique bisecare.
- Pag. 5. l. 5. a calce, lege $af < ac$; penultima et ult. l. lege $a\tilde{p}$ et $b\tilde{f}$.
- §. 7. Casu 3tio *praemisso* duo priores, adinstar casus 2di §. 10. brevius ac elegantius simul absolvi possunt.
- §. 10. a calce, l. 4. lege $tgbn$.
- §. 11. l. 7. et in calce, lege $a\tilde{m}$;
- Pag. 9. l. 2, pro prortione, lege, extremitate portionis.
- §. 17. Demonstrationem ad S restringere haud necesse est; quum facile ita proponatur, ut absolute (pro S et Σ) valeat.
- §. 19. penultima l. et ult. pro c lege q .
- §. 20. l. 2 post 19 claudatur, linea penult. lege, L lineus.
- §. 21. l. 1. deleatur comma post: in; et l. penult. lege $\frac{1}{2} \bigcirc 1$.
- §. 22. post Fig. 9. claudatur.
- §. 23. l. 4. lege, $ab = n.cd$.
- §. 24. l. 1. lege $Y = X^{\frac{y}{x}}$
- Pag. 11. in calce lege $\bigodot cd$, l. penult. lege $\bigodot ed$.
- Pag. 13. l. 7. et 8 lege $\frac{\sin u'}{\sin v} \cdot \bigodot y'$.

Pag. 14. l. 4. lege a, c, a ; linea 7 lege, pro a .

III. l. 3. lege $\frac{yy'}{aa'}$, linea penult. post $e^{\frac{-b}{2}}$ claudatur; §. 32. deleatur.

Pag. 15. ante §. 32. l. penult. duae priores quantitates parenthesibus inclusae quadrari debent, et primus terminus 3tiae exponentem positivum habere. l. ult. lege α, β, c

§. 32. I. l. 3. a calce, pro hba , lege hbg .

Pag. 16. l. 3. lege $\frac{dy}{bh}$, linea 4 lege, atque $\frac{dz}{bh}$; li-

nea 5 lege $X(X^2-1)^{\frac{-1}{2}}$, et dele quod inter duo commata est. III. l. 1. lege $\frac{du}{dx}$; l. 5. lege $\frac{ds}{dg}$,

l. 4. a calce, quantitas inclusa quadretur.

Pa. 17. VI. l. 1. post segmenti, insere, z ;

Pa. 18. linea 12. pro $= (\S 29)$. lege $(\S 30)$; linea 6. ante VII. dele $z = \odot 2y$, sive; et VII

linea 5, lege $\frac{1}{A} \pi i^2 p(Q - Q^{-1})^2$.

Pag. 19. l. 10. lege $= e$; linea 16. lege §. 30; linea 13. a calce, lege, III. et in calce, pro ipsum lege, verum.

Pag. 20. l. 15. lege $beri$ pro $bere$; linea 3. a calce, lege (§. 25.); linea 2. lege $= aob$;

Pag. 21. l. 2. post *unum*, dele punctum; et l. 3. a calce pro *sescio*, lege *sectio*.

EGY KIS TOLDALÉK A' DÉÁK ELSŐ KÖTETHEZ.

A' kik ezen két darabból álló Déák munkára előre fizettek,
2. Rhf. 30. xrt. ezüstben; neveik itt következnek: a'
csak felírtak közül is azok, nem különben mások is, a'
kik nétalám ezután fizetni fognak, a' második darabra
fognak ki nyomtattatni.

T.	T. Antal János Professor és Gen. Notarius	1. példány.
T.	Artz Károly Professor Szebenben	1.
M.	Angustinovits Pál Gub. Cons.	1.
	Áts Sándor N. Enyedi Tog.	1.
M.	Balási Jó'sef. K. Tábla Biro	1.
T.	Barabás Miklos, Képiró	1.
M.	Barcsai János Gub. Cons.	1.
	Bárdi István Theol. Candidat.	1.
	Bartha Dániel N. Enyedi Tog.	1.
T.	Benedek István, Nevelő	1.
T.	Beukő Ferentz Ügyvéd	1.
G.	Bethlen Ádám	16.
G.	Bethlen Ferentz	3.
G.	Bethlen Friedrik	1.
G.	Bethlen Gergely	2.
G.	Bethlen László R. T. Cancell.	1.
G.	Bethlen János	1.
G.	Bethlen János R. T. Cancell.	1.
T.	Bod Péter Jurium Insp.	1.
	Borsos Márton, Med. Candidat	1.
	Borsos Márton, N. Enyedi Tog.	1.
T.	Brassai Sámuel Nevelő	1.
	Bügyul Elek, N. Enyedi Tog.	1.
G.	Degenfeld Pál	1.
	Dobai Pál N. Enyedi Tog.	1.
M.	Filep Jó'sef Vice Director	1.
	Fülöp Elek, N. Enyedi Tog.	1.
M.	Gál László, Ország Directora	1.
T.	Gyergyai Ferentz	1.
T.	Gazda János Inspector	1.
M.	Katona Miklos	1.
B.	Kemény Domokos Fő Biró	1.
B.	Kemény Pál Kollégium Curátora	3.
G.	Kemény Sámuel	1.
G.	Kornis Mihály Thes. Cons.	1.
	Mihályi Károly N. Enyedi Tog.	1.

II

T.	Moos István Ügyvéd	-	-	-	-	1.
T.	Nagy János Ügyvéd	-	-	-	-	1.
M.	Pávai Elek K. Tábla Biró	-	-	-	-	1.
T.	Pávai Jó'sef Inspector	-	-	-	-	1.
T.	Pető Jó'sef R. T. Cancell.	-	-	-	-	1.
T. T.	Pétzeli Jó'sef Professor Debretzenben	-	-	-	-	1.
	Posoni Gergely N. Enyedi Tog.	-	-	-	-	1.
T.	Raff Mihály Ügyvéd	-	-	-	-	1.
G.	Rhédei Ádám Fő Ispány és Koll. Fő Curátora	-	-	-	-	1.
T.	Salánki Lajos Prédikátor	-	-	-	-	1.
T.	Siko István K. Tábla Archiváriussa	-	-	-	-	1.
T.	Szász Károly Professor N. Enyeden	-	-	-	-	1.
N. M.	Székely Mihály K. Tábla Praesesse	-	-	-	-	2.
	Szentpáli 'Sigmund N. Enyedi Tog.	-	-	-	-	1.
T.	Szabó György R. T. Cancell.	-	-	-	-	1.
T.	Szilágyi Jó'sef Ügyvéd	-	-	-	-	3.
T.	Szonnyi Pál Debretzenben	-	-	-	-	1.
T.	Szöts Mihály	-	-	-	-	1.
T.	Szöllösi Pál Gub. Cancell.	-	-	-	-	1.
G.	Teléki Domokos	-	-	-	-	26.
G.	Teleki Imre	-	-	-	-	1.
T.	Tétsi Ferentz Nevelő	-	-	-	-	1.
G.	Toldalagi Ferentz	-	-	-	-	1.
G.	Toldalagi 'Sigmund Koll. Fő Curátora	-	-	-	-	2.
	Toth Ferentz N. Enyedi Tog.	-	-	-	-	1.
T.	Török Pál Debretzenben	-	-	-	-	1.
M.	Zeyk Dániel Gub. Cons. és Koll. Fő Curátora	-	-	-	-	10.
M.	Zeyk János	-	-	-	-	1.
M.	Zeyk Jó'sef	-	-	-	-	1.
M.	Zeyk Miklos	-	-	-	-	1.
T.	Zoványi Sámuel R. Tab. Cancell.	-	-	-	-	1.
T.	Jakab György	-	-	-	-	1.
T.	Vállyi Károly Posta Mester	-	-	-	-	1.
T.	Vajda Dániel Nevelő	-	-	-	-	1.

Ezekon kívül fő indítója és segítője ezen munka kiadásának elfelejthetlen kedves barátta lett tanítványom *Med.D. Böngözi Jakab Lajos* volt; ki is jobb kezemet kérve előre, hogy kérését telyesítem, öt száz Váltó Rhstot adott által, azt mondván, hogy a' *Hazának adja*. Mekkora kár az ő elvesztése, azok tudják, a' kik őt esmerték: az emberiségért buzgó szíve, elméjének tsendes tiszta világa, könnyű felfogása, 's alapos mély nézése, 's minden fitogatástól 's füsttől idegen egyszerű szép lelke, igazmondó egyenességgel, 's szava' pontosságával — megannyi vonásai az igaz tálentomnak; mellyel minden itt taníttatott tudományokban, 's azok között külö-

nősön a' *Mathesisiekben* kitündöklőlvén, a' mind ezekkel külföldön 6. év alatt szerzett kints, a' hazai partoknál süllyedett el — miképpen az ellenség a' vezérre tör, a' halál is azokat számítván, kiket ő egy hosszú élet alatt tartott volna meg, egynek személyében mind ezeket is ejtette el. —

Nem hallgathatom még el több kedves hív Tanítványim közül Ilentzfalvi *Szász Pált*; ki midőn az iskolai pálya' végéről a' földi élet' viszontagságokkal telyes útjára lépett volna, annak sárján 's napfényét szünetlen szaggató borulatjain fölül emeltetett, az örökkévalóság további pályája folytatására. — Egy ártatlan romlatlan ifjuban, egy emberséges ember, és maga helyén egy pontos természetvizsgáló, 's tsillagász veszett el. — Az új mathesisi jegyekből; a' mi jó, neki köszönöm: ő kapta ki a' nyomtató műhelyben fél század óta hevert betű-öntő-szer használatát, 's jollehet soha se metztett az előtt, ő mettzette a' jól kijött jegyeket, 's öntötte, 's mutatta ki öntéseket. — Ez is többet tsinált, mint szollott, 's kevesebbet mutatott mint vőlt; holott minden kitsi meszszire szokott kiáltani. —

Egyáltalában (kevés különös kivétellel) azon köz panasza ellen vagyok; hogy *Shakespear*ként a' tanítványok hasonlók a' tsemetekhez; melyek zöld leveleikkel kizárják az őket éléhozott napot; — sőt vissza mosolyognak. — A' kit meghűt az, valamint egyáltalában a' ki haládatosságra számít; nem méltó reá, szintűgy mint a' haládatlan a' nemes lelkek sorába.

Tulajdonképpen nem is olly' rosszak az emberek, mint a' köz panasz kiáltja: egy nap se lehet kimenni az útszára is; hogy sokat ne lásson az ember, a' kinek ne köszönhessen valamit; legalább azt, hogy vagy éppen nem, vagy erősebben nem bántotta meg — vagy idejét nem vette el, legalább többet nem vett el abból, a' minek betse nálunk, 's tsekély; hogy tsak a' napszámosnál van árra, 's kevesben nem tsak egymástól büntelen ragadozzuk el, sőt ezen pillantatnyi örökségnek számtalan fattyú osztozunk, az igazi öröksők' kárára.

KÖTELESSÉGEM MÉG A' TISZTELT KÖZÖNSÉGNEK,

JELENTENI:

1-ben. Elpirulok ezen munkátskának oly késő kijötén; hogy könnyen eszibe juthat valakinek, *Mons parturiebat* — de nálunk minden efféle, ha kitsi is, nehéz; — sok ideig kellett várnom, míg tsak ennyi előfizetés is gyűlt, úgy hogy a' lemondásról kezdek vala gondolkodni; a' midőn végre ott láttam magamat, a' honnan már vissza nem, 's elé is tsak romlás' veszedelmével léphettem — azután is pedig sok fátumok 's betegség mellett, hol egy hol más hibázott; a' jegyekkel, figurákkal 's több effélékkel is sok késleltető baj vőlt, 's egyetlen sajtó, kevés tsak most szaporodott betűkkel, sok e-

gyéb munkákkal volt elfoglalva — 's még most is a' miatgy fél esztendőől fogva kijött első darab, a' figurákra vár.

2-szor. A' 2-dik darabot magyarul akartam kiadni; egyfelől azért, mivel az első darab (az *Arithmetika' Elejiben* valott kárommal együtt) szinte minden költséget el nyelvén, nem láttam más módját a' 2 diknak, hanem hogy megrövidítve oltsobb papirosra tsak 300 at nyomtattassak (nem 500 at mint az elsőből), mathesisből ennyi is felesleg lévén nálunk; — másfelől így Hazámnak egy közhasznú könyvet adni reménylettem, melyhez az első darabot is ugyan magyarul hozzá alkalmaztam volna: de az előfizetők közül többen, a' kiknek tanátsoakat meg nem vethettem, azt kívánták, hogy ha az első déák, a' második is úgy legyen.

3-szor. A' tiszta Mathesisi műszókra nézve is, melyeknek egy részével az *Arithmetika' Elejiben M. Vádsárhelyt* 1830 éltem, 's a' többit az említett 2-dik darabban mutattam volna ki; következőket jelenteni hazafiúi kötelességem.

I. Azoknak formálásában ezen három fő regulám volt:

a). hogy a' mennyiben lehet rövidek, a' nyelv' természetéből folyok, legalább azzal nem ellenkezők, könnyen megszokhatók, 's tudványba való igaz béléatással a' dolog természetére mutatók legyenek.

b.) hogy azönegy szó ne tegyen külömbözőket; 's hogy egyebet jelentsen, egy kis helyes változtatás engedtessek meg.

c.) hogy a' mellyeket okvetlen szükséges megkülömböztetni, azoknak külön (ha lehet más atyafiasból formált) névadattassék.

A' mi az elsőt illeti: világos, hogy a' kezdő annál nehezebben érti a' dolgot meg, minél külömbözőbb a' szónak tulajdon értelmén a' tudványtól, 's annál könnyebben érti meg, minél inkább magára a' dologra mutat. A' kurtítás pedig túl mehet a' határon, de azon belől könnyit; hogy lenne képes egy felsőbb mathesisi dolog leáadásá azon nemzetnél, mely a' 3-at *Polertarirorunkuráknak* nevezte? 's az Analysisi rövid 's okos jegyek melly igen megkönnyítik a' különben áthatatlan dolgokat — mely rövid 's mathesisi lehet a' felső lények nyelve! —

Azért tsak móddal legyen, sok a' szokatlanság miatt elébb visszataszító, azután megértve szokottá lessz — mennyi példa nints erre az újabb időkben! melly szokatlan vala elébb *át, gyönyör --, kellemes* kellemetes helyett, *közvetlen* közvetlen helyett 's a' t. Így jövény, nyugalom türelem, győzelem, veszelem etc: az efféle ujtás könnyű lévén, mihelyt szabad, omlik mindenfelől — kár, hogy *Erbschaft* nem bár örökmény, 's örökség *Ewigkeit* helyett oly hosszú szóval élünk, mintha azzal akarnok kifejezni. —

A' 2-dikra nézve, bajt csinálván a' szeg Nagel, melly szint is teszen, mivel szeglet, zugoly (Winkel) igen hosszak az összetételben; maradna *Dugonits* szerint Winkel szögnek, 's mikor szeg szint teszen, hagyatnék el az s; vagy szög tenné a' szint, 's zeg vagy zög lenne Winkel; még *mons* és *apex* is lehetne *hegy* és *högy*.

A' 2-dikra 's 3-dikra nézve, legyen szabad például hozni elé: *Id* Zeit, *idő* Wetter, *Vil* (az honnan villám) Licht, *Világ* Welt; *han* (mintegy ha! n!). Schall, *hang* tonus vagy megfordítva; Nap Sonne, viradtól estig *Napp* (lehetne *Vily*); dies soláris *napi kétdélköz* (röviden az illy dies *délköz*). Densitas *töm, tömeg* (Fogarasi szerint) massa.

Az 1-sőre 's 2-dikra nézve, legyen szabad a' hol egyenlőt mondani hosszas volna, eggyel jelenteni ki, 2 gyvel, hogy egytől unum megkülömböztessék (p. o) *eggyoldalú háromszög* nem 1 oldalú hanem *egyenlő oldalú háromszöget* tegyen.

II. A' *Dugonits* 's *Pete* műszavain kívül másokat nem láttam; 's egyáltalában még a' kezdeten vagyunk: — de ha egyfelől elpirulunk, midőn a' Mathesisben más nemzeteknek tanítói éppen nem, tanítvánnyai is (annyira a' mennyire is) kevesen vagyunk; másfelől hogy valaha tanítói is lehessünk, *éljünk legalább most míg ideje vagyon, éppea ezen elmara-*
dásunkból származott olyan *jussunkal*, a' mellyet más nemzetek már elvesztettek; a' midőn már régen a' Mathesis' böltsői nyelvét fordítván le, sok olyan szók gyökereztek a' századokba, mellyek a' tanuló, elméjét a' tudványi értelemről félrevonják. Béfolyása van ennek a' nemzeti kimivelődésre. —

III. Engedtettsék azért meg, Hazánk 's Nemzetünk nevében! az a' kérés: hogy a' mathesisi műszók adásában, egyik fő tziel legyen, hogy azok a' mennyire lehet tudványibélátással, a' kifejezendő dolgokra mutassanak.

Bátorkodom a' főbbekre nézve következő probát ide tenni; minden jobbnak elfogadására való készséggel.

Az említett *Arithmetika* (*Id-mennyiség tudvány*) *Elejében*, a' többek közt következő nevek adattak, az holott is a' kívánt okok is (valamint ezen első déák darabban is) megtalálhatnák.

Spatium *Űr* (az honnan üres, az az a' miben (oda érve *csak*) űr van. Tempus, *id*, tempestas *idő*, quidditas *mi-ség*, quantitas (*midség* mintegy azon kérdésre eredye *mi id?*), ugyantsak maradhat *mennyiség*, qualitas *millység*; pars *rész*, portio *darab*, contiguum *szakadatlan*, tekinteti (*darabi*) *egyenlőség*, tekinteti *mennyiség*; positiv, *negatív* (mathesisi értelemben) $\times$ (*kereszt*), $=$ (*vondás*) *mennyiség*; az az a' midség bizonyos millységgel (melly $\times$, $=$ jeggyel je-

lentetik ki, hogy az eszet egyébre ne vigye), szíli ezt, (pag. 22); vagy amaz, bizonyos $\boxplus$ határozatu, ez ellenes határozatu; — a , vontja anak, vagy ellenesse (oppositum).

Summa meghagyatik; ugyantsak lehetne öszvet is.

Addere *summázni*; subtrahere *pótlékazni* (pótlótársazni); subtrahendus *pótlendő*, minuendus *tett summa*, differentia *pótlék* (vagy *pótlótárs*), differentia ipsius P ab S , P nek *pótléka* S re. $a - b + c$, a 's *vontja* b nek *meg* c .

Series sor, (arithm. *eggyipótléki*, geom. *eggyiméretí*); mensurare B quoad A , *mérni* B t A val, mensura *mérték*, B *mértje* a ' *mértéknek*, fractio *méret*, Unitas *főmérték*, numerus integer *egész szám*, fractio vera *tört egy*, proportio geom. *eggyiméret*; A ita est ad B , uti a ad b , A *annyidja* B nek *mint* a b nek. Multiplicare a per B , *eggyimértezni* at B vel (röviden *mértezni*), az-az olyan mértet adni anak, a ' *millyen mért* B (az-az a ' *millyen mértje* B a ' *főmértéknek*), multiplicator B *főmért* (vagy *mértező*), a multiplicandus *tett mérték* (vagy *mértezendő*), factum *eggyimért*, factores *mérők*.

Ugyantsak ha *szerzeni* helyett egyszer se mondattatnék *szerezni*, még ezzel is inkább lehetne a ' *rosszul nevezett sokszorozás* helyett élni; factum *szerezet* lenne 's a ' t.

Dividere b per a , *b*re *párazni* (vagy *mérőtársazni*, röviden *mértársazni*) at: dividendus *tett eggyimért*, divisor *főmérő* (vagy *párazandó*), quotus *mérőtárs* (röviden *mértárs*); b divisum per a , *b*re *párja* anak. Kár hogy $2.3 = 24 : 4$ helyett nem más jegyeket vettek, (p. o.) $2 \cdot 3 = 24 \setminus 4$. (az írásbeli 1 's 2 pontra nézve).

Elevare a ad potentiam exponentis q , *eggyimérözni* at q rangal röviden *qval*); 's ha B ezen potentia, B az anak q rangu (eggyimérözetje, 's B nek a , q rangu *alapmérője*, radix exponentis q ipsius B ; *alapmérözni* B t q ranggal (röviden *qval*), radicem exponentis q extrahere ex B .

Logarithmus *rangjel*, basis communis *közalapmérő*, vagy *köztalp*.

Vagy következő nevek is lehetnek: at *qval rangozni*, anak q rangja B , B nek a , q *alrangja*, B t *lerangozni* *qval*.

Vagy: at *qra emelni*, B anak q rangu *emeletje*, a B nek q rangu *emeltje*, B t q ranggal (röviden *qval emeltetni*. Radix quadrata *félrang* 's a ' t.

Quantitas imaginaria *vondás egyi midség*, (Tom. I. pag. 105).

Proportionalis geom. media, *eggyiméretí közép*. Terminus iz, polynonium *több-izet*, binomium *két-izet*, terminus seriei *sor-iz*, terminus generalis *iz-kép*, coefficientis *iz-főmért*.

Functio *köz kép*, series incrementorum *növet-sor*, differentiale *növet-sor-iz kép* (röviden *növet-izkép*), coefficientis differentialis *növet-iz főmért*, integrale *summázat*. Calculus variationum *közképes közkép vi'sgálat*.

Aequatio *egyenlet*; limes *véghatár*, (comma *vonat*; in-

commensurable összemérhetlen; decimales notae tizedes helyek; expressio kifejezet.

Analysis combinatoria, szedet 's rakat vizsgálata, permutatio elrendelelet (röviden rendelelet), variatio ismétlet; ambo, terno etc. kettős szedet, hármas szedet --- vagy kettőzet, hármazat ---; kétszeretje, háromszorotja --- valaminek, dupluma, tripluma ---

Superficies *terj, lep* (az honnan lepedő, lepel), néha kület, corpus geometricum *űr-test*; *féret*, area ha superficiesről van szó, soliditas ha corpusról van szó (ez lehet *tely* is). Planum *lap*, (horizontale *tér*, vagy *vizarányu lap*). Verticale *függős* vagy *függény*; *linea*, *forma* meghagyatnak; *figura keríték*, *sectio vágat*, *recta egyen*, *arcus ív*, *corda húr*, *radius sugár*, *centrum középpont*, *sphaera gömb*, *Cylinder henger*, *Cubus köb*, *angulus szög*, *triangulum háromszög*, *polygonum többszög* (regulare *rendes*); *circulus kör*. A' gömbben kezdve eddig *Dugonitsból* vétették. *Angulus rectus negyed szög* (t. i. a' szög tekinteti mennyiség, a' szárai közt lévő ívben), így 60 grad *hatod szög*, 45 *nyoltzad szög* (mind az egész karimára érve) --- *Apex anguli szöghegy*, *anguli verticales tövi szögek*; *anguli alterni átelleni szögek*, vagy *z forma szögek*; *szögnek* (vagy *conusnak*) *verticalissa*, az ő *tövi társa Perpendicularis rá álló* (vagy röviden *álló*). *Diagonalis átló*, *diameter kettelő* (vagy *kettéző*).

Parallelum egygyközű (*Dugonits*), (tágasabb értelemben *egygyközű*); *parallelogrammum lap-egygyközény*, *prisma űr-egygyközény*; *Rhomboides*, *Rhombus dült egygyközény*; (röviden *dülény*); *Rhombus egygyoldalú dülény*, *rhomboides nemegygyoldalú dülény*, vagy röviden amaz *dülény*, ez *egygyoldalány* (oda érve, hogy csak az oldalai egyenlők), *quadratum rendes négy szög* (röviden *négyeg*). *Rectangulum oblongum hosszúkó állány* (röviden *állány*); *rectilinea figura egyeni keríték*: *figura plana lapi keríték*, *figura sphaerica gömbi keríték*.

Focus tűz pont, *tangens érintő*, *asymptota szinte erő*. *Abscissae fő utak*, *ordinatae al-utak* (nem ál utak); Lásd az *Arbort* ezen darabban). Az al-utak lehetnek 1-ső 's 2-dik rendűek --- *Cathetusok befogók*, *hypothénusa átfogó*. *Sinus végtáv* (az ív vége távja a' fő kettézőtől p. 456); *cosinus középpont táv* (röviden *központ táv*); *sinus versus kezdet táv* (az ív kezdete távját érve, 's mind a' két utobbit a' *sinus-tól* érve), *secans vágó*, *complementum pótlék-ív*, *cosinus pótlék végtáv* (röviden *pótvégtáv*) 's a' többi. *Pyramis tetény*, *conus tsup* (az honnan tsupa), vagy *körtetény*; így *három-szög tetény*, *három-szög üreggyközény*; *Parallelepipedum űr-lap-egygyközény*, ha *rectangulare űr-állány*, (vagy *Dugonitsal téglány*) *Pyramis truncata elszelt tetény*, (vagy

szelt tetény), így *szelt tsúp*. Conicae sectiones *tsúp vágatok*: parabola *eggytávú* (mindenik pontját azon egy ponttól, a' *tűzponttól*, 's *azonegy egyentől* értve); ellipsis *kiszebb távú*, hyperbola *nagyobb távú*, (a' ponttól mint az egyentől értve). Vagy az első, *közepetlen tsúp vágat*, a' második, *vissza térő*, a' harmadik, *közepontos vissza nem térő*. Vagy az első, 2 *karu*, a' 2-dik, *vissza térő*, a' 3-dik 4 *karu*, (a' tsúpat az ő tövi társával együtt, vagy p. 101 szerint véve). Eccentricitas *tűz 's középpont táv*; radius vector *tűzpont-sugár*, parameter *tűzpont húr*.

Pes quadratus, cubicus, *terjláb*, *tely-láb* (a' Pallérok számítása szerint, Arithmet. Eleje p. 128). Simile *hasanlo*, homologum *eggyfekuésü*, (néha *megfelelő*).

Propositio *mondatvány*, (sőt röviden *mondat*), *tétel*, *tét*, theorema *okváro tét*, problema *feladat*, *feladó tét*, resolutio *megfejtés*, *végbe vitel*, demonstratio *okmutatás*. Intuitus *ön-látvány*, axioma *ön-igazság*, alap igazság, *ön-látványi tét*. Lemma *segéd-tét 's a't*.

Scientia *tudvány*, oktudvány vagy *tanvány*, *okadalom* vagy *okalom*, scientificus *okász*, a' honnan *okászat* is lehet, mint vadász *vadászat*, fényész, *fényészet*, ditsész, *ditsészet 's a' t*.

4-dszer. A' *Caputak* etc. helyett, akármellyik osztályt lehetne *betű* vagy *számképpel* fejezniki, (nem különben a' *plántát 's sok egyebet* is); tsak a' felosztásnak ugyanazon gráditsfogán lévő osztályok, 1-ső, 2-dik ---, különben azonegy osztály-névvel különböztessenek meg: balról az első szám tegye az annyiadik legelső osztályt, 's akármellyik szám tegye az előttevalónak felosztása' első fogán lévő annyiadik osztályt, a' mekkora azon szám; (ha a' szám 9-et meghaladná, a' kétfelől *bézártat* egy számnak véve). Így 34112. vagy 34112-dik rész lenne az 3-dik fő-rész 4-dik alrész 1-ső fő-osztálya első al-osztályának 2-dik főszakassza, 's viszont ez így íródna le. Ugyan is ezen osztályokat a' 12-dikig le így lehet nevezni: *főrész*, *alrész*, *főosztály*, *alosztály*, *főszakasz*, *alszakasz*, *főszak*, *alszak*, *fő tzikkely*, *al tzikkely*, *főtzikk*, *al tzikk*; mellyet még tovább is lehet folytatni iz, izetske 's több nevekkal; noha romai számokkal 's közönségesekkel, 's más jegyekkel is lehet az alább oda tartozókat megkülönböztetni. Elől is lehetnek még *könyv*, *darab*, sőt *fődarab*, *al darab* nevek is. A' melly számnak eléadására, a' szükségesek még azon a' helyen nintsenek meg; a' hol már megvannak, kipotlását oda lehet tenni, eleibe írva, mellyik számnak *kipotlása*.

Légyen ezen osztás medjára például az *Ür tudvány*.

- 1. ELSŐ FŐ-RÉSZ:** az Γ nek alap-szemlélése; *lep*, (ollykor *kület*) *linea*, *pont*, *forma*, *gömb*; 3 egyes fő mozgás; *egyen*, *lap*, *kör*, 's egyéb *alap-képzetek* (vagy *képezetek*), és *alap-igazságok*; mellyek ezen első darabnak végén pag. 442-től kezdve találtnak.
- 2. MÁSODIK FŐ-RÉSZ:** leszállás a' lapra; *lap-tudomány* (*planimetria*).
- 21. Első alrész:** véges számú, egyenekkel 's két első főmívvel, (*constructio geom. sensu stricto*).
- 211. Első fő osztály:** azon formák, mellyek ennek elsőben szembeötlő származatainak egymást vágása vagy nem vágása által erednek.
- 2111. Első al-osztály:** a' féret vizsgálása nélkül.
- 21111. Első fő szakasz:** nem vágása.
Alszakaszok: (1-ső, 2-dik, 3-dik): két egyennek 's többnek, két körnek; egyennek 's körnek.
- 21112. Második fő szakasz:** vágás.
- 211121. Első al szakasz:** szöggel való vágás.
- 2111211. Első fő szak:** tsupa egyenek egymással.
- 21112111. Első alszak:** két egyen; (4-ed szög, tompa szög, hegyes szög).
- 21112112. Második alszak:** 3 egyen.
- 211121121. Első főtzikkely:** tsak egyik pár nem vágja egymást, kinyújtva is.
- 211121122. Második főtzikkely:** mindenik vágja egymást; innen a' három szögek.
- 2111211221. Első altzikkely:** a' háromszögek' egyenlőségének feltétei.
- 2111211222. Második al-tzikkely:** A' három szög oldalainak 's szembelevő szögeknek költsönös függése: az honnan a' háromszöget meghatározó adatokból, a' meg nem adottakat felszámítani tanít a' *Trig. plana* az ezen számot illető kipótlásban.
- 21112113. Harmadik alszak:** 4 egyen.
- 211121131. Első főtzikkely:** ha nincs olly kettő, melly kinyújtva egymást ne vágja.
- 211121132. Második főtzikkely:** ha van olly kettő, melly egymást ne vágja.
- 2111211321. Első altzikkely:** ha a' más kettő is illyen; tehát mivel vágás van, ezen pártól a' másik vágatik, (*parallelogrammum*).
- 2111211322. Második altzikkely:** ha tsak egyik pár ollyan; tehát ez vágatik a' másik nem ollyantól, (a' hasonlatosság alapja); innen a' háromszögek' hasonlatossága feltétei.
- 21112114. Negyedik alszak:** több akárhány egyenek.

- 211121141. *Első főtzikkely*: egyenekből álló (röviden *egyeni*) egyes linea (p. 446).
- 2111211411. *Első altzikkely*: más illyennel való összetételből egy pár egyennek egyközűségéből származó közösleges képze az *eggyközűségnek*.
- 2111211412. *Második altzikkely*: több oldalú egyeni keríték
- 211121142. *Második főtzikkely*: valamelly egyeni lineának minden szöghegyeire egyenek azonegy pontból.
- 2111211421. *Első altzikkely*: az egyeni kerítéknek háromszögekre való felosztása.
- 2111211422. *Második altzikkely*: mindenik egyennek a' központtól azonegy annyiuját véve; a' *hasonlatosság közösleges képze* magva.
- 2111212. *Második főszak*: egyen a' körrel.
- 21112121. *Első alszak*: egy egyen a' kört, csak egy pontban, vagy kettőben vágja.
- 21112122. *Második alszak*: több a' kört vágó egyenek.
- 211121221. *Első főtzikkely*: azon egyenek vágva egymást.
- 2111212211. *Első altzikkely*: azonegy pontban.
A' főtzikkek, (1-ső, 2-dik, 3-dik): azon pont a' karimában, a' karimán belől, vagy kívül.
- 2111212212. *Második altzikkely*: ha azon egyenek nem azonegy pontban vágva egymást, egyes visszatérő egyeni lineát formálnak.
- 2111212121. *Első fő-tzikk*: mindenik egyen (úgy a' mint van a' kezdetitől a' végéig) húrja a' karimának; ennek altzikjei, 3 egyen, 4 's a' többi; sőt ezeknek alsobb osztályai, ha az egyenek egyenlők vagy nem.
- 211122122. *Második fő-tzikk*: mindenik egyen érintője a' karimának; mellynek ugyan az imintiek az alsobb osztályai.
- 211121222. *Második fő-tzikkely*: ha azon egyenek nem vágják egymást.
- 2111213. *Harmadik fő-szak*: körek egymással.
Első fő-tzikk: érintési vágat; 2-dik az érintés nélkül való.
- 211122. *Második al-szakasz*: a' szögetlen vágás; melynek alsobb osztályai, az egyenekből 's körivekből, vagy tsupa körivekből való, 3 's több oldalú formák.
- 2112. *Második al-osztály*: férte az eléhozott kerítékeknek; mellynek alsobb osztályai, az egyeni kerítékek, kör, vagy tsupa körivekből, avagy körivekből 's egyenekből valók.
- 212. *Második fő-osztály*: azon formáknak, mellyeknek az első fő-osztályban tsak magában való lehetsége ül-lik szembe (vagy kérdésbe jöhet); véges számú két fő művel való lehetsége vagy lehetlensége vizsgálása.

- 22. *Második al-rész*: számtalan két fő mívvel (*kettős egyessült mozgás, az Id-mennyiség tudvány segítségével*).
- 221. *Első fő-osztály*: a' mellyeknek ha nem is minden, de mindenik pontja megadatik véges számú 2 fő mívvel.
- 222. *Második fő-osztály*: a' mellyeknek mindenik pontja sem.
- 3. *HARMADIK FŐ-RÉSZ*: vissza menetel a' lapról az ür mélységébe.
- 31. *Első al-rész*: a' véges számú egyenekkel 's három fő mívvel származhatók' vizsgálása (*constructio geom. sensu lato*). Tudniillik az elébbi két fő muukához járul a' tengelyi fordulás.
- 311. *Első fő-szakasz*: *tengelyi fordulása* keritéket nem formáló lineáknak, és lapoknak.
- 3111. *Első al-szakasz*: lineák' tengelyi fordulása.
- 31111. *Első fő-szak*: keritéket nem formáló egyeni lineák' fordulása.
- 311111. *Első al-szak*: *egy fordulás*.
- 3111111. *Első fő-tzikkely*: két egymást P lapban vágó egyen megfordul az egyik körül; a' mozgó egyen útja lap, ha a' szög negyed szög, 's tövi tsúpak (azaz tsúp az ő tövi társával), ha a' szög kisebb negyedszögnél.
- 3111112. *Második fő-tzikkely*: Ugyan Pben A egyennek b, c --- pontjairól legyenek B, C --- egyenek Ara ráállók, 's ABC --- linea forduljon meg A körül; az egyenek útjai *eggyközű lapok*.
- 311112. *Második al-szak*: *több fordulás*; legyenek P lapban A, B egymást p pontban vágó egyenekre α és β rá állók p ből, 's forduljon meg A körül α , 's B körül β ; a' két út' vágatja a' ráálló p ből P re.
- 3112. *Második al-szakasz*: *lapok fordulása*.
- 31121. *Első fő-szak*: *egy fordulás*; fordúlva P lap, valamely egyenje körül, szüli a' két lap' szögét.
- 31122. *Második fő-szak*: *több fordulás*.
- 311221. *Első al-szak*: mindenik fordulás tengelyének azonegy p közös pontja: úgymint értettség minden, P lapra nézve, azonegy felől, (p. o. fölül), 's minden fordulás $< 2R$ legyen, (R negyed szöget tévén). Ezen feltétellel forduljon P lap pa egyenje körül, 's mindenkor újra, a' hová jött, forduljon onnan, valamely p pontról vont egyenje körül hajolva, folytatva a' mig tetszik; ered az *angulus solidus* (tely-szög); lehet még azon határozást is tenni, hogy P mindég azon színe felé hajoljon, a' melly elébb alól volt.
- 311222. *Második al-szak*: *több fordulás*, mindenik fordulás' tengelyje' központja nélkül.

•3112221. *Első fő-tzikkely : tsupán lapok.*

•31122211. *Első al-tzikkely : a' fölül két egyközű lap P és Q közül egyik forduljon akármelly egyenje körül, míg a' másik lapnak valamelly pontját éri; nevezessék ezen új lap R nek; vi'sgálatnak az R től tsinált átelleni szögek 's a' t.*

•31122212. *Második al-tzikkely : az elébbi R forduljon akármelly az P és Q lapokon átmenő α egyenje körül; 's légyen az új lap S; vi'sgálatnak P vel és Q val lévő vágatjai az R és S lapokból álló formának.*

•31122213. *Harmadik al-tzikkely : forduljon S is akármelly, P és Q lapokon átmenő β egyenje körül; vi'sgálatnak az R, S, T lapokból álló formának P vel és Q val lévő vágatjai; mind azon esetben, ha $\alpha \parallel \beta$, mind akkor ha nem.*

•3112222. *Második fő-tzikkely : lapok egyenekkel.*

•31122221. *Első al-tzikkely : a' fölebbi P és Q egyközű lapok közül egyiknek akármelly pontjából a' másiknak akármelly pontjára egyen gondoltassék; vi'sgálatik az egyennek lappal való szöge, az átelleni szögek 's a' t.*

•31122222. *Második al-tzikkely : P lapban légyen ABC-- egyeni keriték, 's akármelly a' lapon fölül lévő a pont legyeu, forduljon (mindent egyfelől, p.o. P lapon fölül értve) P lap AB egyen körül, míg Aa egyen belé esik; és legyeu Bb $\parallel$ és $=$ Aa; azután forduljon ugyanaz első P lap BC egyen körül, míg Bb belé esik, 's legyeu Cc $\parallel$ és $=$ Bb, 's így tovább az utolsó oldalig; és ekkor forduljon abAB lap ab körül, míg c pont belé esik. Születik az egyeni ür-eggyközény, melly parallelepipedum, ha ABCD parallelogrammum.*

•31122223. *Harmadik al-tzikkely : ha P lapban lévő ABC-- egyeni keritéknek, minden szöghegyeiről azonegy p pontra egyenek gondoltatnak, 's P fordul mindenik oldala körül az említett keritéknek, míg p belé esik; születik az egyeni tetény, (a' mennyiben a' kör-tetény az-az kör talpu tetény 's akármelly más talpu mind tetény).*

•312. *Második fő-szakasz : tengelyi fordulása lapi keritékeknek.*

•3121. *Első al-szakasz : negyedszöges három szögnek megfordulása az egyik befogó körül; (negyed szögű tsup).*

- 3122. *Második al-szakasz*: lap-állány megfordulása valamely oldala körül; (*negyed szögű henger*)
- 3123. *Harmadik al-szakasz*: félkör megfordulása a' két-téző körül, (*gömb*).
- 3124. *Negyedik al-szakasz*: a' mindjárt származandó tsuppi vágatok megfordulásával eredő formák.
- 313. *Harmadik fő-szakasz*: tengelyi fordulása a' lapnak az eddig származottaknak valamely pontja körül.
- 3131. *Első al-szakasz*: a' tsuppal (*tsuppi vágatok*); Ellypsis sőt parabola talpu tsup, szelt tsup).
- 3132. *Második al-szakasz*: a' hengerrel.
- 3133. *Harmadik al-szakasz*: az egyeni teténnyel.
- 3134. *Negyedik al-szakasz*: az egyeni ür eggyközénnyel.
- 3135. *Ötödik al-szakasz*: a' gömbbel.
- 31351. *Első fő-szak*: ha a' közép. ponton mennék által a' lapok; erednek 3 lapból a' gömb' színén a' gömbi háromszögek; mellyeket a' meghatározó darabokból felszámítani tanít a' *Trigonometria sphaerica* (*gömbi háromszög számítás*).
- 31352. *Második fő-szak*: ha mind érintik a' lapok a' gömbet, vagy mind vágják, 's ür darabot záró egyes formát tsinálnak; ezek közt erednek a' egészen vagy részszerint *rendes ür-testek*.
- 32 *Második al-rész*: azon formák, a' mellyek véges számú egyenekkel 's három fő mívvel nem származhatnak; (p.o.) ha valamely úgy elé nem állítható formának minden pontjairól azonegy pontra egyenek, vagy azonegy egyenhez eggyközűek gondoltatnak; 's annyival inkább, ha azon egyenek foglalatjának bizonyos formával való vágatja kerestetik 's a't. Egyáltalában mindenféle formák, akármely (akár az *Arborban* három egymásra rá álló egyennel, akár valamely formában bizonyos törvény szerint lévő) hármas avagy többes egyesült mozgás által származhatnak, mind azokkal egyetemben, a' mellyek ezeknek egybetételével lesznek, ide tartoznak.
- 5-szer. A' fenn említett *Arithm. Elejében* XVIII lapon javaltatott *egy írás-mód*; mellyben nem tsak összetett betű ne legyen, hanem egy betű se íródjék kétszer egymásután, sőt egy betű felett is, se pont sem ékezet ne legyen, még is minden hangzónak, még pedig a' rövidnek a' hosszútól megkülömböztetett jele legyen, a' nélkül hogy új betű vétessék fel; ott a' hosszúak szintúgy mint a' kétszer irandók, fölül vagy alól (a' mint az írás' folyása kívánja) nyujtott egyenes vonással jelentetnek ki; a' többi egy a' folyó írásra (némmely betűnél vizerányulag vive másnál fölülről szállítva) alkalmas jeggyel tétetik ki: ma is valami ilyen formát kívánnék, hogy nyelvünk kimondása meghatározott, 's legalább írásuk' modja, első lenne; de a' gy kijelentésére in-

kább lehetne *d* mint *g* betűt az említett jeggyel venni. mivel *adjon* könnyen változik *aggyonra*, de vágjon helyett nem mond senki *vággyont*; — 's vagyon még kettő mellynek jegy kell; ezen szókból megtetszik *edzeni*, *findzsia*, (az utolsót egy 6 éves gyermek mondotta, hogy egyikkel se lehet le írni, az *a'* mint *giorno* mondatik): *zs* volna *z* azon jeggyel, *edzeni* íródna *z* vel, de azon jegy megkettőztetnék *a'* közepén, ez úgy is ritkán jön elé; valamint *a'* *giorno* hang, mellyet *g* eleibe tett jeggyel lehetne ki tenni.

6-odszor. Egyébaránt ezen lapokon az írás sokban különbözik az említett könyvétskebelitől; ugyan is itt *a'* Pest hen 1832-ben nyomtattatott *Magyar Helyesírás főbb szabályai*hez kívántam magam alkalmazni; mivel *a'* midőn *a'* hányan vagyunk annyiképpen irunk, onnan lehet egyedül várni, hogy valahára megállítodjék; 's noha kicsit tartoztathatom avagy segíthetem elé, egy pihével sem akarom terhelni *a'* hazai kimívelődés' kincséért szerencsés széllel feszlő vitorlakkal evező hajót — Sok van, *a'* mellyre nézve kisebb az, miként, mint az hogy eldöjtve legyen; 's megegyezve, valahára azon *a'* nyelven tanuljunk, *a'* mellyet Anyáinktól tanultunk; ekkor indulhatunk meg *a'* mély völgyekből fenn az Alpeseken az égfelé emelkedő Nemzetek után. —

Ha Öseink deákul akartak tanúltatni, *a'* leányokat kellett volna inkább *a'* Déák iskolákba jártatni, hogy ők tudjanak elébb, 's az anyai téjjel szopva *a'* magyarral együtt *a'* deákot, *a'* *fábába* való megvénülés helyett, belé születünk volna — *a'* holt nyelvet is az asszonyi eleven nyelv fel-támasztotta volna — 's tsak két nyelvet meg is lehet bírni, (legalább inkább, mint annyit, *a'* hányat most tanulni kén-telenek vagyunk), 's *a'* tudomány nyelve is akkor *a'* Déák volt. —

Vajha *a'* tudós Társaságok abban egyeznének meg, hogy *a'* tudományok óriási növésevel, *a'* midőn az emberi erő 's idő nem nő, *a'* mostani sok 's mind több-több helyett egy mathe-sisi 's műsikai lélekkel alkotott vég nélkül tökélyesíthető nyel-ven nyomtassanak mindent (*a'* szükségest is le fordítva): nagy részét rövid életünknek, melyben mind *a'* koltsat keresve, alig lépünk bé *a'* tudományok' templomába 's *a'* nap le me-nyen, ebben tölthetnők. — Ugyan is *a'* tudományhoz idő és munka nélkül jutni, (*a'* természetet megtsalni) nem lehet: hiá-ba várja valaki *a'* különben sok szép felü társalkodástól, hogy *a'* *Leucipp'* atomjaiból (mint *a'* tántz-házakbeli találko-zásokból) származó világ' módjára, abból tudós legyen; *a'* gondolatok tántzoló 's párosodo szálája is inkább *a'* magány-ban van, 's *a'* fülemile sem *a'* seregben énekel. — Lehetne inindazáltal *a'* társalkodást *a'* sok rosszat szülő kártya 's e-

gyéb idő-pazérlás helyett, éppen nagy idő nyereségre használni; a' midőn annyi ollyas jön ki mindenfelől, a' mit megkelleme olvasni, ha elég idő 's szem volna réá: sok egynapi olvasást ellehet fél-óra alatt lelkesen mondani; 's tsak 12 ollyan találkozzék össze, felosztva egymást között, mindeniknek tsak egy napba 's hat orába kerülne, a' mi 12 napba került volna mindeniknek — sőt egy nemes rúgója is volna kinek kinek a' magára vállalt-rész' telyesítése, több halgatók' életök' hosszabbítására, 's lelkeik kimivelésére — Ugyanis a' tanulást is lehet ollyan rúgóval ébresztteni, melly rosszabb a' tudatlanságnál: illyen a' fölül-vágy' világ-égése országokon átfúvó szelekkel; ezzel serkenteni, annyi, mint egy pokoli kiólthatlan (a' testtel elmaradó vétkeket is fölül élhető) tüzet vetni az emberi nem' mejjébe; — mitsoda gonosztévő tenné meg, ha tehetné is, hogy fájdalmat támasszon a' fűbe, hogy nem rozsa bokor, 's ebben hogy nem tölgyfa — — hogy az egész szép természet munkás álmu csendjéből jajra serkenjen fel. Azt kell fejtteni a' mi van, csak föld napfény 's esső kell a' magnak — 's úgy kell nevelni mindent, hogy kiki azzal a' mire teremtetett, 's rendeltetett, megelégedve éljen. —

De az említett nyelvre térve vissza; az nem rekeszti a' nemzeti nyelvet ki; minden Magyar meg van azon kedves hangoktól varázsolva, mellyekkel Edes Hazánk' Anyái alatták Nemzetünk' hajdoni hőseit, a' kiknek majd kardvillámjaikkal ropogó mennydörgéseikre vérzapor omlott a' ditsőség' mezején — ha szintén az akkori kardok tollukká, 's a' karok is inkább ezekhez mint az ősi fegyverekhez valókká lettenek is, 's a' ditsőség' mezején is a' hajdoni kőszikla-mejjekből fakasztott vérforrások helyett, fejekből szivárgó tinta patatok kigyóznak milderfelé.

A' köz nyelv mellett, minden nemzetnek ekkor is mi-velni kellene a' magáét; 's két nyelvet megis tanulhatna mind a' két nem; 's minden nemzet egy nyelven tudván szollani, az egymás' megértése millyen egybefoglaló kötél lenne, (a' melly Hazánkban is olly kívánatos volna); 's melly közelítés lenne ez az emberi nem egyességére. —

De mikor hozza fel a' szeretet bús angyala az ezerek' elpiruló reggelén azt a' napot, mellyen le olvadnak a' csak ön sebet érző kevélység' jégvárai; 's feltámadván kiki, mint megannyi senyvedő halott, külön kriptájából, a' setétben egymás ellen hadazott testvéri karok, megesmévén egymást köz ölelésre ragadtatnak; 's a' köz Templom kiderülő boltja alatt minden szívből kivetttven az En-bálvány, mindenik egy véghetlen Atyával 's egy világgal telvén meg, egy nyelven zendül meg a' földről az első *Mi Atyánk!* égi boldogsággal mosolyog vissza a' végotlenség, az örökkévalóság' szeretet-gyűrűje rogyog a' föld körül — a' belső teremtés' első hajnalát örömi

könnyek gyöngyözik — 's az angyalok oda fenn ditséretet énekelnek. —

Ekkor lesznek egybegyűlve az örökösök az Új Testamentom teljesítésére — arra az osztályra, a' hol tsak mindennek járhat minden — a' köz szeretet' mennyei kintse az. —

De mikor értjük meg, hogy mindnyájon elesünk ezen tulajdon magunk ellen dühösködő háboruban? 's mikor záródik bé Janusnak az első *Kajntól* fogva mind nyílván álló ajtaja? Egymást szaggató fenevadok' ordító pusztája az, mellynek az Égre az Isten' képeivel kellene vissza rogyogni; elszakadt az odakötő szeretet szent lántza, 's az elsetétült tsillag számkivetve bujdosik — azon kevésen a' kik keresik egymást, sem találhatják fel — 's a' legmelegebb szívek is magánon vernek a' mindenfelől kizáró jégfalak közt — egy zivataros éjjben fut kiki külön lámpásoknál haza, félve mindentől, leginkább egymástól — mikor lesz az a' mennyei szó, melyre a' magát emésztő rivó zürzavar' sötétségében *világosság legyen?* ha nem csak szájjal, hanem egymáshoz közeledő szívvel kérnök, eljöne az Isten' Országá — 's e' kösziklás szigeten való útunkat, a' helyett hogy nehezítsük egymásnak megkönnyítve, vígan érkezénk a' tengerhez további útunkra — Akármely kicsi is ez élet, nem megvetni való; mikor felsőbb kötelesség kéri is, nagy árrára mutat, a' mellyért eladó is; nem végtél ugyan, de a' mint eszköz egyfelel a' továbbira, tziel másfelől magában is. — 'S oh! a' mit most úgy megrútitunk, melly széppé tehetnők; hogy nemcsak a' jelen nyerődnek meg, hanem szebben nevednék a' belső ember is, 's a' halált is úgy néznők, mint egy még szebb világ' bábáját — midőn ez a' föld alól a' napra utat nyitván, a' megnőtt szárnyu új angyalt leszállott kedvessei repitik a' menyre ki — 's a' felsőbb Természet mint egy 'anya a' fájdalom után mosolyog az újan szülnének. — Csak új életre mutat az új domb is, mellyel az anyaföld méhébe fogadván, virágokkal szőtt zöld leplét reményszivárványok alatt kapjavissza. — Sőt mikor a' sohajtások a' szemekre fellegezven, a' sirhalmok' nefeletseit könnyekkel öntözik, a' sirattak a' menny' tornáttziból néznék alá — 's mikor elalutt képeik felett a' pá'sint hánykodik a' nyögő szélben — mulandóság 's örökkévalóság' tenger habjai — honvágy — (semmi emberi szó ki nem mondhatja, 's a' mu'sika is csak inkább sebesíti az édes fájdalomtól sajgó szívet —), azt súgják lelkeinkbe: *Ne szomorkodjatok! ah! hogy nem mondhatjuk meg, melly idvesség az Istenhez közelebb — türjetei békével, 's higgyetek! — a' végetlenség mennyei magnesse, a' mi a' nemes lelkeket vonja, itt van.*

Fig. 2. p. 45.

Fig. 7. p. 46.

p. 46.

Fig. 13. p. 47.

Fig. 15. p. 17. p. 174.

Fig. 18. p. 184.

Fig. 22. p. 254.

Fig. 23. p. 20.

Fig. 26. p. 230.

38.

84. p. 261.

F. 30 270.

F. 39. p. 272

276. F. 45. F. 46. F. 47.

у

b: Page 277.

P. p. 285.

F. 50* p. 317.

F. 53. p. 325

F. 58. p. 436

F. Ol. p. 455.

stantice eadem

Page 101.

Fig. 53. p. 200.

F. 34 p. 201.

F. 35.

F. 36 p. 204.

F. 37 p. 206.

F. 38 p. 210.

F. 39 p. 212.

F. 41 p. 213.

F. 42 p. 213.

F. 44 p. 216.

F. 45. F. 46. F. 47.

F. 43 p. 214.

F. 48 p. 219.

F. 49 p. 285.

F. 49* p. 316.

F. 50 p. 285.

F. 50* p. 311.

F. 51 p. 322.

F. 52 p. 325.

F. 53 p. 325.

F. 54 p. 337.

F. 55 p. 424.

F. 58 p. 436.

F. 63 p. 402.

F. 64.

Aut si non ponatur distantia eadem

F. 59 p. 453.

F. 62 p. 402.

F. 60 p. 454.

F. 61 p. 455.

dimid. parameter
y = 1/2
focus
centrum
+ a
focus
centrum
- a

F. 66. p. 16.

F. 72. p. 479.

498.

F. 95. p. 502.

Fig. 65. p. 470.

F. 66. p. 471.

F. 67. p. 474.

F. 68.

F. 69.

p. 476.

F. 72. p. 479.

F. 74. p. 482.

F. 75. p. 483.

F. 78. p. 485.

F. 79.

pag. 486.

F. 80. p. 487.

F. 81. p. 491.

F. 82.

F. 83. p. 493.

F. 84.

F. 85. p. 495.

F. 86. p. 496.

F. 87. p. 497.

F. 88.

F. 89.

F. 91. p. 498.

F. 92. p. 499.

F. 93.

F. 94. p. 501.

F. 95. p. 502.

Fig. 65. p. 470.

F. 66. p. 471.

F. 67. p. 474.

F. 68.

F. 69.

p. 476.

F. 72. p. 479.

F. 78. p. 485.

F. 79.

pag. 486.

F. 80. p. 487.

F. 81. p. 491.

F. 82.

F. 83. p. 493.

F. 84.

F. 85. p. 495.

F. 86. p. 496.

F. 87. p. 497.

F. 88.

F. 89.

F. 90.

F. 91. p. 498.

F. 92. p. 499.

F. 93.

F. 94. p. 501.

F. 95. p. 502.

Tabula Appendix.

Tabula Appendix.